ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Φυσικής και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΝΙΚΟΣ Α. ΧΡΙΣΤΟΥ ΑΜ 3238

Επιβλέπων: **ΧΡΗΣΤΟΣ Ι. ΣΧΟΙΝΑΣ**
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δ.Π.Θ.

Ξάνθη 2013

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Φυσικής και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Χρήστος Σχοινάς, Αναπληρωτής Καθηγητής
του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης
(Επιβλέπων Καθηγητής)

Νικόλαος Καρυδάς, Επίκουρος Καθηγητής
του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης

Βασίλειος Νικολαΐδης, Λέκτορας
του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης

Αφιερώνεται στους γονείς μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρώτα απ’όλα θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Χρήστο Σχοινά, τόσο για την εμπιστοσύνη και το ενδιαφέρον που έδειξε κατά την ανάθεση της εργασίας αλλά και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του καθ’όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής.
Θέλω επίσης να ευχαριστήσω την οικογένεια μου τόσο για την οικονομική αλλά και για την ηθική υποστήριξη που μου παρείχαν καθ’όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Αλλά επίσης και για την υπομονή που επέδειξαν καθ’όλη αυτή τη διάρκεια η οποία και διατέλεσε καθοριστικό παράγοντα στη ολοκλήρωση αυτών.
Επιπλέον, θέλω να ευχαριστήσω τον ξάδελφο μου Νικόλα για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε στον προγραμματισμό με Matlab.

Νίκος Α. Χρίστου,
Ξάνθη, Νοέμβριος 2013

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αρχικά αναπτύχθηκαν βασικές έννοιες και ορισμοί της θεωρίας πινάκων. Ακολούθως έγινε αναφορά πάνω σε πράξεις, ιδιότητες και μεθόδους της θεωρίας αυτής. Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν διάφορες εφαρμογές της θεωρίας των πινάκων τις οποίες συναντάμε στην επιστήμη του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών. Τέλος αναλύθηκε διεξοδικά η επίλυση προβλημάτων της θεωρίας των πινάκων με τη χρήση των λογισμικών Excel, Mathematica και Matlab, ενώ ταυτοχρόνως επιλύθηκαν παραδείγματα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστίες..4

Περίληψη..5

Περιεχόμενα..6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - Βασικές έννοιες θεωρίας πινάκων.................................7
1.1 Ορισμοί και ιδιότητες..7
1.2 Ορίζουσες..12
1.3 Τάξη πίνακα...17
1.4 Αντίστροφος πίνακας A^{-1} 19
A. Υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα με τη βοήθεια των αλγεβρικών συμπληρωμάτων..19
B. Υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα με τη βοήθεια των στοιχειωδών μετασχηματισμών..21
1.5 Γραμμικά συστήματα...23
A. Μέθοδος απαλοιφής Gauss-Jordan..24
B. Μέθοδος (Κανόνας) του Gramer……………………………28
C. Μέθοδος του αντίστροφου πίνακα...31
1.6 Χαρακτηριστική Εξίσωση πίνακα...33

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - Εφαρμογή της θεωρίας πινάκων στην επιστήμη του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών.....................38
2.1 Εισαγωγή..38
2.2 Επίλυση Ηλεκτρικού κυκλώματος με τη μέθοδο των βρόγχων..39
2.3 Επίλυση Ηλεκτρικού κυκλώματος με τη μέθοδο των κόμβων....43
2.4 Εύρεση μέσου αριθμού κύκλων μιας ακολουθίας κώδικα..........46

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – Επίλυση προβλημάτων θεωρίας πινάκων με τη χρήση λογισμικού Excel - Mathematica - Matlab…………………………......48
3.1 Excel………………………………………………..………48
3.2 Mathematica……………………………………….…………52
3.3 Matlab…………………………………………………………74

Ευρετήριο Ελληνικό...90
Ευρετήριο Αγγλικό..91

Βιβλιογραφία..92

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές Έννοιες Θεωρίας Πινάκων

1.1 Ορισμοί και ιδιότητες

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται βασικά στοιχεία θεωρίας πινάκων.

Ορισμός: Πίνακα A (ή **m×n πίνακα**) ονομάζουμε μία ορθογώνια διάταξη στοιχείων a_{ij}, $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$ σε m γραμμές και n στήλες ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Αν m = n (δηλαδή αν ο αριθμός των γραμμών ισούται με τον αριθμό των στηλών) τότε ο A καλείται **τετραγωνικός πίνακας**. Για τον πίνακα A χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

ή

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Ορισμός: Αν m = 1 τότε ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται **πίνακας γραμμή**.

Ορισμός: Αν n = 1 τότε ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται **πίνακας στήλη**.

Ορισμός: Αν $a_{ij} = 0$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, τότε ο πίνακας:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

καλείται **μηδενικός πίνακας**.

Ορισμός: Αν $m = n$ και $a_{ii} = 1$, $1 \le i \le n$, $a_{ij} = 0$, $i \ne j$, τότε ο πίνακας:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

καλείται **μοναδιαίος πίνακας**.

Ορισμός: Αν $m = n$ και $a_{ij} = 0$, $i \ne j$, τότε ο πίνακας:

$$I = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

καλείται **διαγώνιος πίνακας**.

Ορισμός: Αν $m=n$ και $a_{ij}=0$, $i>j$, τότε ο πίνακας:

$$I=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

καλείται **άνω τριγωνικός πίνακας**.

Ορισμός: Αν $m=n$ και $a_{ij}=0$, $i<j$, τότε ο πίνακας:

$$I=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

καλείται **κάτω τριγωνικός πίνακας**.

Παρατήρηση: Δύο πίνακες $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, είναι ίσοι α:

$$a_{ij}=b_{ij} \text{ για κάθε } 1\le i\le m,\ 1\le j\le n.$$

Ορισμός: **Ανάστροφος** ενός πίνακα $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, καλείται ο πίνακας:

$$B=\left(a_{ji}\right)_{n\times m},\ 1\le j\le n,\ 1\le i\le m,$$

δηλαδή

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας Β συμβολίζεται με A' ή A^T ή A^t.

Ορισμός: Έστω οι πίνακες $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$. Τότε ονομάζουμε **άθροισμα** των Α και Β τον πίνακα:

$$\Gamma = A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n.$$

Ορισμός: Έστω $l\in \mathbb{R}$ και $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$. Τότε ονομάζουμε **γινόμενο αριθμού με πίνακα** (ή **βαθμωτό γινόμενο**) τον πίνακα:

$$\Gamma = l\,A=\left(l\,a_{ij}\right)_{m\times n},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n.$$

Ορισμός: Έστω οι πίνακες:

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n,$$

$$B=\left(b_{jk}\right)_{n\times p},\ 1\le j\le n,\ 1\le k\le p,$$

(δηλαδή θεωρούμε δύο πίνακες για τους οποίους ο αριθμός των στηλών του πρώτου ισούται με τον αριθμό γραμμών του δευτέρου). Τότε ορίζουμε **γινόμενο** των Α και Β τον $m\times p$ πίνακα $\Gamma = A\cdot B$ όπου:

$$\Gamma=\left(g_{ik}\right)_{m\times p},\ g_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk},\ 1\le i\le m,\ 1\le k\le p.$$

Παράδειγμα: Έστω

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \text{ και } B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Τότε

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot(-3)\\ 1\cdot(-1)+2\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & -5\end{pmatrix},$$

ενώ

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 0 + 1 \cdot 1 & (-1)\cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0 + (-3)\cdot 1 & 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι εν γένει δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Ιδιότητες Πινάκων

1) $A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$.

2) $(A + B) \cdot \Gamma = A \cdot \Gamma + B \cdot \Gamma$.

3) $A \cdot (B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma$.

Ορισμός: Έστω A και B δύο τετραγωνικοί πίνακες. Τότε αυτοί θα λέγονται **αντιμεταθετικοί** αν:

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Ορισμός: Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Αν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

τότε ο B καλείται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται με A^{-1}. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας A καλείται **αντιστρέψιμος** ή **ομαλός**.

1.2 Ορίζουσες

Έστω

$$A = (a_{11})$$

ένας 1×1 πίνακας. Τότε η **ορίζουσα** του πίνακα Α συμβολίζεται με $|A|$ ή $\det A$ και εκφράζεται από τη σχέση:

$$|A| = a_{11}.$$

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ένας 2×2 πίνακας. Τότε η **ορίζουσα** του πίνακα A συμβολίζεται με $|A|$ ή $\det A$ και εκφράζεται από τη σχέση:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα χρησιμοποιούμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα.

Ορισμός: Έστω a_{kl} ένα στοιχείο του πίνακα A. Τότε ονομάζουμε **αλγεβρικό συμπλήρωμα** ή **προσημασμένη ελάσσονα** ή **συντελεστή** του a_{kl} το:

$$A_{kl} = (-1)^{k+l}\,|B_{kl}|$$

όπου $|B_{kl}|$ είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν παραλείψουμε την k γραμμή και την l στήλη από τον πίνακα A.

Ορισμός: Έστω πίνακας $A = (a_{ij}), 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε ονομάζουμε **ορίζουσα n τάξης** ή απλά **ορίζουσα** του A τον αριθμό:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Παρατήρηση: Για κάθε $1 \le i \le n$ και $1 \le j \le n$ ισχύει

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} .$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Έχουμε

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

όπου

$$a_{11} = -2,\ a_{12} = 6,\ a_{13} = 3$$

και

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 10 = 26,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16.$$

Άρα

$$|A| = -2 \cdot 26 + 6 \cdot 7 - 3 \cdot 16 = -58.$$

Παρατήρηση: Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας ενός 3×3 πίνακα είναι ο **κανόνας του Sarrus**.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

είναι ο **κανόνας του Sarrus**. Σύμφωνα με τον κανόνα του Sarrus δημιουργούμε

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}.$$

και τότε η ορίζουσα υπολογίζεται από τη σχέση

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

με τον κανόνα του Sarrus.

Απάντηση: Έχουμε

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & 6 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{matrix}$$

Άρα

$$|A| = (-2)\cdot 4\cdot 4 + 6\cdot 5\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot(-2) - 3\cdot 4\cdot 3 - (-2)\cdot 5\cdot(-2) - 4\cdot 2\cdot 6 = -58.$$

Ιδιότητες οριζουσών

1) Μια ορίζουσα δεν αλλάζει εάν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές.

2) Μια ορίζουσα αλλάζει πρόσημο αν εναλλάξουμε τη θέση δύο γραμμών ή δύο στηλών.

3) Μια ορίζουσα είναι ίση με μηδέν αν τα αντίστοιχα στοιχεία δύο γραμμών ή δύο στηλών είναι ίσα ή ανάλογα.

4) Εάν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης με κάποιο αριθμό $l \neq 0$ τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με l.

5) Μια ορίζουσα δεν μεταβάλλεται αν στα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής ή μιας στήλης πολλαπλασιασμένα με κάποιο αριθμό $l \neq 0$.

6) Εάν κάθε στοιχείο μιας γραμμής ή μιας στήλης είναι άθροισμα δύο αριθμών τότε η ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δύο οριζουσών.

7) Αν A, B είναι δύο $n \times n$ πίνακες τότε $|AB| = |A||B|$.

8) Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

Παράδειγμα: Να αποδεχτεί ότι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1).$$

Απάντηση: Ισχύει ότι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 + a_1) - (a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a_2 + a_1)$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η ορίζουσα

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}.$$

Απάντηση: Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+a & 2+a & 2 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3+a & 3+a & 3+a \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (3+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$= (3+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (3+a)a^2.$$

Πρόταση: Ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν

$$|A| \neq 0.$$

Πρόταση: Το γινόμενο δύο ή περισσοτέρων πινάκων είναι αντιστρέψιμος πίνακας αν και μόνο αν όλοι οι πίνακες του γινομένου είναι αντιστρέψιμοι.

1.3 Τάξη Πίνακα

Η τάξη ενός πίνακα A (συμβολίζεται με $rankA$) είναι ένας φυσικός αριθμός r εάν τουλάχιστον μία υποορίζουσα τάξης r που σχηματίζεται από τον A είναι διάφορη από το μηδέν και όλες οι άλλες οι υποορίζουσες τάξης $r+1$, αν υπάρχουν, είναι ίσες με μηδέν.

Παράδειγμα: Έστω ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Αρχικά υπολογίζουμε τις υποορίζουσες τάξης 3

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}, |A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}, |A_3|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}, |A_4|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι $|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=0.$
Ακολούθως υπολογίζουμε την υποορίζουσα τάξης 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-5\neq 0.$$

Άρα

$$rankA=2.$$

Ορισμός: Ένας πίνακας λέγεται **κλιμακωτός** εάν

1. Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν τις μηδενικές.
2. Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι ίσο με «1» και βρίσκεται δεξιά του αντίστοιχου «1» της προηγούμενης γραμμής.
3. Το πρώτο «1» μιας μη μηδενικής γραμμής είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία το «1» βρίσκεται.

Στη συνέχεια αναφέρουμε ορισμένους μετασχηματισμούς που μπορούμε να κάνουμε στους πίνακες χωρίς να μεταβληθεί η τάξη τους. Αυτοί οι μετασχηματισμοί καλούνται στοιχειώδεις.

Οι **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών Η** που χρησιμοποιούμε είναι οι ακόλουθοι:

1. Η εναλλαγή της i-στής γραμμής με την j-στη, (συμβολισμός $\mathbf{H_{ij}}$).
2. Ο πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου της i-στής γραμμής με έναν αριθμό $k \neq 0$ (συμβολισμός $\mathbf{H_i(k)}$).
3. Ο πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου της j-στής γραμμής με έναν αριθμό k και η πρόσθεση των αντίστοιχων στοιχείων που προκύπτουν στα αντίστοιχα στοιχεία της i-στής γραμμής (συμβολισμός $\mathbf{H_{ij}(k)}$).

Πρόταση: Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί δεν μεταβάλλουν την τάξη του πίνακα A.

Παρατήρηση: Ίδιοι μετασχηματισμοί μπορούν να γίνουν και στις στήλες του πίνακα A.

Ορισμός: Δύο πίνακες A και B καλούνται **ισοδύναμοι** (συμβολίζεται με $A : B$ ή $A \leftrightarrow B$) εάν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς. Ισχύει $rankA = rankB$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Απάντηση: Έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \overset{H_{12}}{:}$$

$$\begin{array}{c@{}l}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} H_{21}(-2) \\ : \\ H_{31}(1) \end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{c@{}l}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} H_{32}(-1) \\ : \\ \end{array}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Άρα $rankA=2$ διότι η τρίτη γραμμή του B είναι ίση με μηδέν και η πρώτη και η δεύτερη γραμμή είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

1.4 Αντίστροφος πίνακας A^{-1}

Α) Υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα με τη βοήθεια των αλγεβρικών συμπληρωμάτων

Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ορίζουμε τον πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

όπου A_{ij} τα αλγεβρικά συμπληρώματα του A.

Τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$

όπου C^T ο ανάστροφος του πίνακα C.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Πρώτα θα υπολογίσουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -3 + 2 = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = -9 + 1 = -8,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -6 + 1 = -5,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -3 + 1 = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3 + 1 = -2.$$

Επίσης

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3\cdot 1 - 1\cdot 2 + 1\cdot 1 = 2.$$

Άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -8 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -4 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

B) Υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα με τη βοήθεια των στοιχειωδών μετασχηματισμών

Έστω ο $n\times n$ τετραγωνικός και αντιστρέψιμος πίνακας $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$. Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(A|I\right)$$

όπου Ι είναι ο $n\times n$ μοναδιαίος πίνακας. Στον επαυξημένο αυτόν πίνακα εκτελούμε κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς έτσι ώστε να καταλήξουμε εν τέλει στον επαυξημένο πίνακα της μορφής

$$\left(I|B\right)$$

όπου $B = A^{-1}$. Έχουμε δηλαδή

$$\left(A|I\right) : \ldots : \left(I|A^{-1}\right).$$

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε τον A^{-1} όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\underset{\sim}{H_1(1/2)}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\underset{\sim}{H_{21}(-5)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 11/2 & -5/2 & 1 \end{array}\right)\underset{\sim}{H_2(2/11)}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/11 & 2/11 \end{array}\right)\underset{\sim}{H_{12}(1/2)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/11 & 1/11 \\ 0 & 1 & -5/11 & 2/11 \end{array}\right)$$

Συνεπώς

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3/11 & 1/11 \\ -5/11 & 2/11 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε τον A^{-1} όπου

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση: Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\underset{H_{31}(-1)}{\overset{H_{21}(-1)}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\underset{\sim}{H_{12}(-3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\underset{\sim}{H_{13}(-3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Άρα

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5 Γραμμικά Συστήματα

Θεωρούμε ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2, ..., x_n$ της μορφής

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

όπου $a_{ij,}\ b_i,\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n$ σταθερές

Ορισμός: **Λύση** του συστήματος θα ονομάζεται ένα σύνολο τιμών $y_1, y_2, ..., y_n$ οι οποίες ικανοποιούν τις παραπάνω εξισώσεις.

Ορισμός: Όταν ένα σύστημα έχει τουλάχιστον μια λύση λέγεται **συμβιβαστό.** Διαφορετικά λέγεται **ασυμβίβαστο ή αδύνατο.**

Ορισμός: Ένα **συμβιβαστό** σύστημα είτε έχει μια λύση είτε έχει άπειρες λύσεις. Όταν έχει άπειρες λύσεις ονομάζεται **αόριστο**.

Για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα ορίζουμε τον $m \times n$ πίνακα των συντελεστών

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

τον $n \times 1$ πίνακα των αγνώστων

$$\vec{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)',$$

και τον $m \times 1$ πίνακα των σταθερών όρων

$$\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)'.$$

Το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$A\vec{x} = \vec{b}\ .$$

Θα αναπτύξουμε τρεις μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

Α) ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS-JORDAN

Εδώ θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(A|\vec{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & b_2 \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_3 \end{array}\right).$$

Στη μέθοδο αυτή η επόμενη πρόταση είναι σημαντική.

Πρόταση: Το γραμμικό σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει λύση εάν και μόνον εάν

$$rank\,A = rank\left(A|\vec{b}\right).$$

Η εφαρμογή της μεθόδου Gauss-Jordan γίνεται αντιληπτή με τη βοήθεια των παρακάτω παραδειγμάτων.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ x+\quad y&=2 \end{aligned}.$$

Απάντηση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|\vec{b})=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Εκτελώντας κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς έχουμε

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{H_{12}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \underset{\sim}{H_{21}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{H_{12}(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Από τον τελευταίο πίνακα προκύπτει $x=1,\ y=1$.

Παράδειγμα: Να λύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ x - y - z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 11 \end{aligned}$$

Απάντηση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \end{array}\right).$$

Εφαρμόζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{21}(-1) \\ \sim \\ H_{31}(-4) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \underset{\sim}{H_{2}(-1/3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4/3 & 5/3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{12}(-2) \\ \sim \\ H_{32}(3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \underset{\sim}{H_{3}(-1/2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{23}(-4/3) \\ \sim \\ H_{13}(-1/3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Οπότε από τον τελευταίο πίνακα η λύση του συστήματος είναι $x=1,\ y=-1,\ z=2$.

Παράδειγμα: Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ l\,x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ 6x_1 + (l+2)x_2 + 2x_3 &= 13 \end{aligned} \qquad ,$$

όπου l μια παράμετρος.

Απάντηση: Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ l & 4 & 1 & 5 \\ 6 & l+2 & 2 & 13 \end{array}\right)$$

Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς με $l \neq 4, l \neq -3$ έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ l & 4 & 1 & 5 \\ 6 & l+2 & 2 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{21}(-l) \\ : \\ H_{31}(-6) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4-l & 1-l & 5-6l \\ 0 & l-4 & -4 & -23 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_2(1/(4-l)) \\ : \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & (1-l)/(4-l) & (5-6l)/(4-l) \\ 0 & l-4 & -4 & -23 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{12}(-1) \\ : \\ H_{32}(4-l) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/(4-l) & 19/(4-l) \\ 0 & 1 & (1-l)/(4-l) & (5-6l)/(4-l) \\ 0 & 0 & -3-l & -18-6l \end{array}\right) \begin{array}{c} H_3(-1/(3+l)) \\ : \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/(4-l) & 19/(4-l) \\ 0 & 1 & (1-l)/(4-l) & (5-6l)/(4-l) \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{13}(3/(l-4)) \\ : \\ H_{23}((l-1)/(4-l)) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/(4-l) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(l-4) \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Άρα εάν $l \neq 4, l \neq -3$ έχουμε μοναδική λύση την
$x_1 = 1/(4-l),\ x_2 = 1/(l-4),\ x_3 = 6.$

Έστω τώρα $l = 4$. Τότε από τους παραπάνω πίνακες έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{31}(-6)]{H_{21}(-4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -19 \\ 0 & 0 & -4 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{H_3(-1/4)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 23/4 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{23}(3)]{H_{13}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 23/4 \end{array}\right).$$

Παρατηρούμε ότι από τον τελευταίο πίνακα ότι προκύπτει $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -7/4$ το οποίο είναι άτοπο, επομένως το σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

Έστω τώρα ότι $l = -3$. Τότε από τους παραπάνω πίνακες έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 2 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{31}(-6)]{H_{21}(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/7 & 19/7 \\ 0 & 1 & 4/7 & 23/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Άρα έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$x_1 + 3/7\,x_3 = 19/7$$
$$x_2 + 4/7\,x_3 = 23/7$$

Θέτουμε $x_3 = c$ και παίρνουμε την απειρία λύσεων

$$x_1 = 19/7 - 3/7c,\ x_2 = 23/7 - 4/7c,\ x_3 = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Β) ΜΕΘΟΔΟΣ (ΚΑΝΟΝΑΣ) ΤΟΥ CRAMER

Εδώ η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται μόνο όταν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός (δηλαδή $m = n$).

Έστω A_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα A όταν αντικαταστήσουμε την $i-$στήλη με τη στήλη των σταθερών όρων $\vec{b}$.

α) Εάν $|A| \neq 0$ τότε το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, ..., x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

β) Εάν $|A| = 0$ και τουλάχιστον μια από τις ορίζουσες $|A_i|,\ i = 1, 2, ..., n$ είναι διάφορη από το μηδέν τότε το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ είναι αδύνατο.

γ) Εάν $|A| = 0$ και $|A_i| = 0,\ i = 1, 2, ..., n$ τότε το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ είναι αόριστο ή αδύνατο.

Παράδειγμα: Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned} 12x + y &= 9 \\ 5x - y &= 8 \end{aligned}.$$

Απάντηση: Υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17,\ |A_2| = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 51,$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 5 = -17.$$

Άρα

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-17}{-17} = 1,\ y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{51}{-17} = -3.$$

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}.$$

Απάντηση: Έχουμε

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(8-1) + 1(12-5) + 3(3-10) = 0,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(8-1) + 1(8-3) + 3(2-6) = 0,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(8-3) - 1(12-5) + 3(9-10) = 0,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(6-2) + 1(9-10) + 1(3-10) = 0.$$

Οπότε το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.

Πρώτα θα εξετάσουμε εάν είναι αόριστο. Θέτουμε $x_3 = c$ και έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 - 3c \\ 3x_1 + 2x_2 &= 2 - c \end{aligned}.$$

Άρα

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-3c & -1 \\ 2-c & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2-6c+2-c}{4+3} = -c + \frac{4}{7},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-3c \\ 3 & 2-c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4-2c-3+9c}{4+3} = c + \frac{1}{7}.$$

Θα ελέγξουμε αν η λύση ικανοποιεί την τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος. Πράγματι $5x_1 + x_2 + 4x_3 = -5c + 20/7 + c + 1/7 + 4c = 3$. Άρα επαληθεύεται η τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος. Επομένως το σύστημα είναι αόριστο με

$$x_1 = -c + \frac{4}{7},\ x_2 = c + \frac{1}{7},\ x_3 = c,\ c \in R.$$

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 13 \end{aligned}$$

Απάντηση: Έχουμε

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 1(8-6) - 1(8-6) + 1(24-24) = 0,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 13 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 6(8-6) - 1(10-13) + 1(30-52) = -7 \neq 0.$$

Συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο εφόσον $|A| = 0$ και $|A_1| \neq 0$.

C) ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Στη μέθοδο αυτή θα πρέπει ο πίνακας A να είναι τετραγωνικός και αντιστρεπτός. Τότε από τη σχέση $A\vec{x} = \vec{b}$ έχουμε $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Παράδειγμα: Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1 + x_2 &= 9 \end{aligned}$$

Απάντηση: Ο πίνακας Α των συντελεστών είναι ο

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ο οποίος έχει αντίστροφο τον $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Οπότε

$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$. Επομένως $x_1 = 1,\ x_2 = 8$.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Απάντηση: Έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$ Θα βρούμε τον αντίστροφο του A.

Άρα

$$|A| = 24 - 25 - 2(12 - 15) + 3(10 - 12) = -1.$$

Υπολογίζουμε πρώτα τα αλγεβρικά συμπληρώματα

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 25 = -1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 15 - 12 = 3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 15 - 12 = 3,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Επομένως

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Άρα $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1.$

1.6 Χαρακτηριστική Εξίσωση Πίνακα

Έστω ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A της μορφής

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

όπου $a_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ πραγματικές σταθερές. Ονομάζουμε **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0,$$

όπου I ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας και $\lambda \in R$. Οι ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης καλούνται **χαρακτηριστικές τιμές ή ιδιοτιμές** του πίνακα A. Έστω λ_i μια ιδιοτιμή του A. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$$

το οποίο έχει λύση διάφορη της μηδενικής εφόσον $|A - \lambda I| = 0$. Κάθε λύση $\vec{x}$ του ομογενούς συστήματος καλείται χαρακτηριστικό διάνυσμα ή ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

Πρόταση: Έστω $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα A και $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα αυτών. Τότε τα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πρόταση: Έστω λ_i μια απλή ιδιοτιμή (δηλαδή πολλαπλότητας ένα) του πίνακα A. Τότε η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην λ_i είναι ένα.

Πρόταση: Έστω λ_i μια ιδιοτιμή του πίνακα A πολλαπλότητας r. Τότε η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην λ_i είναι μικρότερη ή ίση με r.

Πρόταση: Η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην l_i ενός $n \times n$ πίνακα A είναι ίση με τον αριθμό $n - rank(A - l_i I)$.

Πρόταση: Οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (A^T ο ανάστροφος του A).

Πρόταση: Εάν $l_1, l_2, ..., l_m$ ιδιοτιμές του A και k πραγματική σταθερά τότε οι $k l_1, k l_2, ..., k l_m$ είναι ιδιοτιμές του kA.

Ορισμός: Ένας πίνακας λέγεται **ορθογώνιος** εάν $AA' = I$.

Πρόταση: Εάν l μια ιδιοτιμή ενός ορθογωνίου πίνακα A τότε και η $1/l$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.
β) Να βρεθούν οι διαστάσεις των διανυσματικών χώρων που παράγονται από τα ιδιοδιανύσματα.

Απάντηση: Θεωρούμε τον πίνακα

$$(A - lI) = \begin{pmatrix} 6 - l & -3 \\ 3 & 12 - l \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$|A - lI| = (6 - l)(12 - l) + 9 = l^2 - 18l + 81 = (l - 9)^2.$$

Από την εξίσωση $\left|A- l I\right| = (l-9)^2 = 0$ προκύπτει μια ιδιοτιμή η $l = 9$, η οποία είναι πολλαπλότητας 2.

Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην παραπάνω ιδιοτιμή. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A-9I)\vec{x} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

από όπου παίρνουμε $x_1 + x_2 = 0$. Θέτουμε $x_2 = c,\ c \in R$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l = 9$ είναι της μορφής $\vec{x} = \begin{pmatrix} -c & c \end{pmatrix}'$ όπου $c \in R$. Εφόσον $\vec{x} = c(-1 \quad 1)$ είναι προφανές ότι η διάσταση του χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l = 9$ είναι 1.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.
β) Να βρεθούν οι διαστάσεις των διανυσματικών χώρων που παράγονται από τα ιδιοδιανύσματα.

Απάντηση: Θεωρούμε τον πίνακα

$$\left(A - l I\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - l \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-l & 2 & 1 \\ 1 & 3-l & 1 \\ 1 & 2 & 2-l \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$\left|A - l I\right| = (2-l)((3-l)(2-l)-2) - 2(2-l-1) + (2-3+l) =$$
$$-(l-1)^2(l-5)$$

Θεωρούμε την εξίσωση
$|A-lI|=-(l-1)^2(l-5)=0$. Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι $l_1=1,\ l_2=5$, η $l_1=1$ είναι πολλαπλότητας 2.

Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές. Παίρνουμε πρώτα $l_1=1$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A-I)\vec{x}=\vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

από όπου παίρνουμε τη σχέση $x_1+2x_2+x_3=0$. Θέτουμε $x_2=c, x_3=d$ και παίρνουμε

$$x_1=-2c-d,\ x_2=c,\ x_3=d,\ \ c,d\in R.$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_1=1$ είναι της μορφής

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} -2c-d & c & d \end{pmatrix}' \text{ όπου } c,d\in R.$$

Άρα ισχύει $\vec{x}=\begin{pmatrix} -2c-d & c & d \end{pmatrix}'=c\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}'+d\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}'$. Επομένως η διάσταση του χώρου που παράγεται από ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_1=1$ είναι 2, πράγμα που αναμενόταν αφού $n-rank(A-I)=3-1=2$.

Παίρνουμε τώρα $l_2=5$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A-5I)\vec{y}=\vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

από όπου παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} -3y_1+2y_2+y_3&=0 \\ y_1-2y_2+y_3&=0 \\ y_1+2y_2-3y_3&=0 \end{aligned}$$

Παίρνουμε

$$\left(A-5I|\vec{0}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 0\end{array}\right)\overset{H_{12}}{:}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 0\end{array}\right)\underset{H_{31}(-1)}{\overset{H_{21}(3)}{:}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 4 & 0\\ 0 & 4 & -4 & 0\end{array}\right)\overset{H_2(-1/4)}{:}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 4 & -4 & 0\end{array}\right)\underset{H_{32}(-4)}{\overset{H_{12}(2)}{:}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Από τον τελευταίο πίνακα παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} y_1 - y_3 &= 0\\ y_2 - y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $y_3 = c, c \in R$ και παίρνουμε $y_1 = y_2 = c$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα $\vec{y}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_2 = 5$ είναι της μορφής $\vec{y} = \begin{pmatrix} c & c & c \end{pmatrix}'$ όπου $c \in R$.

Άρα ισχύει $\vec{y} = \begin{pmatrix} c & c & c \end{pmatrix}' = c\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}'$.

Επομένως η διάσταση του χώρου που παράγεται από ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_2 = 5$ είναι 1 πράγμα που αναμενόταν αφού $n - rank(A - 5I) = 3 - 2 = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εφαρμογή της θεωρίας πινάκων στην επιστήμη του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών

2.1 Εισαγωγή

Οι πίνακες είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για την επιστήμη του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών.

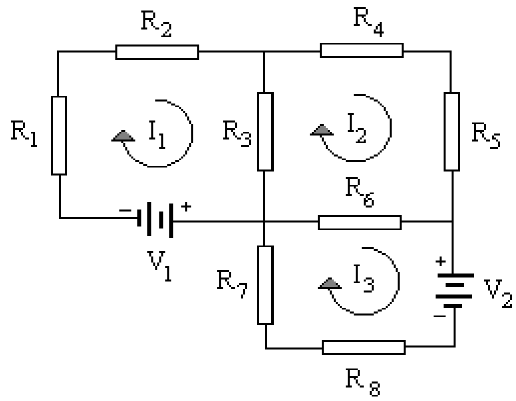
Η ραγδαία ανάπτυξη των υπολογιστών και γενικά ότι έχει να κάνει με το τομέα της πληροφορικής, διατέλεσε ένα σημαντικό παράγοντα ο οποίος οδήγησε στη δημιουργία αρκετών προγραμμάτων, όπως `Matlab`, `Mathematica` κ.α. τα οποία εκτελούν μαθηματικές πράξεις. Αυτό έδωσε τη δυνατότητα σε αρκετούς επιστήμονες, να εφαρμόσουν τις διάφορες ιδιότητες και πράξεις που συναντούμε στη θεωρία πινάκων, ώστε να επιλύσουν απλά προβλήματα τα οποία τα συναντούμε στη καθημερινότητα μας αλλά και πιο περίπλοκα τα οποία τα συναντούμε σε ένα πιο εξειδικευμένο περιβάλλον επαγγελματικό ή ερευνητικό.

Για παράδειγμα οι σχεδιαστές αυτοκινήτων με τη χρήση των ιδιοτιμών μπορούν να επιτύχουν απόσβεση του θορύβου στο εσωτερικό του αυτοκινήτου, έτσι ώστε οι επιβάτες να έχουν μια ήσυχη βόλτα. Η ανάλυση ιδιοτιμών χρησιμοποιείται επίσης στο σχεδιασμό των στερεοφωνικών συστημάτων του αυτοκινήτου, ώστε οι ήχοι να κατευθύνονται σωστά για την μεγαλύτερη ευχαρίστηση των επιβατών και του οδηγού. Επίσης όταν ένα αυτοκίνητο δονείται λόγω της δυνατής μουσικής, με τη χρήση των ιδιοτιμών, μπορούμε να ανακαλύψουμε τι αλλαγές πρέπει να γίνουν ούτος ώστε να μειωθούν οι κραδασμοί του αυτοκινήτου λόγω της μουσικής.

Ένα άλλο πεδίο στο οποίο οι μηχανικοί χρησιμοποιούν τις ιδιοτιμές είναι στην ανάλυση των δομών. Για παράδειγμα η φυσική συχνότητα μιας γέφυρας είναι η ιδιοτιμή ενός μικρότερου σε έκταση συστήματος το οποίο μοντελοποιεί τη γέφυρα. Με αυτό το τρόπο μπορούμε να βρούμε τη συχνότητα με την οποία δονείται μια γέφυρα και γενικά μια κατασκευή.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικά προβλήματα τα οποία λύνονται εφαρμόζοντας τη θεωρία πινάκων.

2.2 Επίλυση ηλεκτρικού κυκλώματος με τη μέθοδο των βρόγχων



Τα δεδομένα του κυκλώματος είναι :

$R1 = R3 = R5 = R7 = 1.5k\Omega$, $R2 = R4 = R6 = R8 = 800\Omega$,
$V1 = 12V$, $V2 = 24V$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των βρόχων στο πάρα πάνω κύκλωμα και βρίσκουμε τις ακόλουθες εξισώσεις :

Βρόχος 1 : $R1I1 + R2I1 + R3(I1 - I2) - V1 = 0$
Βρόχος 2 : $R4I2 + R5I2 + R6(I2 - I3) + R3(I2 - I1) = 0$
Βρόχος 3 : $R7I3 + R8I3 + R6(I3 - I2) - V2 = 0$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα και κάνοντας τις πράξεις έχουμε :

Βρόχος 1 : $1500I1 + 800I1 + 1500(I1 - I2) - 12 = 0$
Βρόχος 2 : $800I2 + 1500I2 + 800(I2 - I3) + 1500(I2 - I1) = 0$
Βρόχος 3 : $1500I3 + 800I3 + 800(I3 - I2) - 24 = 0$

Βρόχος 1 : $3800I1 - 1500I2 = 12$
Βρόχος 2 : $-1500I1 + 4600I2 - 800I3 = 0$
Βρόχος 3 : $-800I2 + 3100I3 = 24$

Από τις πάρα πάνω εξισώσεις παίρνουμε τους εξής 3 πίνακες :

$$A = \begin{pmatrix} 3800 & -1500 & 0 \\ -1500 & 4600 & -800 \\ 0 & -800 & 3100 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{pmatrix}$$

1. Με τη χρησιμοποίηση της εντολής `LinearSolve`, η οποία επιλύει γραμμικά συστήματα, παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα :

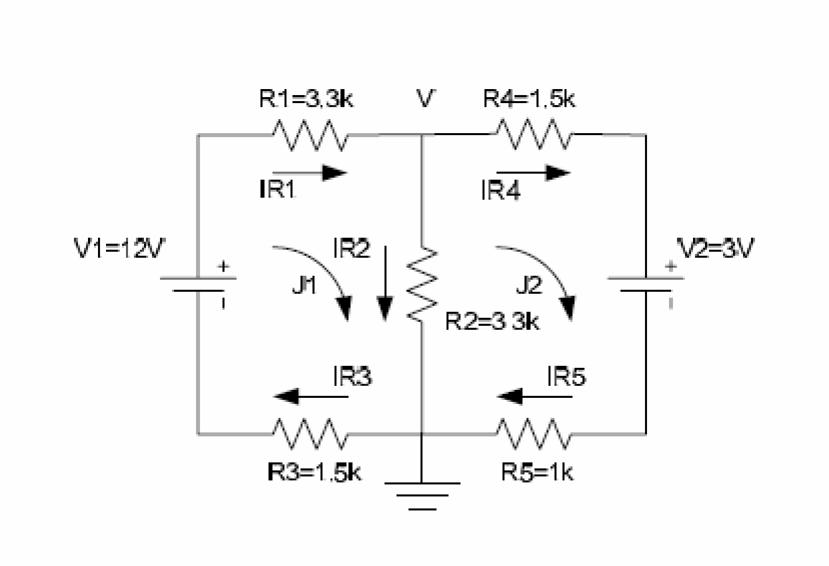
$$x = LinearSolve(A,b)$$

$$I1 = \frac{1602}{373175} = 0.0043A$$
$$I2 = \frac{1073}{373175} = 0.0029A$$
$$I3 = \frac{3166}{373175} = 0.0085A$$

2. Με τη χρησιμοποίηση της εντολής `Inverse` βρίσκουμε πρώτα τον αντίστροφο του πίνακα A και στη συνέχει πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με τον πίνακα b.

$$x = Invese(A) * b$$

$$I1 = 0.0043A$$
$$I2 = 0.0029A$$
$$I3 = 0.0085A$$



Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των βρόγχων στο παραπάνω κύκλωμα παίρνουμε τους εξής πίνακες :

$$\begin{bmatrix} (R1+R2+R3) & -R2 \\ -R2 & (R2+R4+R5) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} J1 \\ J2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V1 \\ -V2 \end{bmatrix}$$

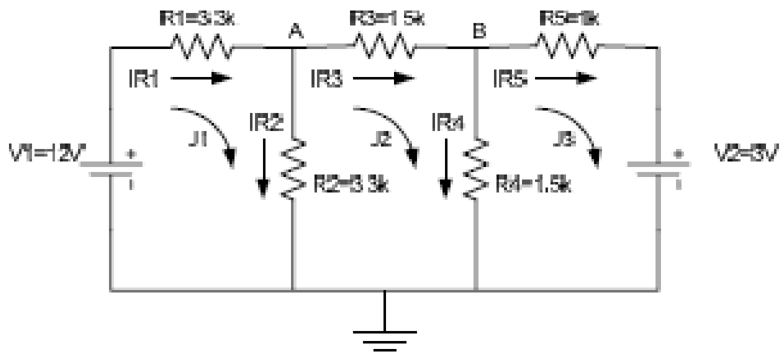
Επιλύνοντας ως προς $J1$ και $J2$ αφού αντικαταστήσουμε τις τιμές προκύπτει ότι:

$$J1 = \frac{\begin{bmatrix} V1 & -R2 \\ -V2 & (R2+R4+R5) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (R1+R2+R3) & -R2 \\ -R2 & (R2+R4+R5) \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 12 & -3.3k \\ -3 & 5.8k \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 8.1k & -3.3k \\ -3.3k & 5.8k \end{bmatrix}} = 1.65mA$$

$$J2 = \frac{\begin{bmatrix} (R1+R2+R3) & V1 \\ -R2 & -V2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (R1+R2+R3) & -R2 \\ -R2 & R2+R4+R5 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 8.1k & 12 \\ -3.3k & -3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 8.1k & -3.3k \\ -3.3k & 5.8k \end{bmatrix}} = 0.42mA$$

Από όπου μπορούμε να υπολογίσουμε τα ρεύματα που διαρρέουν τον κάθε αντιστάτη:

$$I_{R1} = I_{R3} = J_1 = 1.65mA$$
$$I_{R4} = I_{R5} = J_2 = 0.42mA$$
$$I_{R2} = J_1 - J_2 = 1.23mA$$



Εφαρμόζοντας τη μέθοδο για τους τρεις εμφανείς βρόχους και με φορά διαγραφής όπως εμφανίζεται στο σχέδιο του κυκλώματος του πάρα πάνω σχήματος καταλήγουμε στο ακόλουθο γινόμενο πινάκων :

$$\begin{bmatrix} (R1+R2) & -R2 & 0 \\ -R2 & (R2+R3+R4) & -R4 \\ 0 & -R4 & (R4+R5) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} J1 \\ J2 \\ J3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V1 \\ 0 \\ -V2 \end{bmatrix}$$

Επιλύνοντας ως προς $J1$, $J2$ και $J3$ αφού αντικαταστήσουμε τις τιμές προκύπτει ότι :

$$J1 = \frac{\begin{bmatrix} V1 & -R2 & 0 \\ 0 & (R2+R3+R4) & -R4 \\ -V2 & -R4 & (R4+R5) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (R1+R2) & -R2 & 0 \\ -R2 & (R2+R3+R4) & -R4 \\ 0 & -R4 & (R4+R5) \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 12 & -3.3k & 0 \\ 0 & 6.3k & -1.5k \\ -3 & -1.5k & 2.5k \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6.6k & -3.3k & 0 \\ -3.3k & 6.3k & -1.5k \\ 0 & -1.5k & 2.5k \end{bmatrix}} = 2.38mA$$

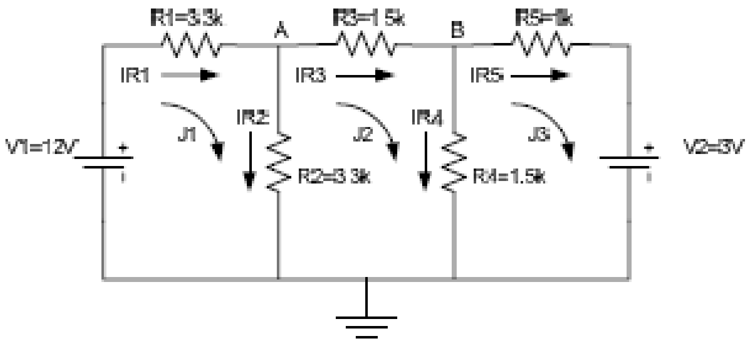
$$J2=\frac{\begin{bmatrix}(R1+R2) & V1 & 0\\ -R2 & 0 & -R4\\ 0 & -V2 & (R4+R5)\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}(R1+R2) & -R2 & 0\\ -R2 & (R2+R3+R4) & -R4\\ 0 & -R4 & (R4+R5)\end{bmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix}6.6k & 12 & 0\\ -3.3k & 0 & -1.5k\\ 0 & -3 & 2.5k\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}6.6k & -3.3k & 0\\ -3.3k & 6.3k & -1.5k\\ 0 & -1.5k & 2.5k\end{bmatrix}}=1.12mA$$

$$J3=\frac{\begin{bmatrix}(R1+R2) & -R2 & V1\\ -R2 & (R2+R3+R4) & 0\\ 0 & -R4 & -V2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}(R1+R2) & -R2 & 0\\ -R2 & (R2+R3+R4) & -R4\\ 0 & -R4 & (R4+R5)\end{bmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix}6.6k & -3.3k & 12\\ -3.3k & 6.3k & 0\\ 0 & -1.5k & -3\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}6.6k & -3.3k & 0\\ -3.3k & 6.3k & -1.5k\\ 0 & -1.5k & 2.5k\end{bmatrix}}=-0.53mA$$

Από τα πάρα πάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τα ρεύματα που διαρρέουν τον κάθε αντιστάτη :

$I_{R1}=J_1=2.38mA$
$I_{R2}=J_1-J_2=1.26mA$
$I_{R3}=J_2-1.12mA$
$I_{R4}=J_2-J_3=1.65mA$
$I_{R5}=J_3=-0.53mA$

2.3 Επίλυση ηλεκτρικού κυκλώματος με τη μέθοδο των κόμβων



Για να επιλύσουμε το κύκλωμα με τη μέθοδο των κόμβων ορίζουμε μηδενικό δυναμικό στον κάτω κόμβο, όπως φαίνεται στο πάρα πάνω σχήμα. Για τους κόμβους A και B, καταλήγουμε στις ακόλουθες εξισώσεις :

$$\left(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3}\right)*V_A-\frac{1}{R3}V_B=\frac{V1}{R1}$$
$$-\frac{1}{R3}V_A+\left(\frac{1}{R3}+\frac{1}{R4}+\frac{1}{R5}\right)*V_B=\frac{V2}{R5}$$

Από τις πάρα πάνω εξισώσεις προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας :

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3}\right) & -\frac{1}{R3}\\ -\frac{1}{R3} & \left(\frac{1}{R3}+\frac{1}{R4}+\frac{1}{R5}\right)\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}V_A\\ V_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{V1}{R1}\\ \frac{V2}{R5}\end{bmatrix}$$

Επιλύνοντας το πίνακα με τη μέθοδο του Cramer ως προς V_A, V_B και αντικαθιστώντας τις τιμές παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα :

$$V_A=\frac{\begin{bmatrix}\frac{V1}{R1} & -\frac{1}{R3}\\ \frac{V2}{R2} & \left(\frac{1}{R3}+\frac{1}{R4}+\frac{1}{R5}\right)\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3}\right) & -\frac{1}{R3}\\ -\frac{1}{R3} & \left(\frac{1}{R3}+\frac{1}{R4}+\frac{1}{R5}\right)\end{bmatrix}}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}\frac{12}{3.3*10^3} & -\frac{1}{1.5*10^3}\\ \frac{3}{1*10^3} & \left(\frac{1}{1.5*10^3}+\frac{1}{1.5*10^3}+\frac{1}{1*10^3}\right)\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{3.3*10^3}+\frac{1}{3.3*10^3}+\frac{1}{1.5*10^3}\right) & -\frac{1}{1.5*10^3}\\ -\frac{1}{1.5*10^3} & \left(\frac{1}{1.5*10^3}+\frac{1}{1.5*10^3}+\frac{1}{1*10^3}\right)\end{bmatrix}}=4.15V$$

$$V_B = \frac{\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3}\right) & \frac{V1}{R1} \\ -\frac{1}{R3} & \frac{V2}{R5} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3}\right) & -\frac{1}{R3} \\ -\frac{1}{R3} & \left(\frac{1}{R3}+\frac{1}{R4}+\frac{1}{R5}\right) \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3.3*10^3}+\frac{1}{3.3*10^3}+\frac{1}{1.5*10^3}\right) & \frac{12}{3.3*10^3} \\ -\frac{1}{1.5*10^3} & \frac{3}{1*10^3} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3.3*10^3}+\frac{1}{3.3*10^3}+\frac{1}{1.5*10^3}\right) & -\frac{1}{1.5*10^3} \\ -\frac{1}{1.5*10^3} & \left(\frac{1}{1.5*10^3}+\frac{1}{1.5*10^3}+\frac{1}{1*10^3}\right) \end{bmatrix}} = 2.47V$$

Γνωρίζοντας τις τιμές των $V_A = 4.15V$ και $V_B = 2.47V$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε αντιστάτη :

$$V_{R1} = V_1 - V_A = 7.85V$$
$$V_{R2} = V_A = 4.15V$$
$$V_{R3} = V_A - V_B = 1.68V$$
$$V_{R4} = V_B = 2.47V$$
$$V_{R5} = V_2 - V_B = 0.53V$$

Το ρεύμα που διαρρέει τον κάθε αντιστάτη υπολογίζεται από το νόμο του Ohm $I = \frac{V}{R}$ βάση της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του και της τιμής της αντίστασής του :

$$I_{R1} = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{7.85}{3300} = 2.38mA$$

$$I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{4.15}{3300} = 1.26mA$$

$$I_{R3} = \frac{V_{R3}}{R_3} = \frac{1.68}{1500} = 1.12mA$$

$$I_{R4} = \frac{V_{R4}}{R_4} = \frac{2.47}{1500} = 1.65mA$$

$$I_{R5} = \frac{V_{R5}}{R_5} = \frac{0.53}{1000} = 0.53mA$$

2.4 Εύρεση μέσου αριθμού κύκλων μιας ακολουθίας κώδικα

Οι σχεδιαστές ενός μεταφραστή (`compiler`) προσπαθούν να επιλέξουν ανάμεσα σε δυο ακολουθίες κώδικα για κάποιο συγκεκριμένο υπολογιστή. Οι πληροφορίες για τις διάφορες κατηγορίες εντολών που έχουν δοθεί είναι οι εξής :

Κατηγορία Εντολών	Μέσος Αριθμός Κύκλων
A	1
B	2
C	3

Οι δυο ακολουθίες κώδικα που μελετά ο σχεδιαστής του μεταφραστή δίνονται στο πάρα κάτω πίνακα :

Κώδικας	Εντολή ανά κατηγορία		
	A	B	C
1	$2*10^9$	$1*10^9$	$1*10^9$
2	$4*10^9$	$1*10^9$	$2*10^9$

Για την εύρεση του μέσου αριθμού κύκλων της κάθε ακολουθίας χρησιμοποιούμε πολλαπλασιασμό πινάκων :

$$\text{Αριθμός Κύκλων Κώδικα 1 :} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 7 * 10^9$$

$$\text{Αριθμός Κύκλων Κώδικα 2 :} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 12 * 10^9$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Επίλυση προβλημάτων θεωρίας πινάκων με τη χρήση λογισμικού Excel – Mathematica – Matlab

3.1 Excel

Η Excel είναι ένα από τα πρόγραμμα τα οποία μας παρέχονται με την εγκατάσταση του πακέτου προγραμμάτων Microsoft Office. Το πρόγραμμα αυτό είναι ιδανικό για καρτελογραφήσεις και πράξεις που έχουν να κάνουν με αυτά. Γι’ αυτό το λόγο έχουν εισαχθεί στο λογισμικό απλές συναρτήσεις που κάνουν αντίστοιχες πράξεις αριθμητικές, λογικές, ανεύρεσης κειμένου κ.α. όπως και απεικονίσεις γραφημάτων. Υπάρχουν αρκετές κατηγορίες που η καθεμιά τους έχει πολλές συναρτήσεις. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετήσουμε τη κατηγορία Μαθηματικών και Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων και πιο συγκεκριμένα τις συναρτήσεις που εκτελούν πράξεις πινάκων. Το πρόγραμμα, μας παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας μονοδιάστατων και δυσδιάστατων πινάκων. Όταν τα στοιχεία ενός πίνακα βρίσκονται σε μια γραμμή τότε έχουμε μονοδιάστατο οριζόντιο πίνακα και όταν βρίσκονται σε μια στήλη τότε έχουμε μονοδιάστατο κάθετο πίνακα. Όταν τα στοιχεία βρίσκονται σε πολλαπλές γραμμές και στήλες τότε έχουμε δυσδιάστατο πινάκα. Στο Excel δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε τρισδιάστατους πίνακες ή τύπους πίνακα.

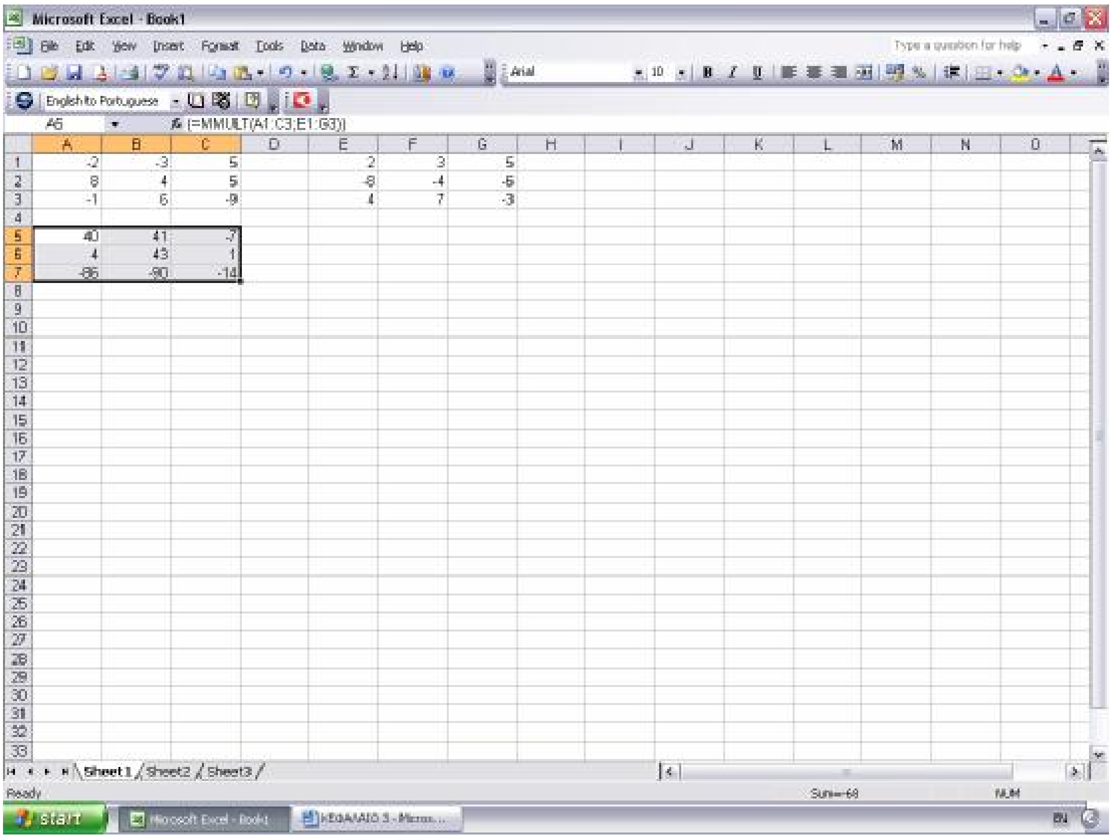
Οι συναρτήσεις που εκτελούν πράξεις πινάκων στο Excel είναι μεν περιορισμένες αλλά η εκτέλεση τους δεν χρειάζεται οποιαδήποτε γνώση προγραμματισμού πέρα από τα στοιχειώδη. Αυτό οφείλετε στο γεγονός ότι η Excel είναι ένα εύχρηστο και ευρέως διαδεδομένο πρόγραμμα.

Υπολογισμός γινομένου δυο πινάκων

Για τον υπολογισμό του γινομένου δυο πινάκων χρησιμοποιούμε την εντολή MMULT.

- Η συνάρτηση MMULT αποδίδει την τιμή σφάλματος # TIMH! όταν:
    - Κάποια κελιά είναι κενά ή περιέχουν κείμενο
    - Ο αριθμός των στηλών του πίνακα 1 είναι διαφορετικός από τον αριθμό των γραμμών του πίνακα 2

Εισάγουμε τους δυο πίνακες στο Excel και μετά επιλέγουμε ένα κελί εκτός του πίνακα. Στη συνέχεια πατάμε Insert και επιλέγουμε την εντολή Function. Στο παράθυρο το οποίο θα ανοίξει βρίσκουμε και επιλέγουμε την εντολή MMULT. Για τη Συστοιχία 1 επιλέγουμε τον πρώτο πίνακα και για τη Συστοιχία 2 το δεύτερο και πατάμε OK. Επιλέγουμε μια περιοχή από κελιά ίση με τις γραμμές του πρώτου και τις στήλες του δεύτερου πίνακα αρχίζοντας από το προεπιλεγμένο μας κελί. Πατάμε F2 και στη συνέχεια τον συνδυασμό των πλήκτρων Ctrl+Shift+Enter.

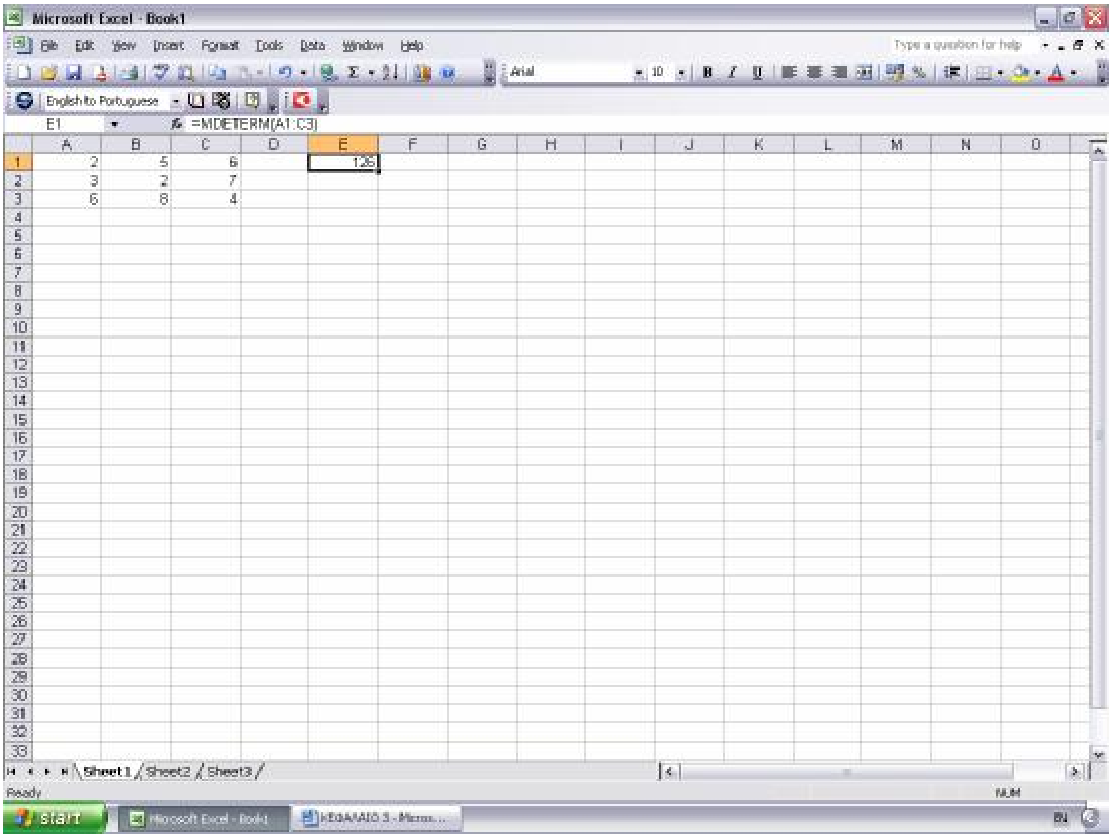


Υπολογισμός ορίζουσας

Για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα χρησιμοποιούμε την εντολή MDETERM.

- Η συνάρτηση MDETERM αποδίδει την τιμή σφάλματος # TIMH! όταν:
    - o Κάποια κελιά είναι κενά ή περιέχουν κείμενο
    - o Ο πίνακας δεν περιέχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών

Εισάγουμε τον πίνακα στο Excel και μετά επιλέγουμε ένα κελί εκτός του πίνακα. Στη συνέχεια πατάμε Insert και επιλέγουμε την εντολή Function. Στο παράθυρο το οποίο θα ανοίξει βρίσκουμε και επιλέγουμε την εντολή MDETERM. Στη συνέχεια επιλέγουμε τον πίνακα που θέλουμε να βρούμε την ορίζουσα του και πατάμε OK. Αυτό μας επιστρέφει την τιμή της ορίζουσας στο κελί που επιλέξαμε.

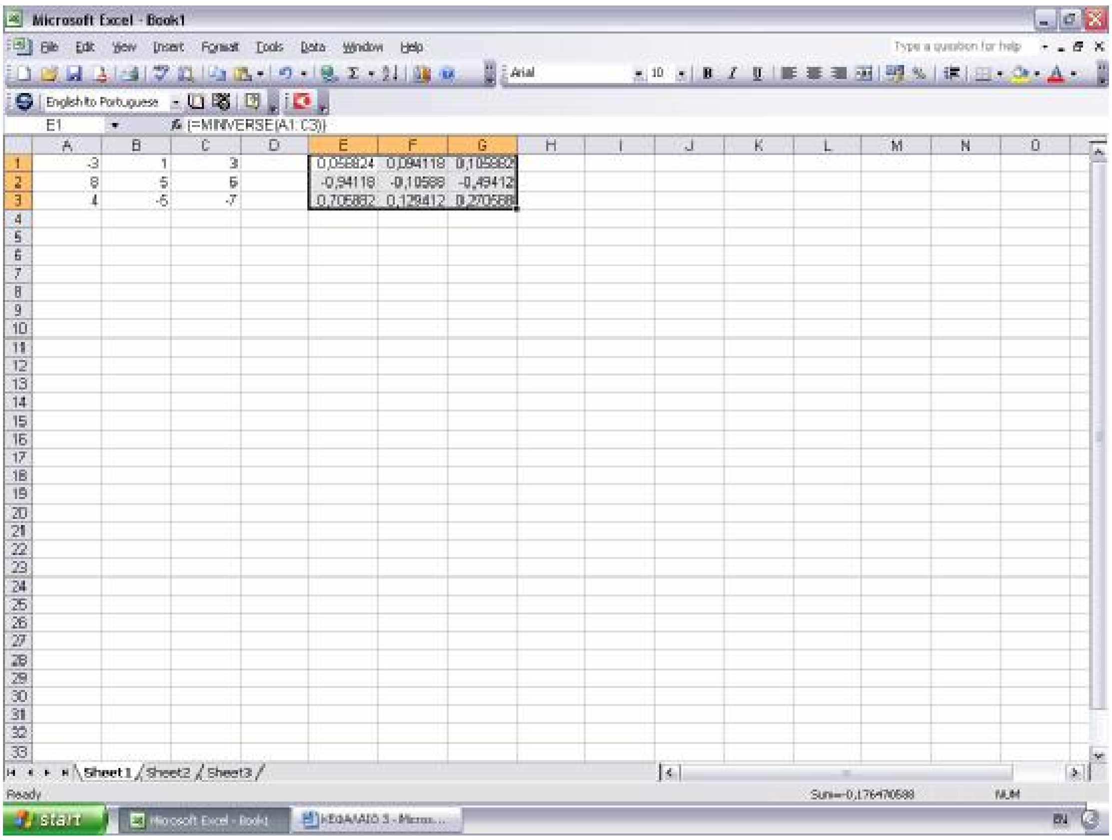


Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

Για τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα χρησιμοποιούμε την εντολή MINVERSE.

- Η συνάρτηση MINVERSE αποδίδει την τιμή σφάλματος # ΤΙΜΗ! όταν:
    - Κάποια κελιά είναι κενά ή περιέχουν κείμενο
    - Ο πίνακας δεν περιέχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών
- Μερικοί τετραγωνικοί πίνακες δεν μπορούν να αντιστραφούν και αποδίδουν την τιμή σφάλματος # ΑΡΙΘ! με τη συνάρτηση MINVERSE. Η ορίζουσα ενός μη αναστρέψιμου πίνακα είναι 0

Εισάγουμε τον πίνακα στο Excel και μετά επιλέγουμε ένα κελί εκτός του πίνακα. Στη συνέχεια πατάμε Insert και επιλέγουμε την εντολή Function. Στο παράθυρο το οποίο θα ανοίξει βρίσκουμε και επιλέγουμε την εντολή MINVERSE. Στη συνέχεια επιλέγουμε τον πίνακα που θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφο του και πατάμε OK. Επιλέγουμε μια περιοχή από κελιά ίση με τον πίνακα που εισάγαμε αρχίζοντας από το προεπιλεγμένο μας κελί. Πατάμε F2 και στη συνέχεια τον συνδυασμό των πλήκτρων Ctrl+Shift+Enter.



3.2 Mathematica

Το Mathematica είναι ένα υπολογιστικό πακέτο με πάρα πολλές δυνατότητες σχεδόν σε όλους τους τομείς των μαθηματικών (Άλγεβρα, Θεωρία συνόλων, Ανάλυση, διαφορικές εξισώσεις, Στατιστική κ.α.). Πρωτοεμφανίστηκε στα τέλη της δεκαετίας του 80 ως ένας πυρήνας (εκτέλεσης εντολών) ο οποίος μπορούσε να προσαρμοστεί σε κάθε λειτουργικό σύστημα (π.χ. UNIX, MacOs, Windows κ.α.). Ο κοινός αυτός πυρήνας (Kernel) υπάρχει ακόμη και σήμερα (βελτιωμένος και εμπλουτισμένος), ενώ η σύνδεσή του με τον χρήστη γίνεται μέσω ενός Notebook interface (περιβάλλον εργασίας) το οποίο είναι το μόνο που αλλάζει από λειτουργικό σε λειτουργικό.

Παρόλα τα πλεονεκτήματα της ύπαρξης ενός κοινού πυρήνα, δυστυχώς υπάρχουν και ορισμένα μειονεκτήματα, όπως είναι η αρκετά χαμηλή ταχύτητα επεξεργασίας (σε σχέση με τις καθαρές γλώσσες προγραμματισμού), η αστάθεια του προγράμματος και οι αυξημένες απαιτήσεις για μνήμη. Η χαμηλή ταχύτητα φαίνεται κυρίως όταν ζητείται η επαναλαμβανόμενη εκτέλεση μιας σειράς εντολών (π.χ. Loops) και οφείλεται κυρίως στο ότι το Mathematica χρησιμοποιεί Interpreter και όχι Compiler όπως οι κλασσικές γλώσσες προγραμματισμού (C, Pascal, Vbasic, Fortran κ.α.).

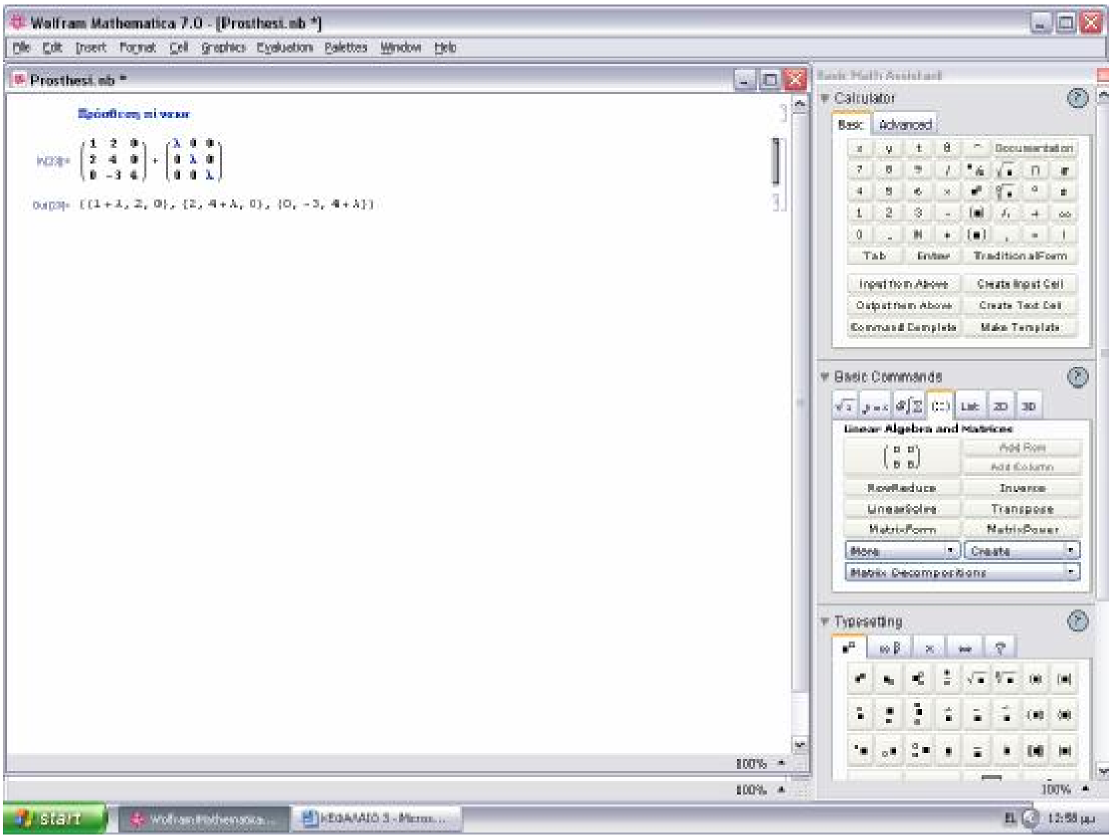
Εάν υπάρχει κάτι μη αποδεκτό από το Mathematica στο In, τότε στο Out εμφανίζεται κάποιο προειδοποιητικό μήνυμα.

Παρά την πληθώρα εντολών και δυνατοτήτων που μας παρέχει το Mathematica εμείς θα παρουσιάσουμε τις εντολές και πράξεις οι οποίες αφορούν τους πίνακες.

Από το μενού του προγράμματος επιλέγουμε: File/New/Notebook ή πατάμε τον συνδυασμό πλήκτρων Ctrl+N και στη συνέχεια Palettes/Basic Math Assistant. Το δεύτερο παράθυρο έχει τις εντολές τις οποίες και θα χρησιμοποιήσουμε ενώ στο πρώτο θα τις γράφουμε και θα παίρνουμε τα αποτελέσματα. Από το παράθυρο εντολών Basic Commands επιλέγουμε τη καρτέλα Matrix Commands όπου βρίσκονται οι εντολές που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

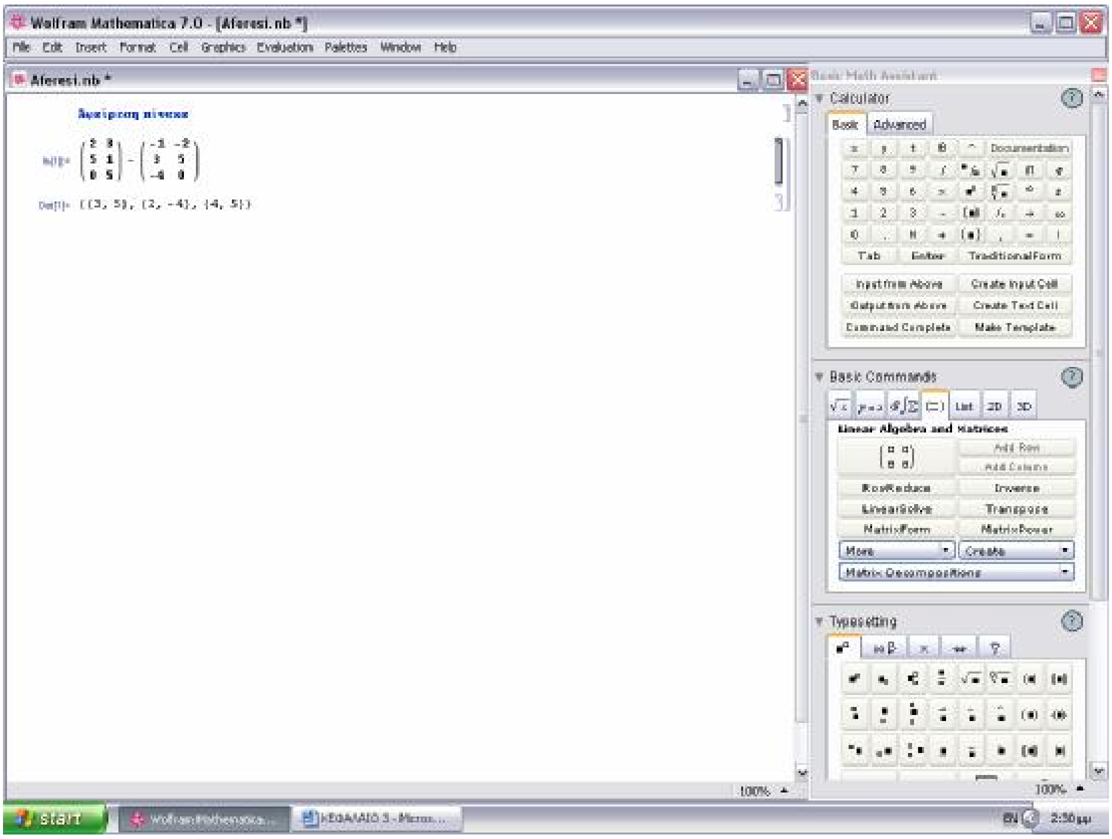
Πρόσθεση πινάκων

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `Matrix` η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα 2x2, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Στη συνέχεια εισάγουμε το σύμβολο της πρόσθεσης (+) είτε από τη γραμμή εντολών του Mathematica είτε από το πληκτρολόγιο μας. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας πάλι την εντολή `Matrix` εισάγουμε και το δεύτερο πίνακα τον οποίο και διαμορφώνουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Οι πίνακες πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



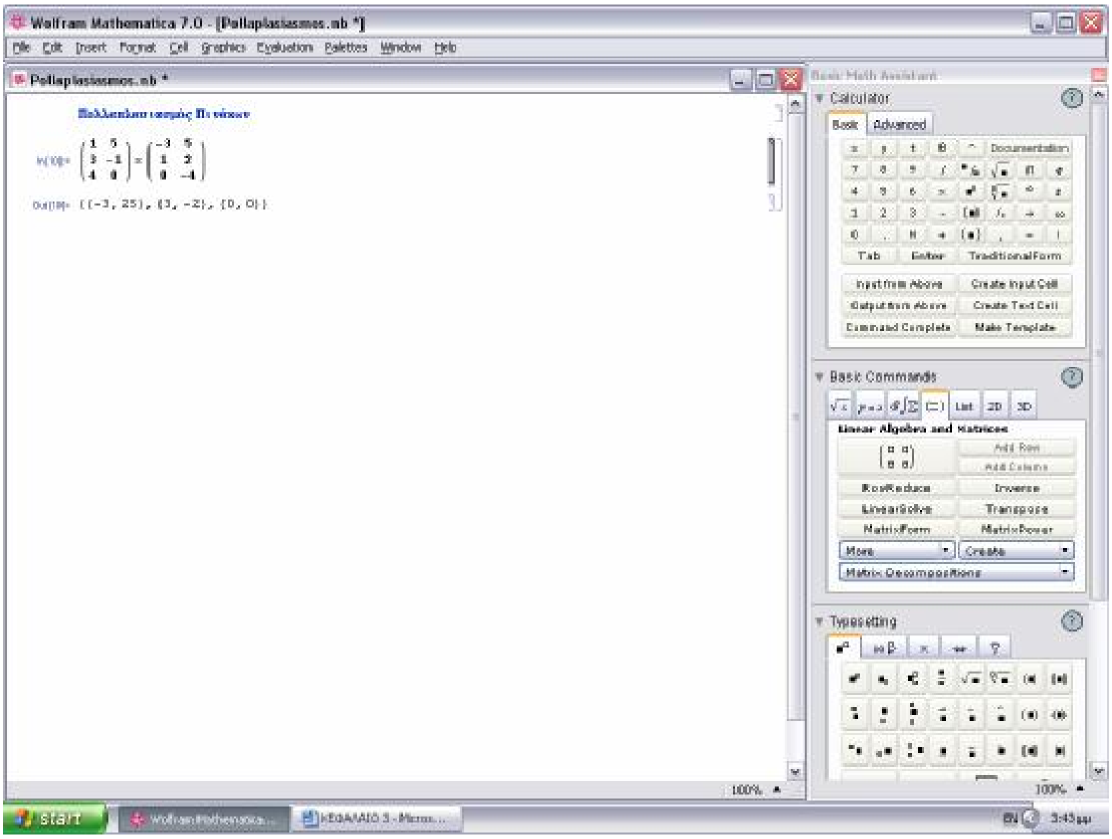
Αφαίρεση πινάκων

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `Matrix` η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Στη συνέχεια εισάγουμε το σύμβολο της αφαίρεσης `(-)` είτε από τη γραμμή εντολών του `Mathematica` είτε από το πληκτρολόγιο μας. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας πάλι την εντολή `Matrix` εισάγουμε και το δεύτερο πίνακα τον οποίο και διαμορφώνουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Οι πίνακες πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



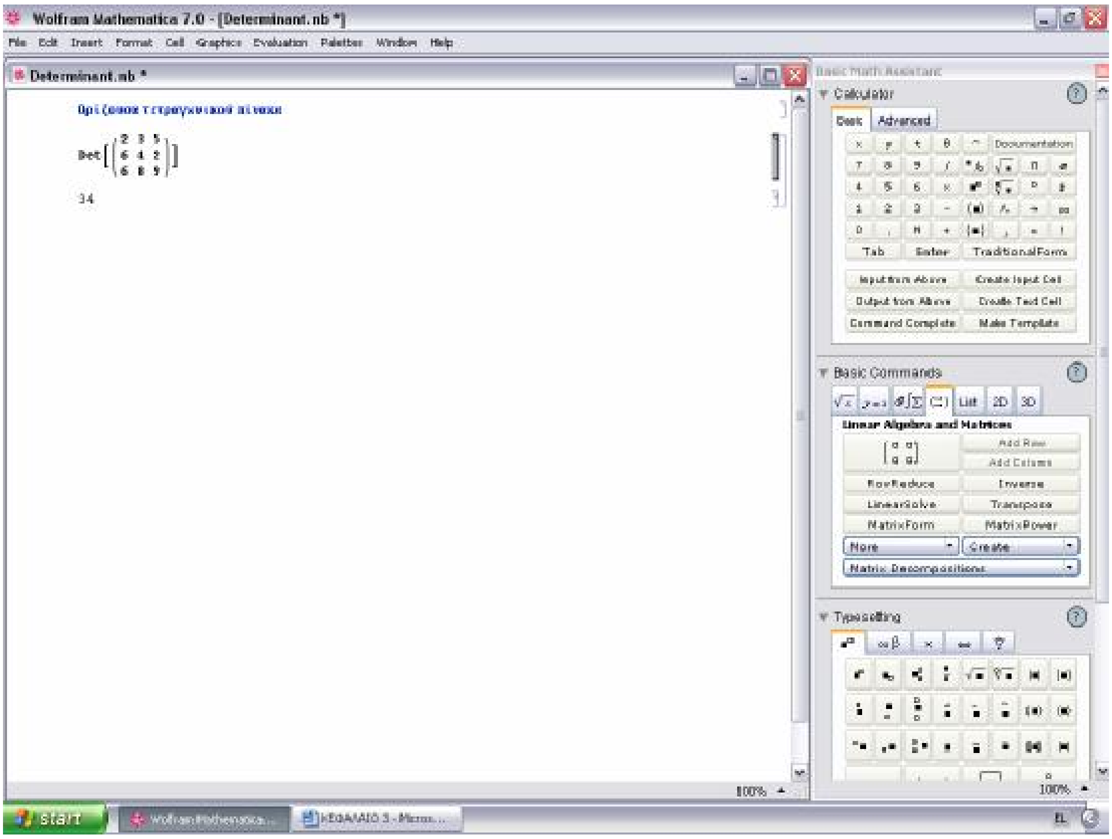
Πολλαπλασιασμός πινάκων

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `Matrix` η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Στη συνέχεια εισάγουμε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού `(x)` είτε από τη γραμμή εντολών του `Mathematica` είτε από το πληκτρολόγιο μας. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας πάλι την εντολή `Matrix` εισάγουμε και το δεύτερο πίνακα τον οποίο και διαμορφώνουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Οι πίνακες πρέπει να έχουν τις γραμμές και στήλες αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



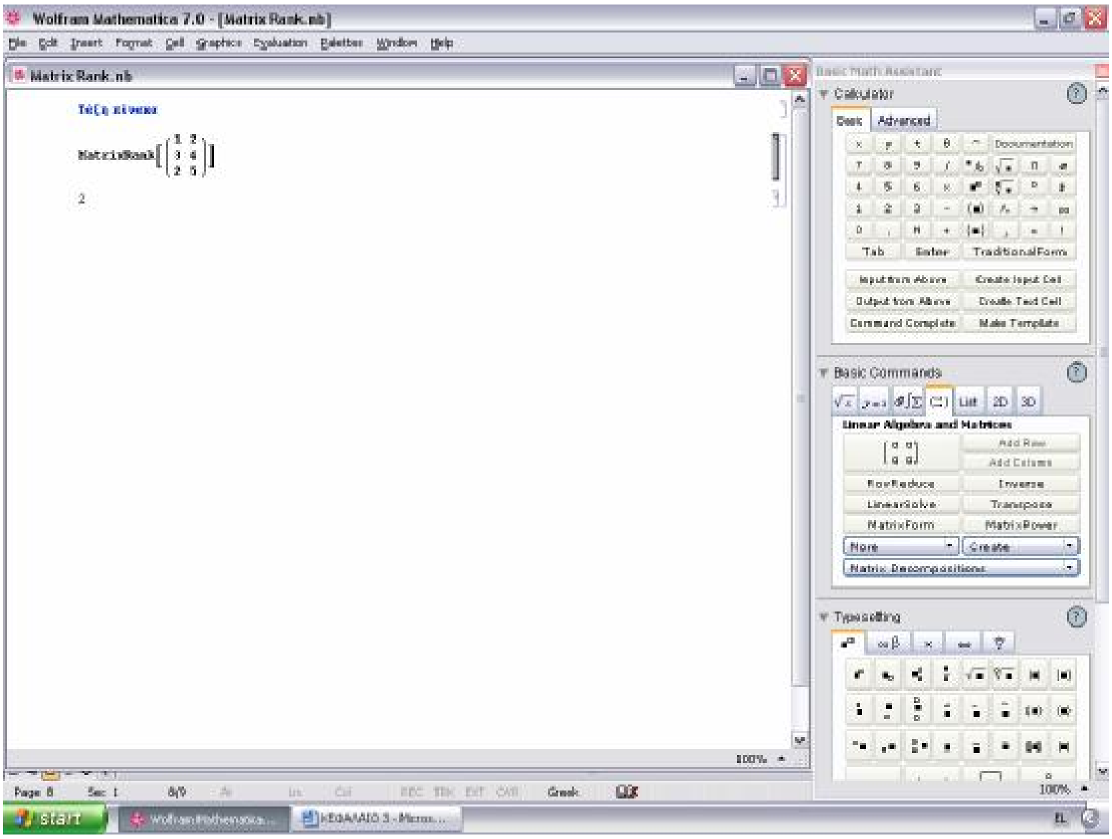
Υπολογισμός ορίζουσας

Από τη γραμμή εργαλείων Basic Commands επιλέγουμε την εντολή Det[matrix] η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή Matrix, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα 2x2, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές Add Row και Add Column. Ο πίνακας ο οποίος θα δημιουργήσουμε θα πρέπει να είναι τετραγωνικός αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων Shift+Enter το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



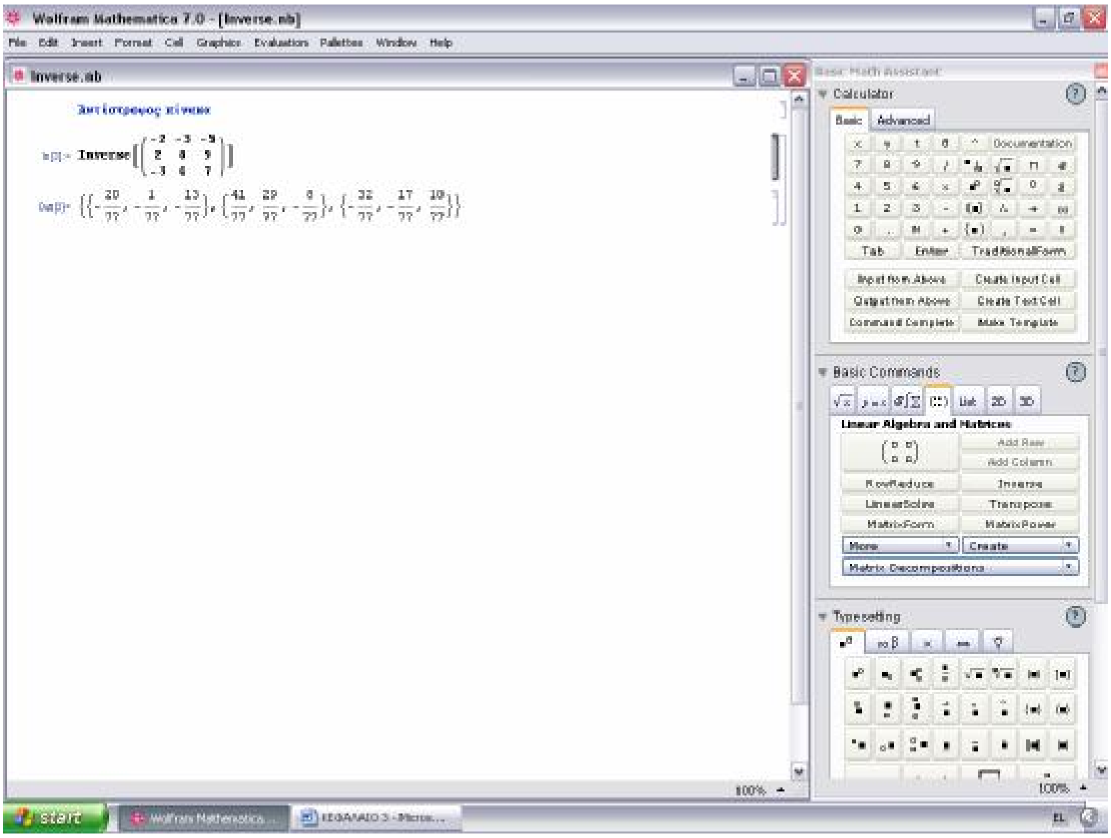
Υπολογισμός τάξης πίνακα

Από τη γραμμή εργαλείων Basic Commands επιλέγουμε την εντολή MatrixRank[matrix] η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή Matrix, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα 2x2, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές Add Row και Add Column. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων Shift+Enter το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



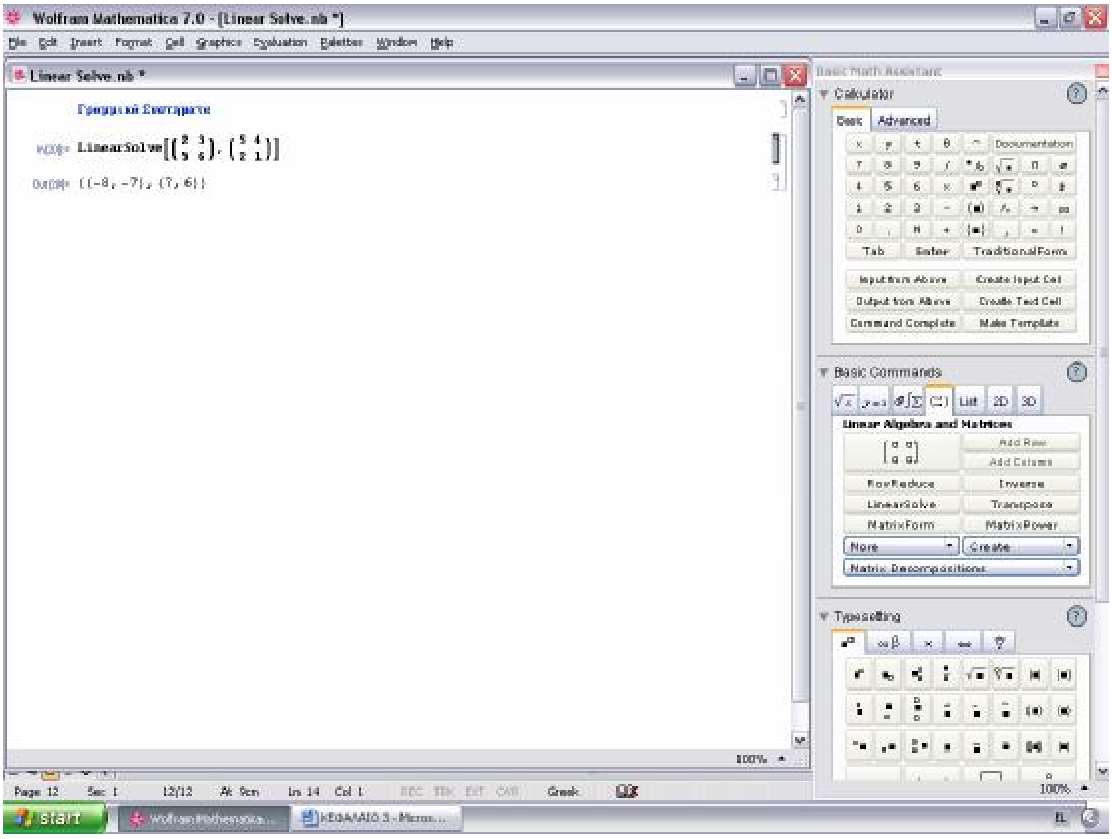
Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

Από τη γραμμή εργαλείων Basic Commands επιλέγουμε την εντολή Inverse[matrix] η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή Matrix, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα 2x2, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές Add Row και Add Column. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Ο πίνακας ο οποίος θα δημιουργήσουμε θα πρέπει να είναι τετραγωνικός αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων Shift+Enter το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



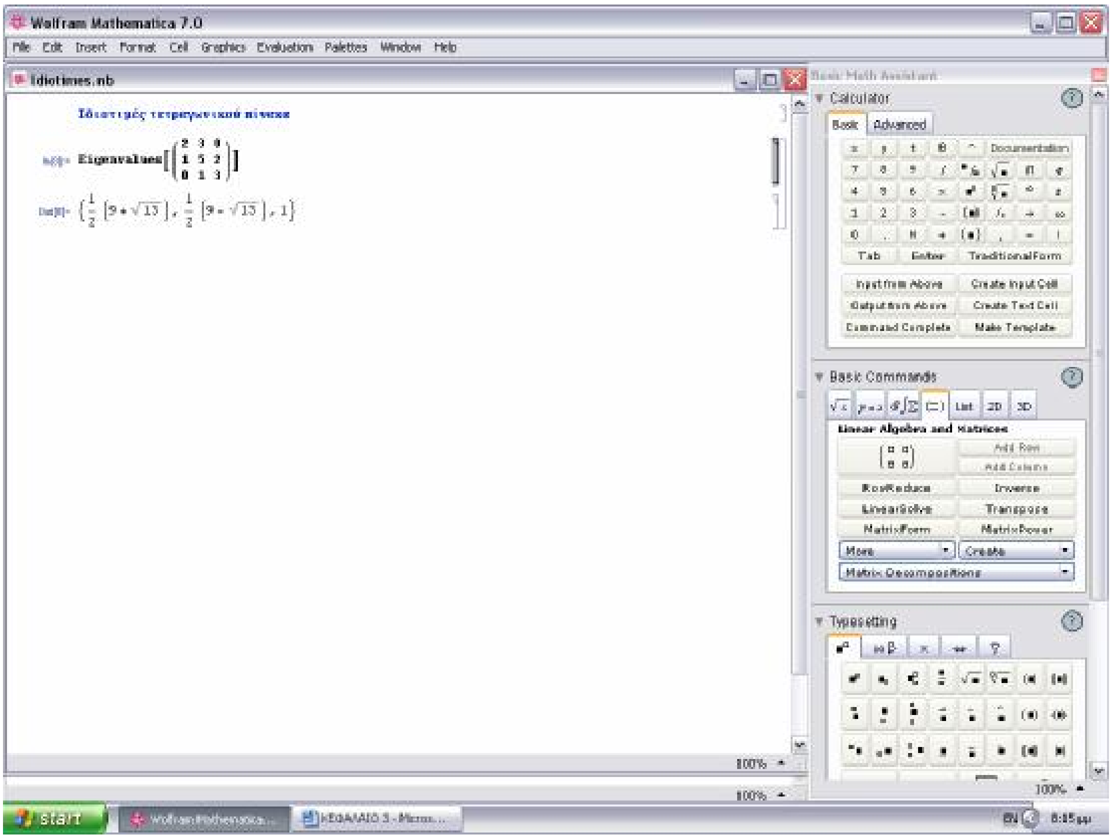
Υπολογισμός γραμμικών συστημάτων

Από τη γραμμή εργαλείων Basic Commands επιλέγουμε την εντολή LinearSolve[matrix,vector] η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή Matrix, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα 2x2, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές Add Row και Add Column. Όταν διαμορφώσουμε και τους δυο πίνακες που χρειάζεται η εντολή εισάγουμε τα δεδομένα μας. Οι πίνακες πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων Shift+Enter το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



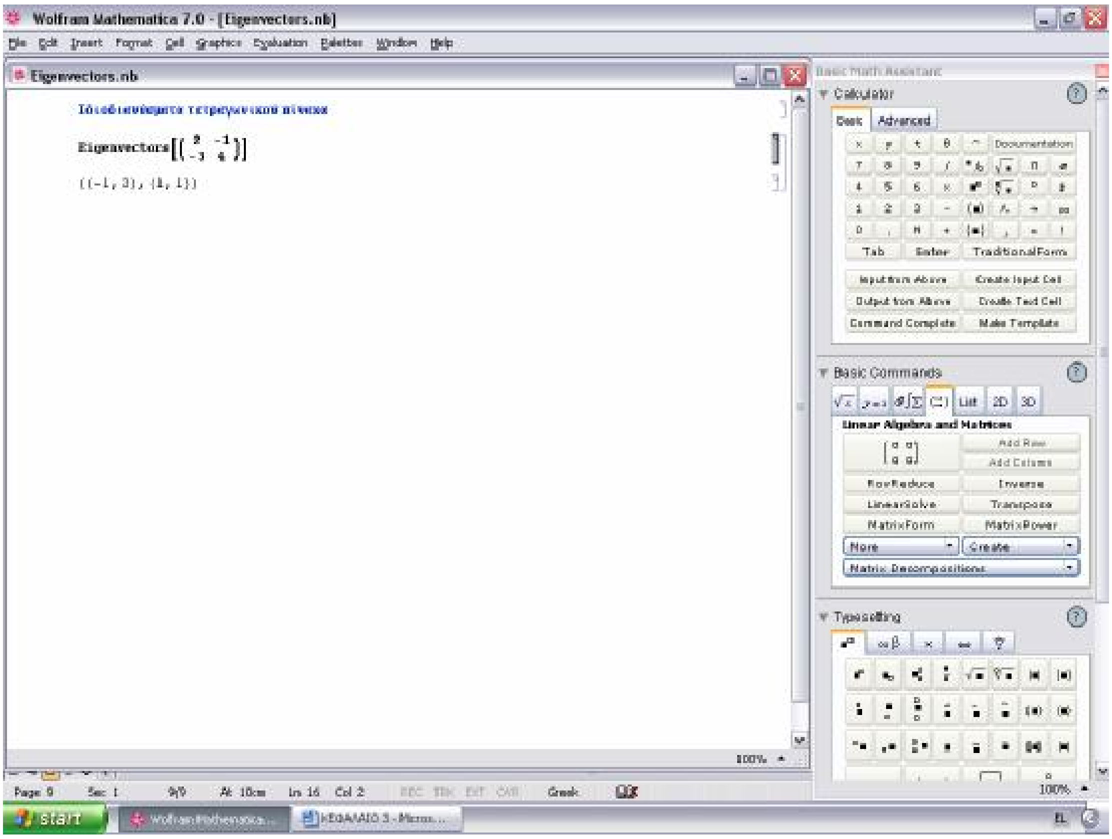
Υπολογισμός Ιδιοτιμών τετραγωνικού πίνακα

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `Eigensystem[matrix]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



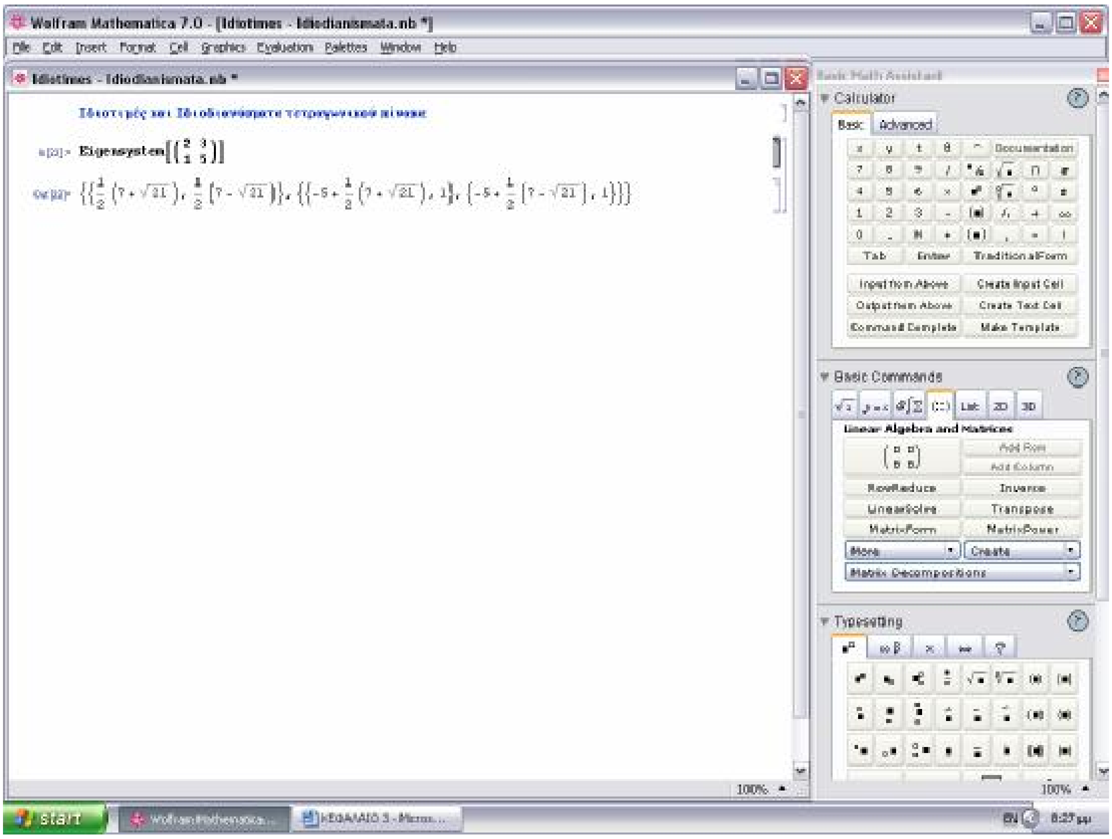
Υπολογισμός Ιδιοδιανυσμάτων τετραγωνικού πίνακα

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `Eigenvectors[matrix]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



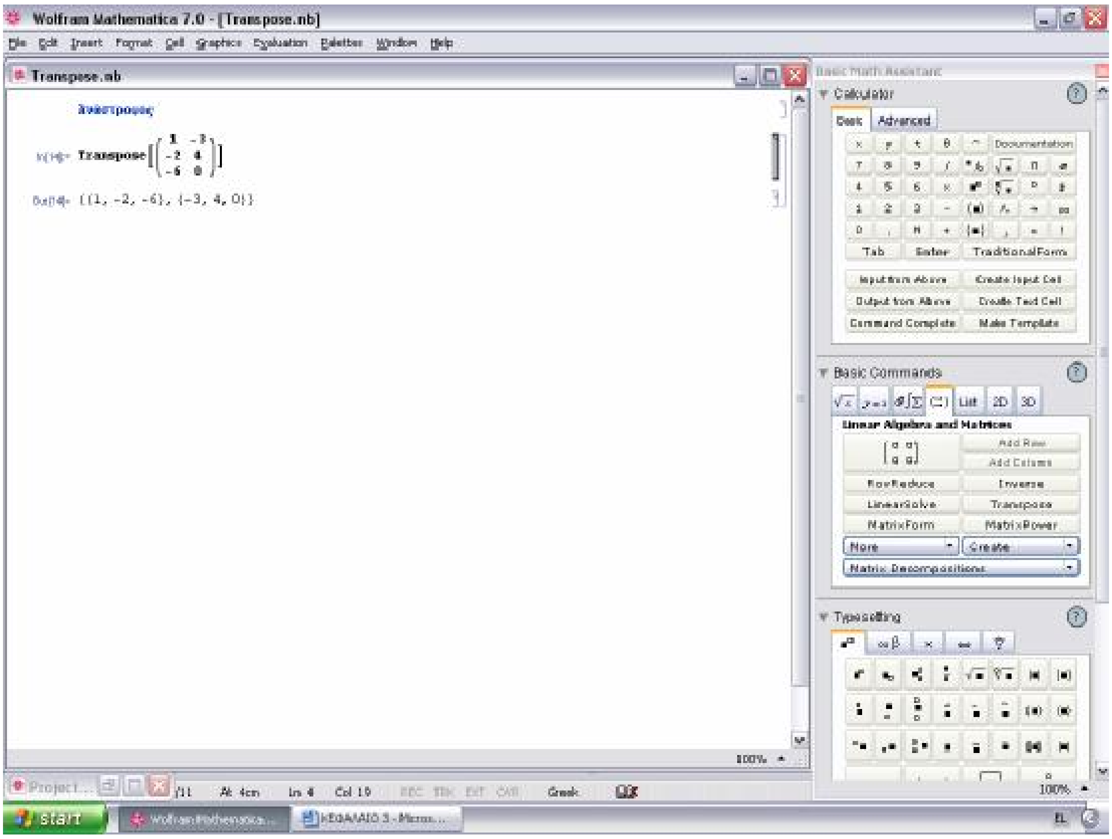
Υπολογισμός Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων τετραγωνικού πίνακα

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `Eigensystem[matrix]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης. Η παρούσα εντολή μας δίνει τα ίδια αποτελέσματα με τις δυο πάρα πάνω εντολές μαζί. Μας δίνει και τις Ιδιοτιμές αλλά και τα Ιδιοδιανύσματα του τετραγωνικού πίνακα.



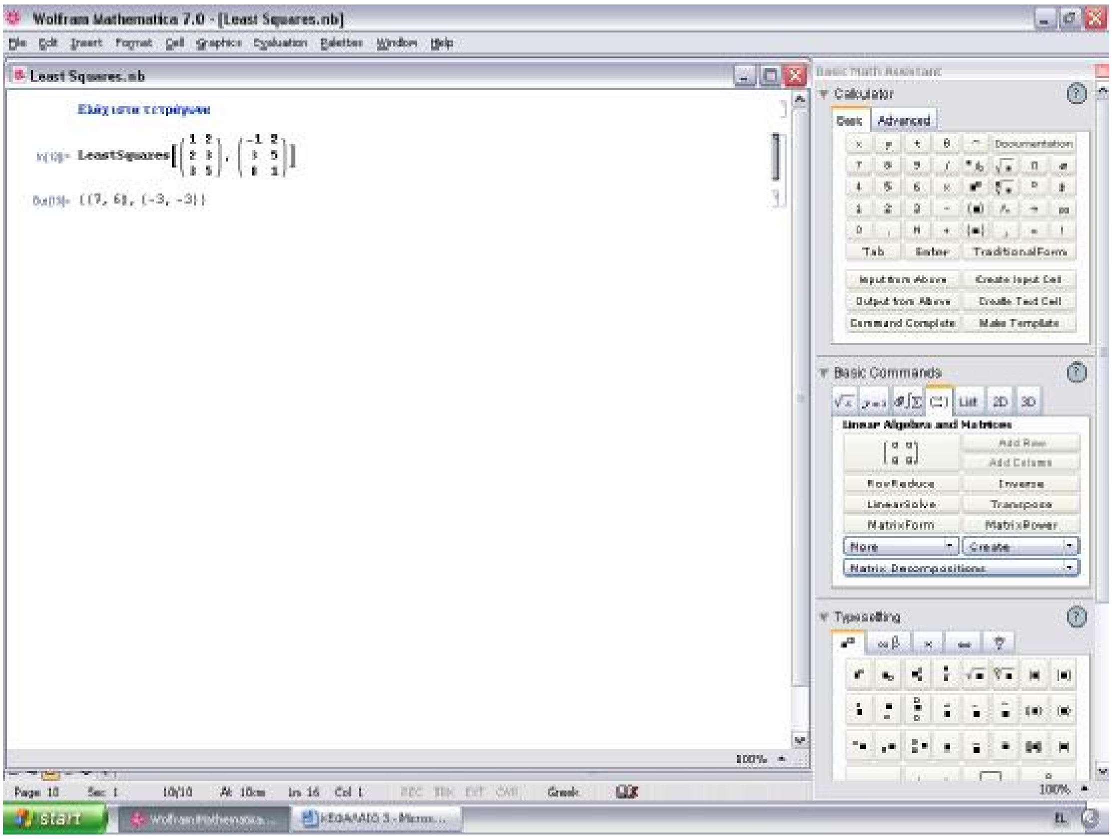
Υπολογισμός ανάστροφου πίνακα

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `Transpose[matrix]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



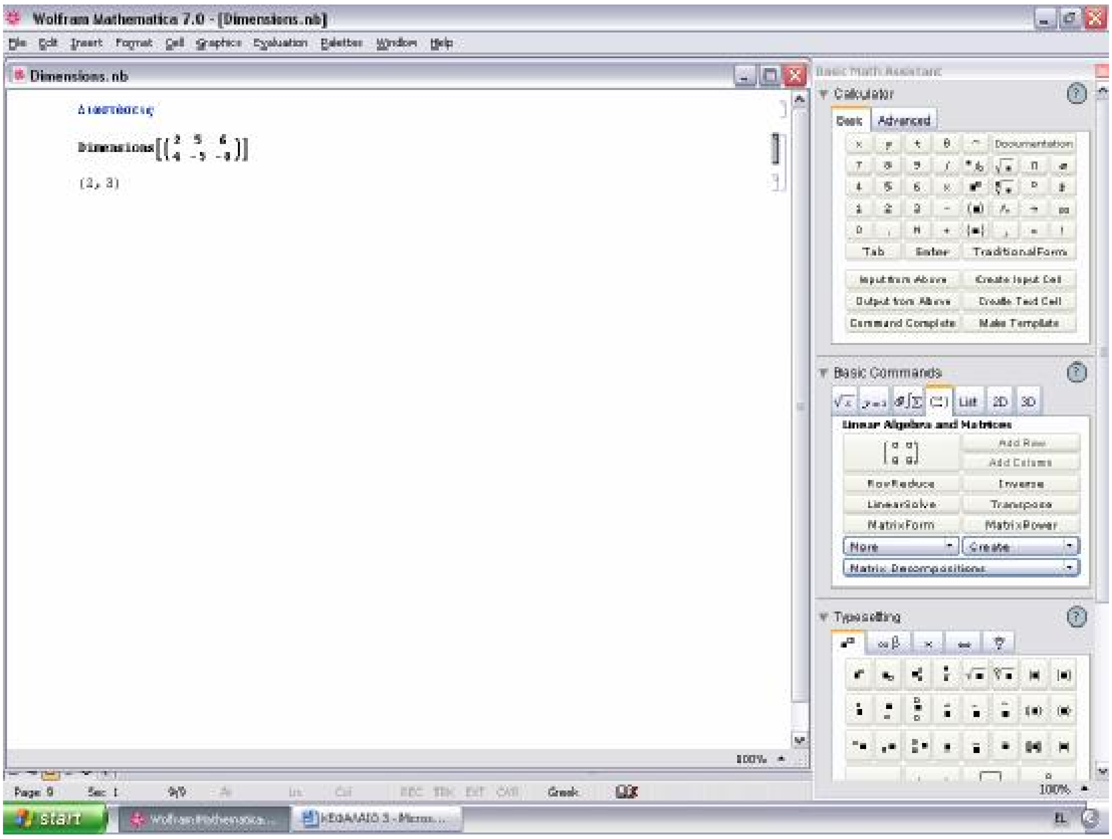
Υπολογισμός ελαχίστων τετραγώνων

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `LeastSquares[matrix,vector]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Όταν διαμορφώσουμε και τους δυο πίνακες εισάγουμε τα δεδομένα μας. Οι πίνακες πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



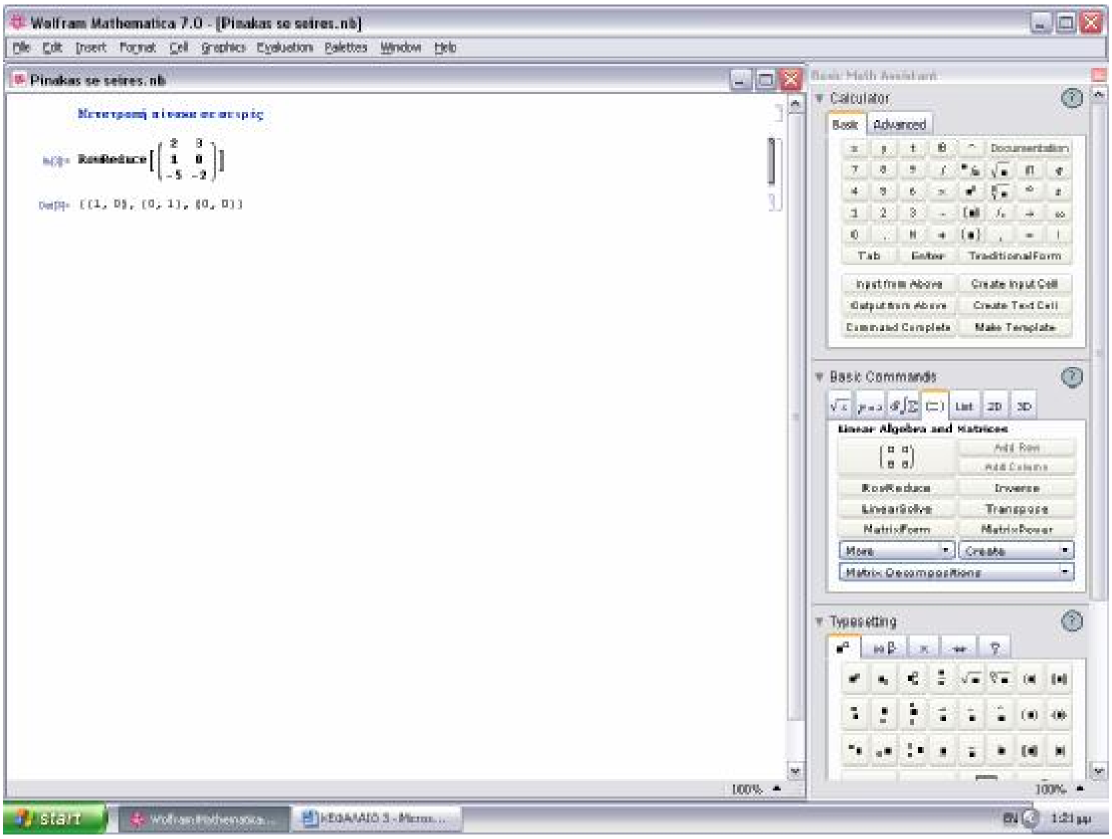
Υπολογισμός διαστάσεων πίνακα

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `Dimensions[matrix]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



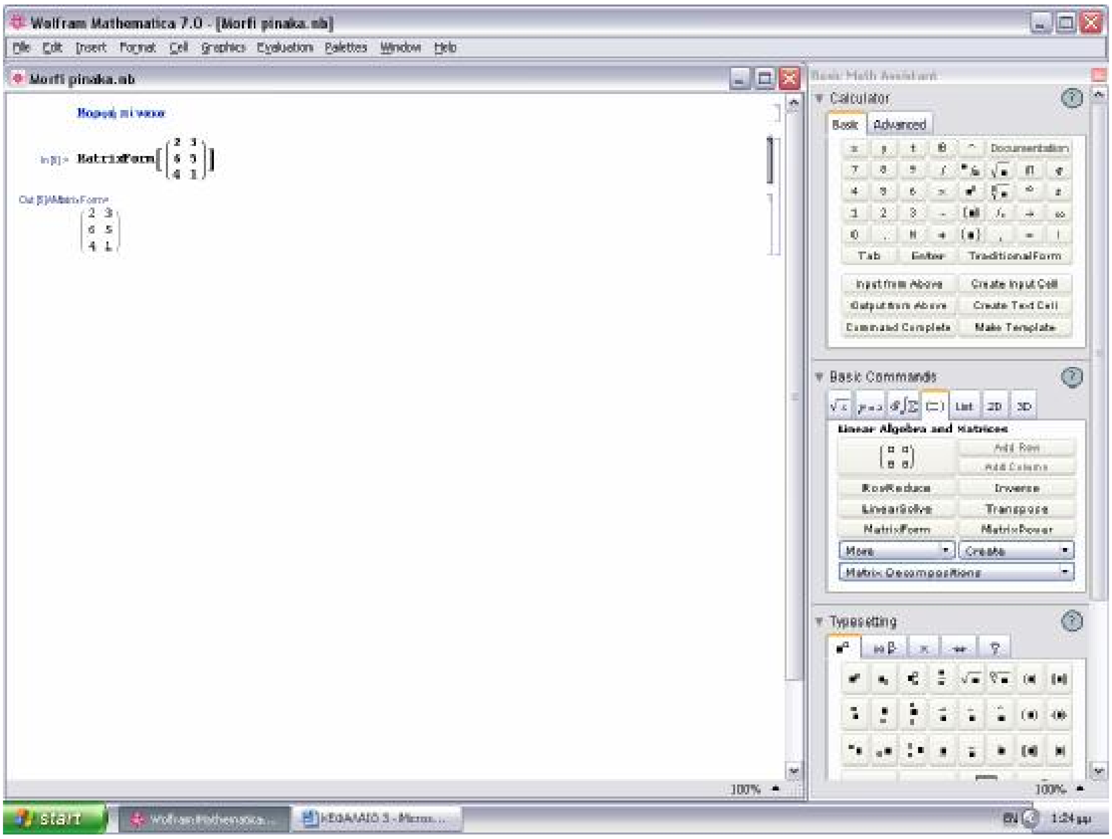
Μετατροπή πίνακα σε σειρές

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `RowReduce[matrix]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης. Η εντολή `RowReduce[matrix]` προσθέτει πολλαπλάσια των σειρών μαζί έτσι ώστε να παράγει στοιχεία μηδέν, όταν είναι δυνατόν.



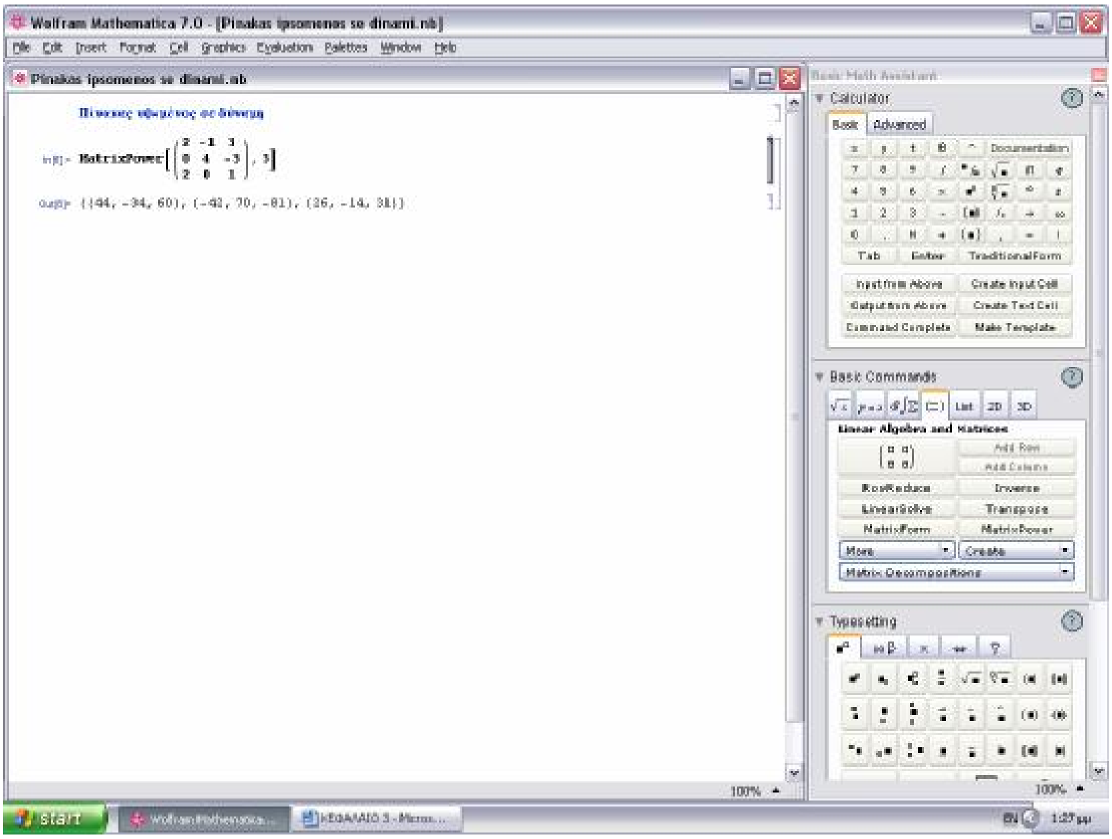
Εύρεση μορφής πίνακα

Από τη γραμμή εργαλείων Basic Commands επιλέγουμε την εντολή MatrixForm[matrix] η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή Matrix, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα 2x2, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές Add Row και Add Column. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων Shift+Enter το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



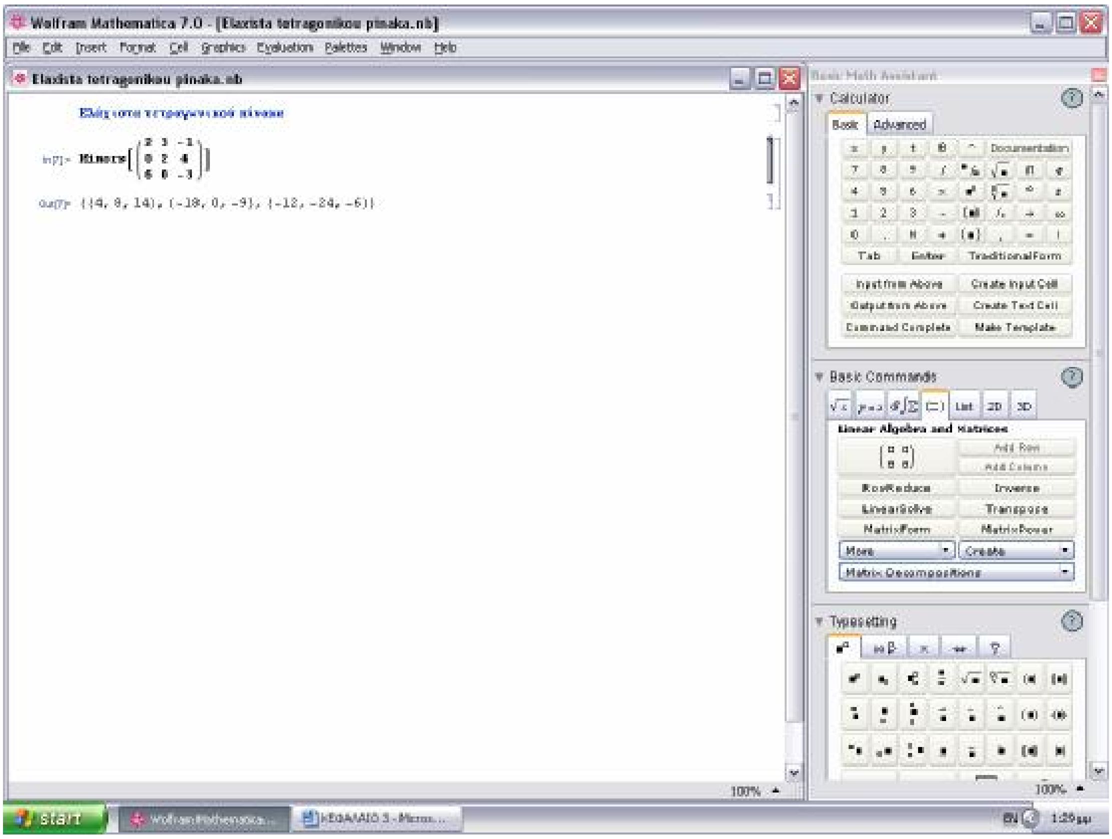
Υπολογισμός τετραγωνικού πίνακα υψωμένου σε δύναμη

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `MatrixPower[square matrix,number]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Ο πίνακας ο οποίος θα δημιουργήσουμε θα πρέπει να είναι τετραγωνικός αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



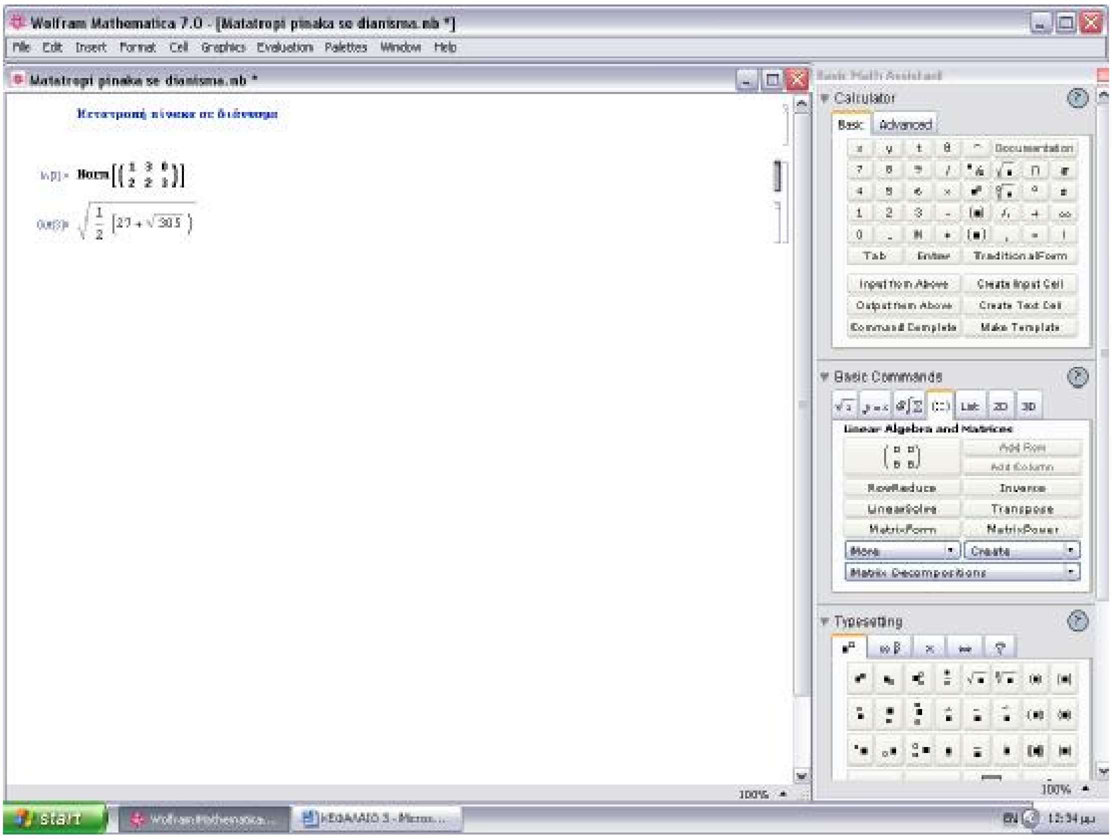
Υπολογισμός ελαχίστων τετραγωνικού πίνακα

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `Minors[matrix]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Ο πίνακας ο οποίος θα δημιουργήσουμε θα πρέπει να είναι τετραγωνικός αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



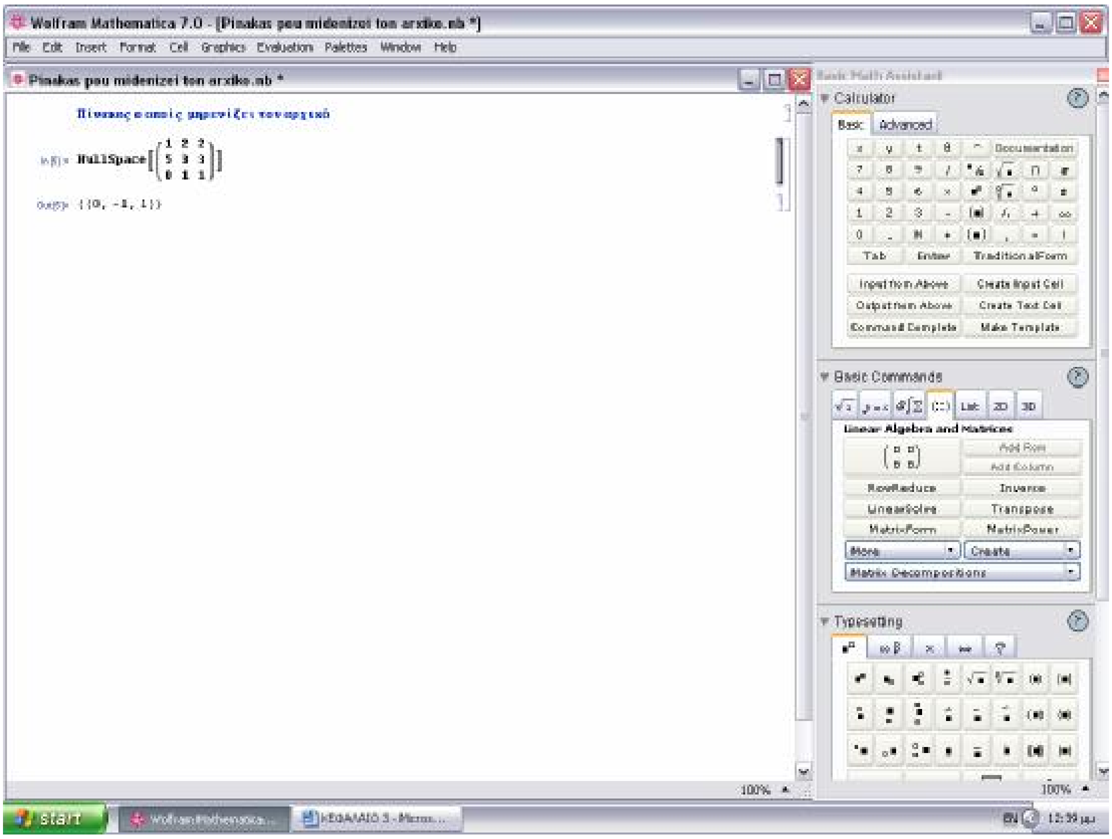
Μετατροπή πίνακα σε διάνυσμα

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `Norm[matrix]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



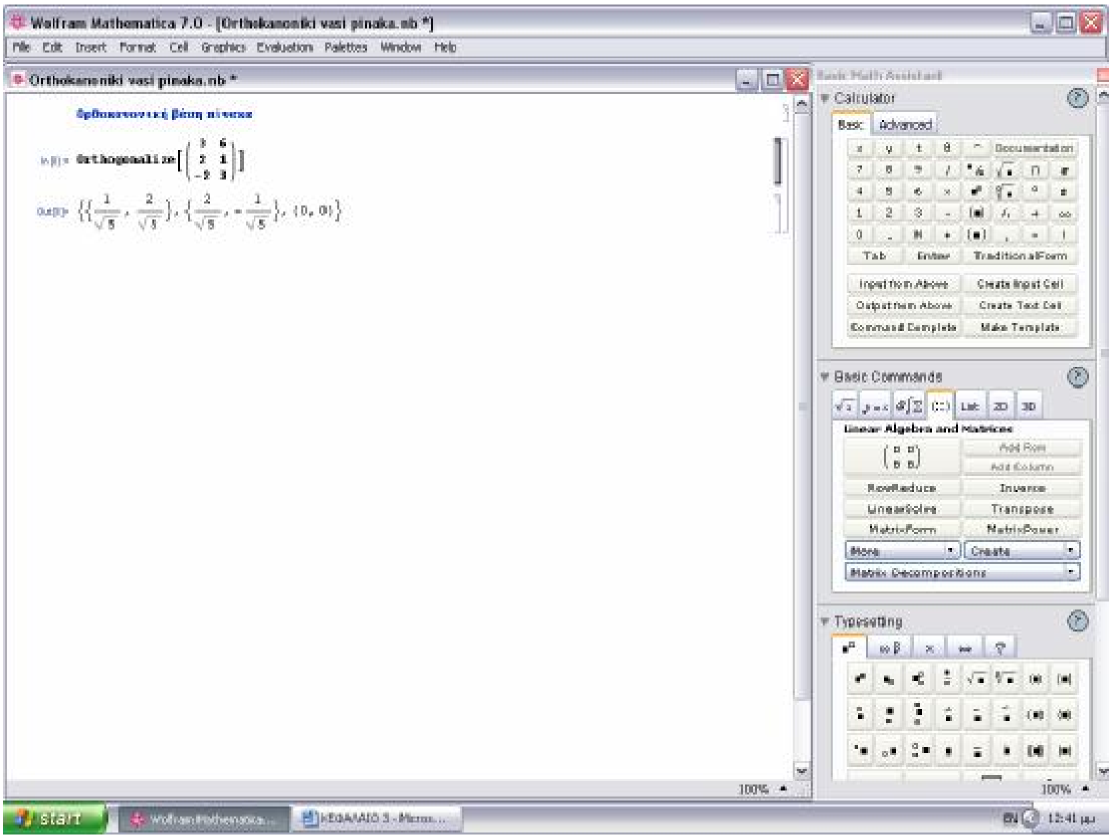
Υπολογισμός του πίνακα ο οποίος μηδενίζει τον αρχικό μας πίνακα

Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `NullSpace[matrix]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Ο πίνακας ο οποίος θα δημιουργήσουμε θα πρέπει να έχει αριθμό σειρών μεγαλύτερο από τη τάξη του πίνακα, αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



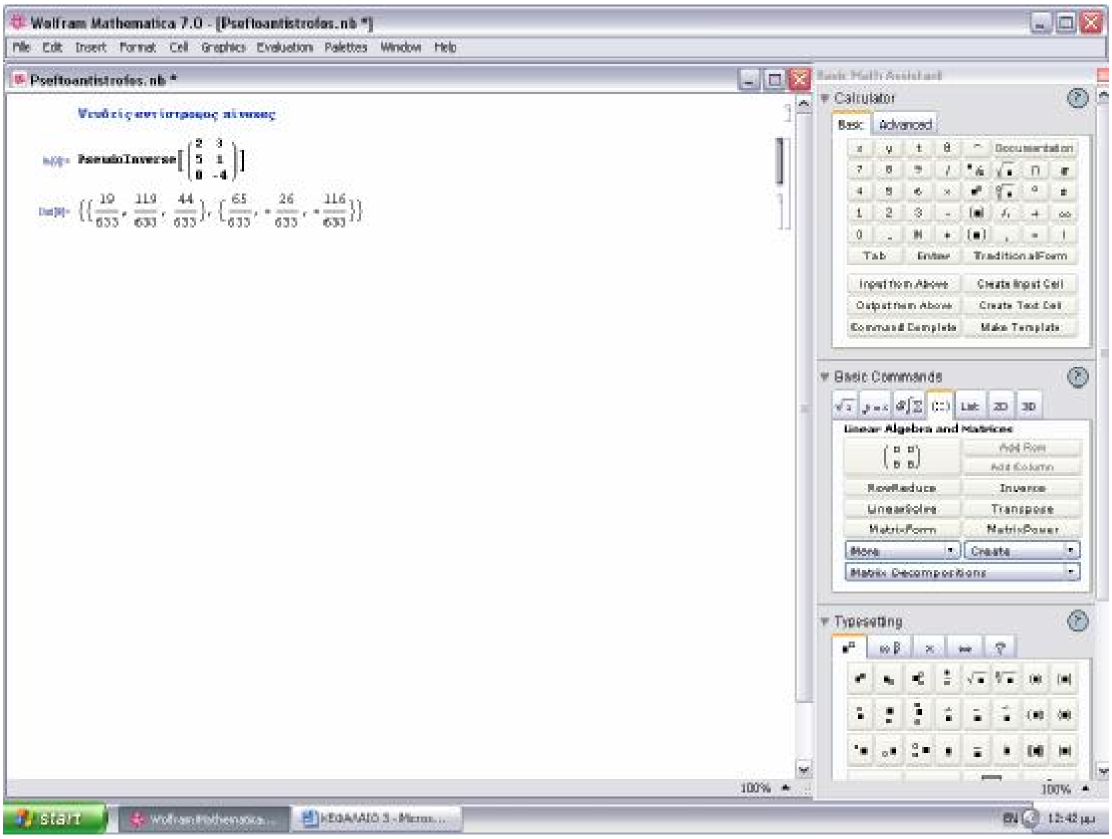
Εύρεση ορθοκανονικής βάσης πίνακα

Από τη γραμμή εργαλείων Basic Commands επιλέγουμε την εντολή Orthogonalize[matrix] η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή Matrix, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα 2x2, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές Add Row και Add Column. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων Shift+Enter το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης.



Υπολογισμός ψευδούς αντίστροφου πίνακα

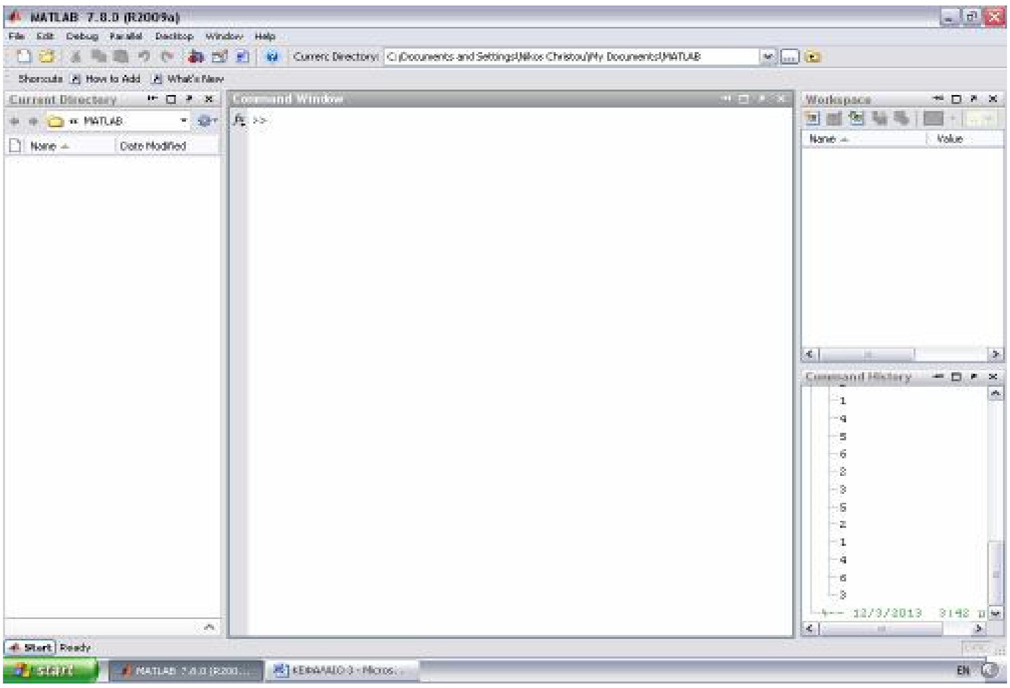
Από τη γραμμή εργαλείων `Basic Commands` επιλέγουμε την εντολή `PseudoInverse[matrix]` η οποία εμφανίζεται στο αριστερό παράθυρο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την εντολή `Matrix`, η οποία εισάγει τετραγωνικό πίνακα `2x2`, τον οποίο μπορούμε να διαμορφώσουμε με τις εντολές `Add Row` και `Add Column`. Όταν διαμορφώσουμε τον πίνακα που επιθυμούμε εισάγουμε τα δεδομένα μας. Τέλος στο παράθυρο το οποίο βρίσκεται η εντολή μας, στο δεξί άκρο, βρίσκεται μια αγκύλη για κάθε ενέργεια ή εντολή που έχουμε εισάγει. Επιλέγουμε την αγκύλη της εντολής που θέλουμε να τρέξουμε και στη συνέχεια πατώντας το συνδυασμό των πλήκτρων `Shift+Enter` το πρόγραμμα μας επιστρέφει το αποτέλεσμα της πράξης. Η εντολή `PseudoInverse[matrix]` μας δίνει τον αντίστροφο ανεξαρτήτως αν ο πίνακας μας είναι τετραγωνικός ή όχι. Στην περίπτωση που ο πίνακας είναι τετραγωνικός τότε το αποτέλεσμα που δίνει είναι το ίδιο με της εντολής `Inverse[matrix]`.



3.3 Matlab

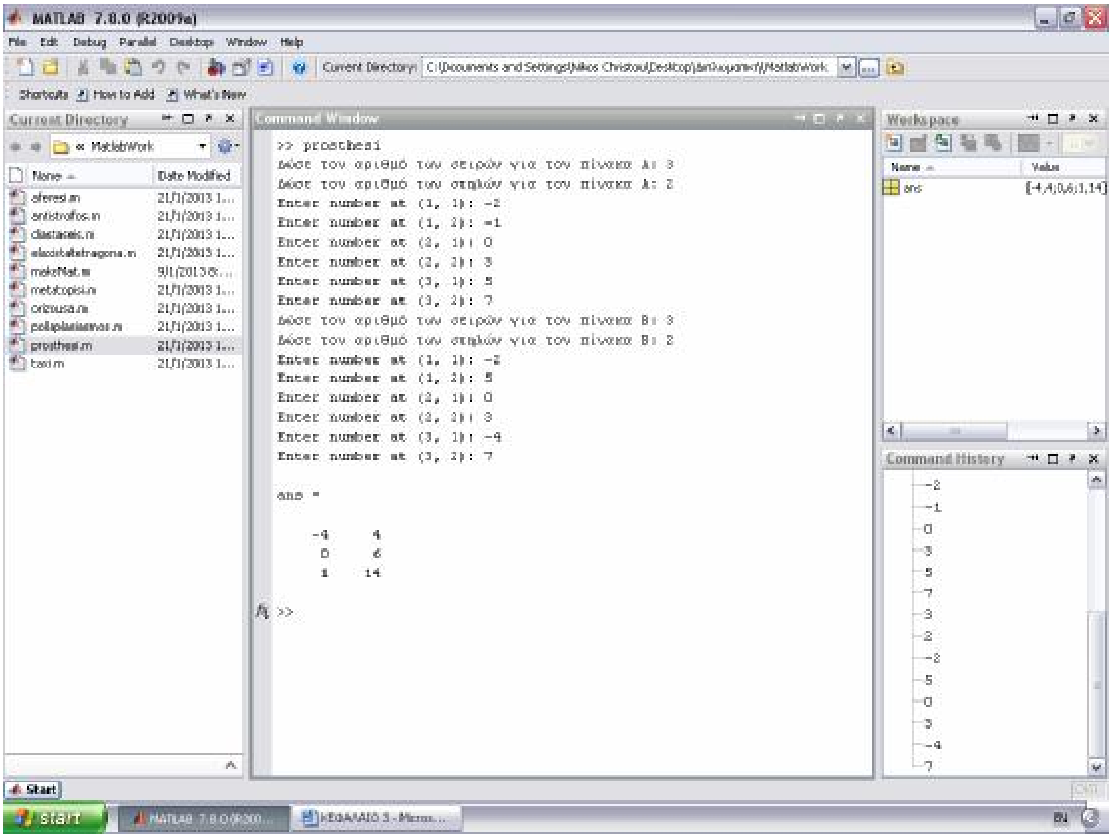
Από το μενού του προγράμματος επιλέγουμε: Desktop/Command Window και Desktop/Current Directory. Αυτές τις δυο καρτέλες θα χρειαστούμε ως επί το πλείστον για να τρέξουμε τα προγράμματα μας. Ένας άλλος τρόπος είναι να πάμε μέσω του μενού του προγράμματος και να επιλέξουμε απευθείας Desktop/Desktop Layout/Default. Αυτή η ρύθμιση ενεργοποιεί όλες τις πάρα πάνω και επιπλέον δυο καρτέλες. Τις καρτέλες Workspace και Command History.

Αφότου προετοιμάσουμε το πρόγραμμα μας, μέσω της εντολής Current Directory, επιλέγουμε το φάκελο στον οποίο έχουμε τα προγράμματα τα οποία έχουμε δημιουργήσει στο Matlab. Στο αριστερό παράθυρο εμφανίζονται τα προγράμματα τα οποία βρίσκονται μέσα στο φάκελο. Για κάθε πράξη έχουμε δημιουργήσει και ένα διαφορετικό πρόγραμμα. Το πρόγραμμα makeMad έχει δημιουργηθεί ούτος ώστε να τρέχει μέσω των υπολοίπων προγραμμάτων για τη δημιουργία πίνακα. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των γραμμών στη συνέχεια των στηλών και τέλος μας ζητά να δώσουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μέσα στο πρόγραμμα έχουν ενσωματωθεί σχόλια τα οποία μας καθοδηγούν για κάθε ένα από αυτά τα βήματα. Για να τρέξουμε κάποιο πρόγραμμα δίνουμε ως εντολή στο Command Window την ονομασία του προγράμματος. Η εντολή που θα δώσουμε θα πρέπει να είναι ακριβώς γραμμένη όπως και τα προγράμματα μας, αλλιώς το Matlab δεν θα μπορέσει να την αναγνωρίσει και ως εκ τούτου δεν θα την εκτελέσει.



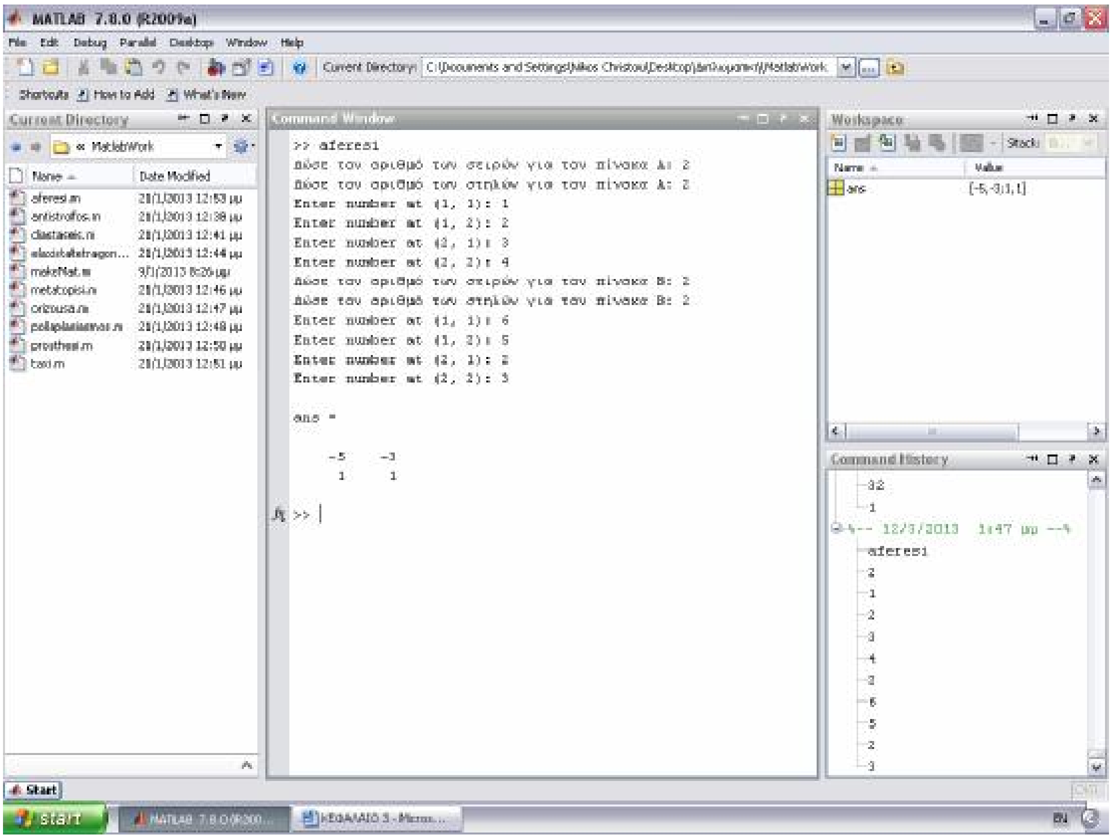
Πρόσθεση πινάκων

Γράφοντας την εντολή `prosthesi` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μέσω του βοηθητικού προγράμματος `makeMad` μας ζητά να δώσουμε στοιχεία για τον πίνακα τον οποίο θέλουμε να δημιουργήσει. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των σειρών και αφότου τον δώσουμε και πατήσουμε `Enter` μας ζητά και τον αριθμό των στηλών. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δημιουργήσουμε το πρώτο πίνακα η διαδικασία επαναλαμβάνεται ούτος ώστε να δημιουργήσουμε και το δεύτερο πίνακα. Οι διαστάσεις των δύο πινάκων πρέπει να είναι ίδιες αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Όταν δημιουργήσουμε και το δεύτερο πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης.



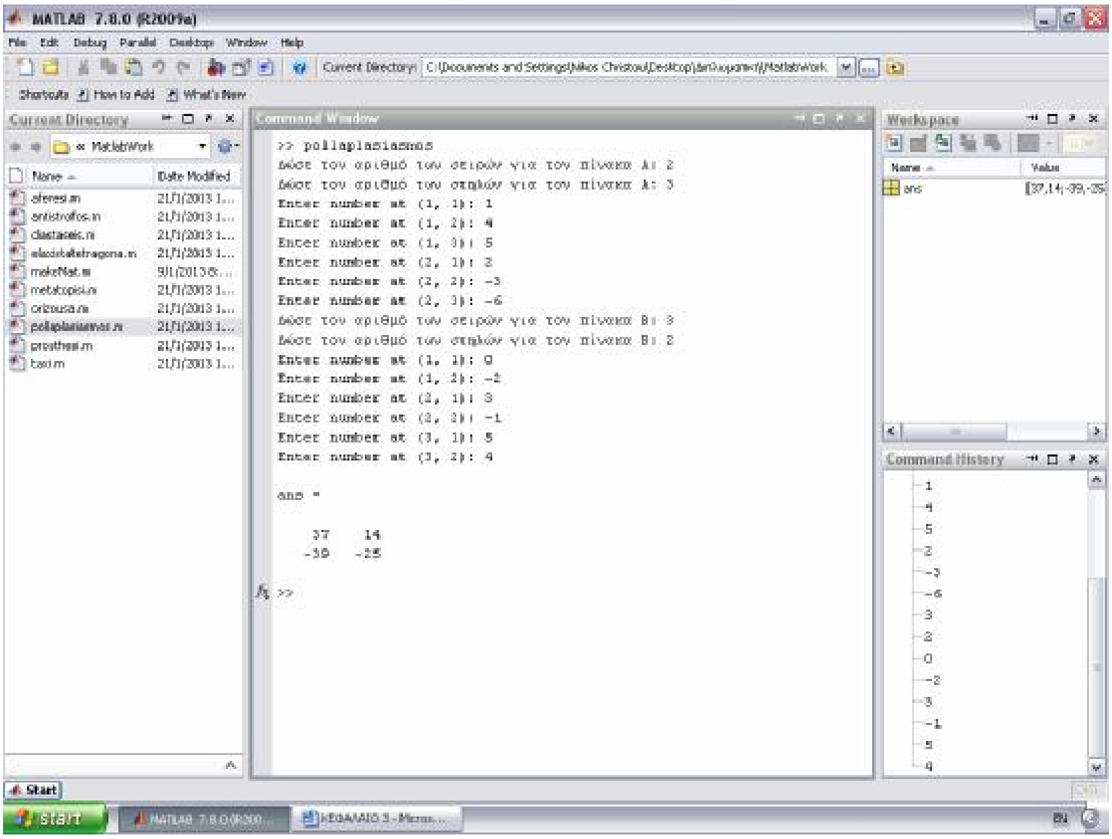
Αφαίρεση πινάκων

Γράφοντας την εντολή `aferesi` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μέσω του βοηθητικού προγράμματος `makeMad` μας ζητά να δώσουμε στοιχεία για τον πίνακα τον οποίο θέλουμε να δημιουργήσει. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των σειρών και αφότου τον δώσουμε και πατήσουμε `Enter` μας ζητά και τον αριθμό των στηλών. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δημιουργήσουμε το πρώτο πίνακα η διαδικασία επαναλαμβάνεται ούτως ώστε να δημιουργήσουμε και το δεύτερο. Οι διαστάσεις των δύο πινάκων πρέπει να είναι ίδιες αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Όταν δημιουργήσουμε και το δεύτερο πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα.



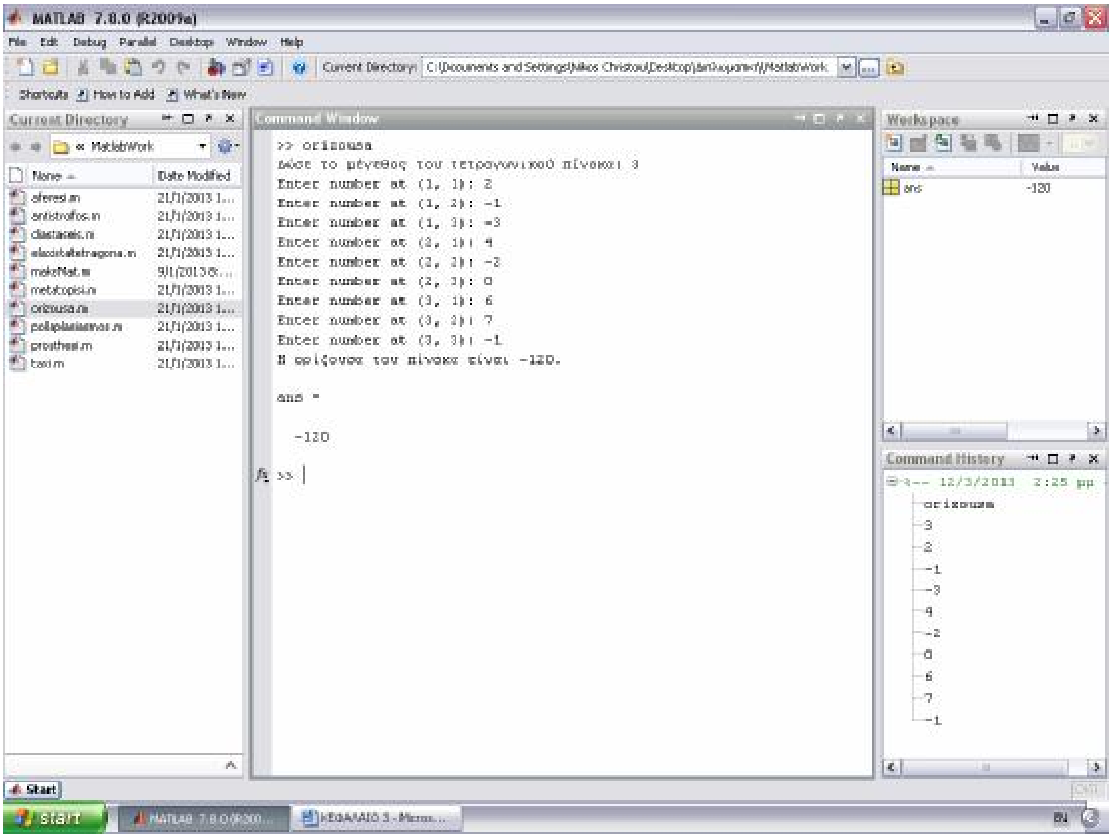
Πολλαπλασιασμός πινάκων

Γράφοντας την εντολή `pollaplasiasmos` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μέσω του βοηθητικού προγράμματος `makeMad` μας ζητά να δώσουμε στοιχεία για τον πίνακα τον οποίο θέλουμε να δημιουργήσει. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των σειρών και αφότου τον δώσουμε και πατήσουμε `Enter` μας ζητά και τον αριθμό των στηλών. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δημιουργήσουμε το πρώτο πίνακα η διαδικασία επαναλαμβάνεται ούτος ώστε να δημιουργήσουμε και το δεύτερο πίνακα. Ο αριθμός των σειρών του πρώτου πίνακα πρέπει να ισούται με τον αριθμό των στηλών του δεύτερου αλλιώς το πρόγραμμα μας δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Όταν δημιουργήσουμε και το δεύτερο πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού.



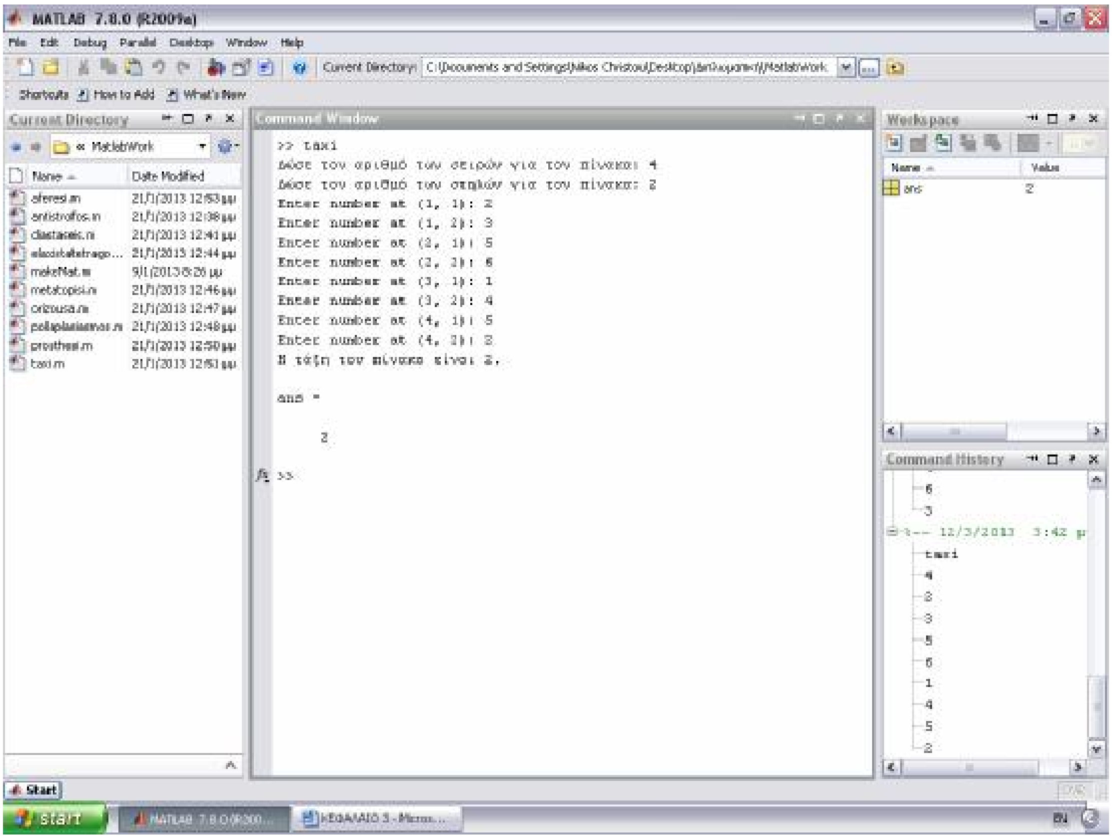
Υπολογισμός ορίζουσας

Γράφοντας την εντολή `orizousa` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μας ζήτα να εισάγουμε το μέγεθος του τετραγωνικού πίνακα που θέλουμε να υπολογίσουμε. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δημιουργήσουμε το πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα.



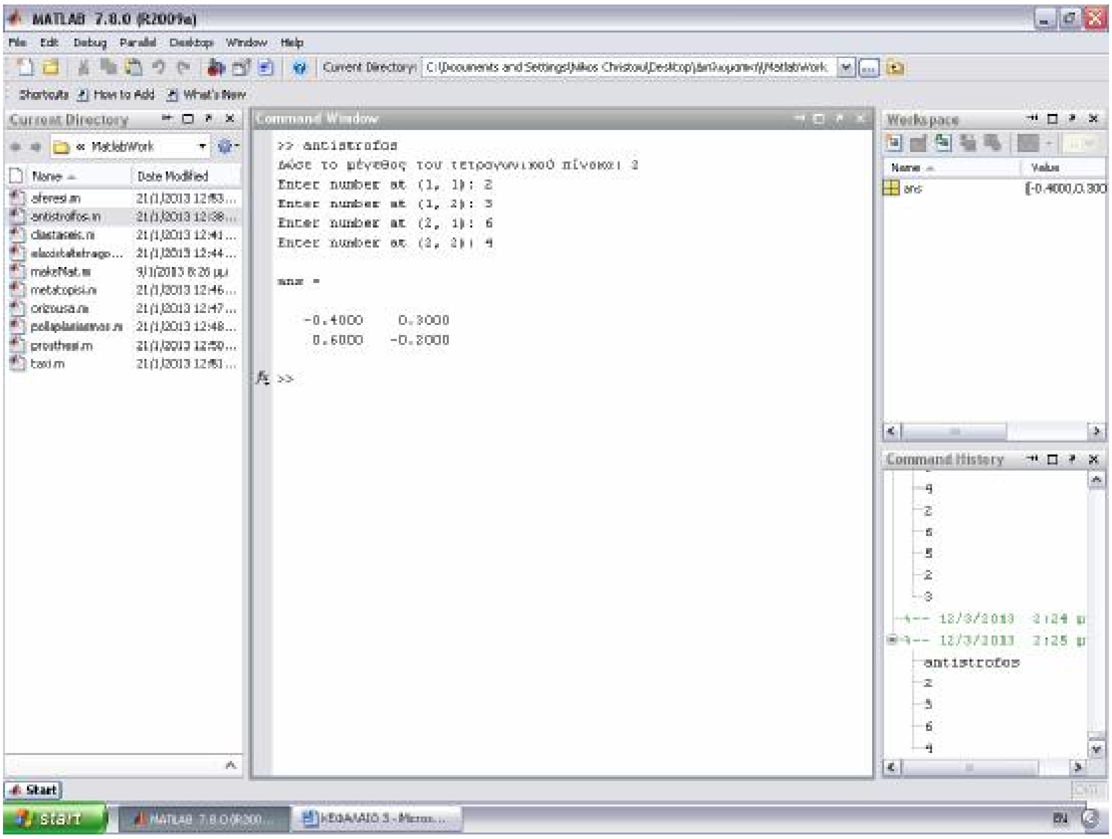
Υπολογισμός τάξης πίνακα

Γράφοντας την εντολή `taxi` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μέσω του βοηθητικού προγράμματος `makeMad` μας ζητά να δώσουμε στοιχεία για τον πίνακα τον οποίο θέλουμε να δημιουργήσει. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των σειρών και αφότου τον δώσουμε και πατήσουμε `Enter` μας ζητά και τον αριθμό των στηλών. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δημιουργήσουμε το πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα.



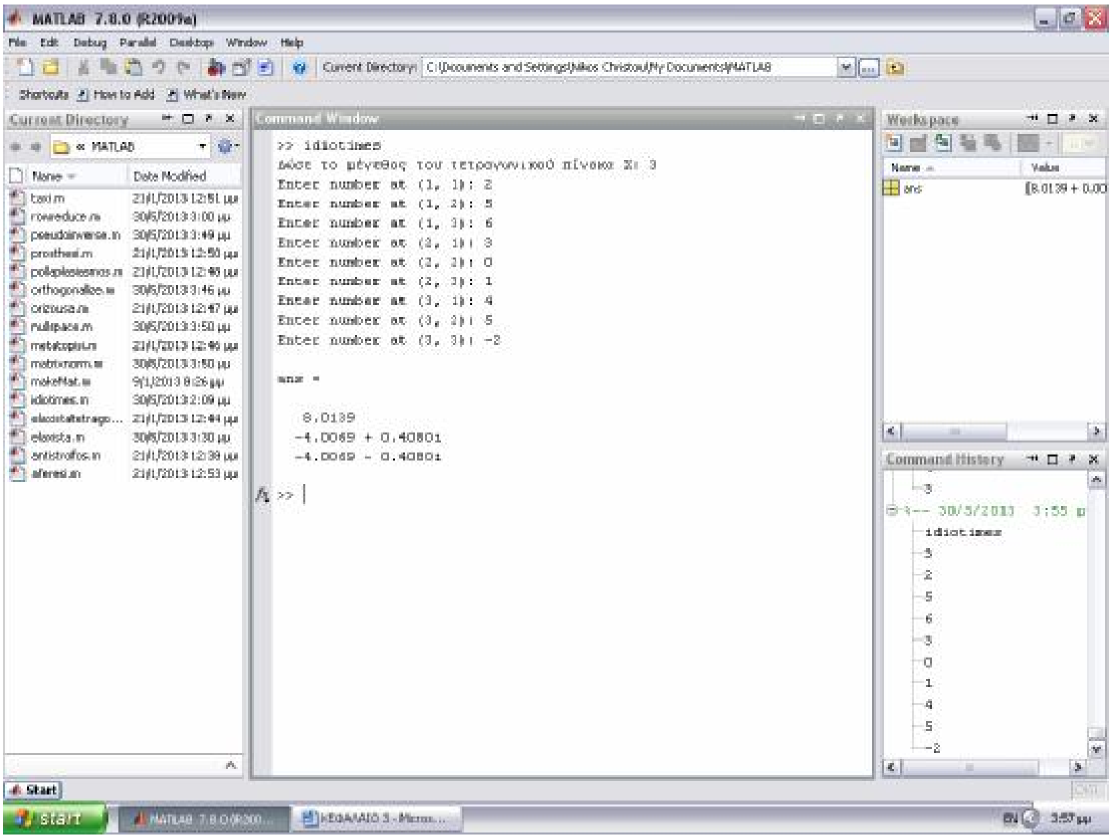
Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

Γράφοντας την εντολή `antistrofos` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μας ζήτα να εισάγουμε το μέγεθος του τετραγωνικού πίνακα που θέλουμε να υπολογίσουμε. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δημιουργήσουμε το πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα.



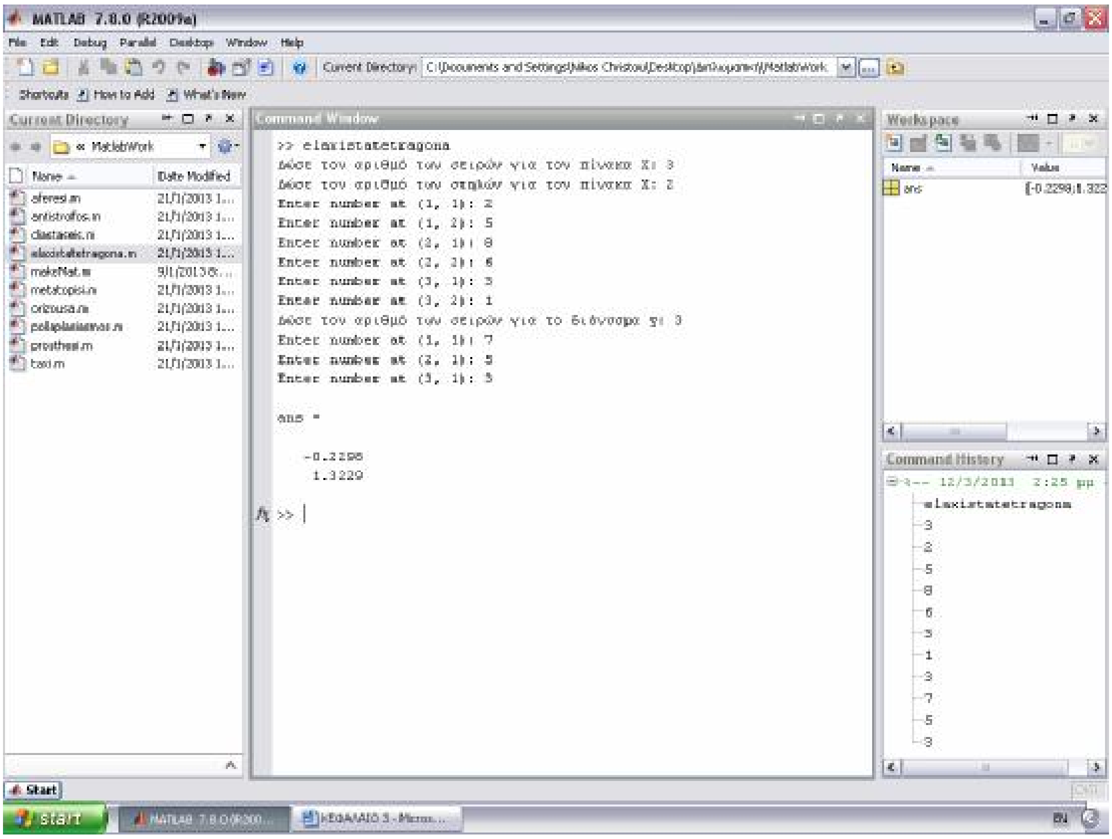
Υπολογισμός Ιδιοτιμών τετραγωνικού πίνακα

Γράφοντας την εντολή `idiotimes` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μας ζήτα να εισάγουμε το μέγεθος του τετραγωνικού πίνακα που θέλουμε να υπολογίσουμε. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δημιουργήσουμε το πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα.



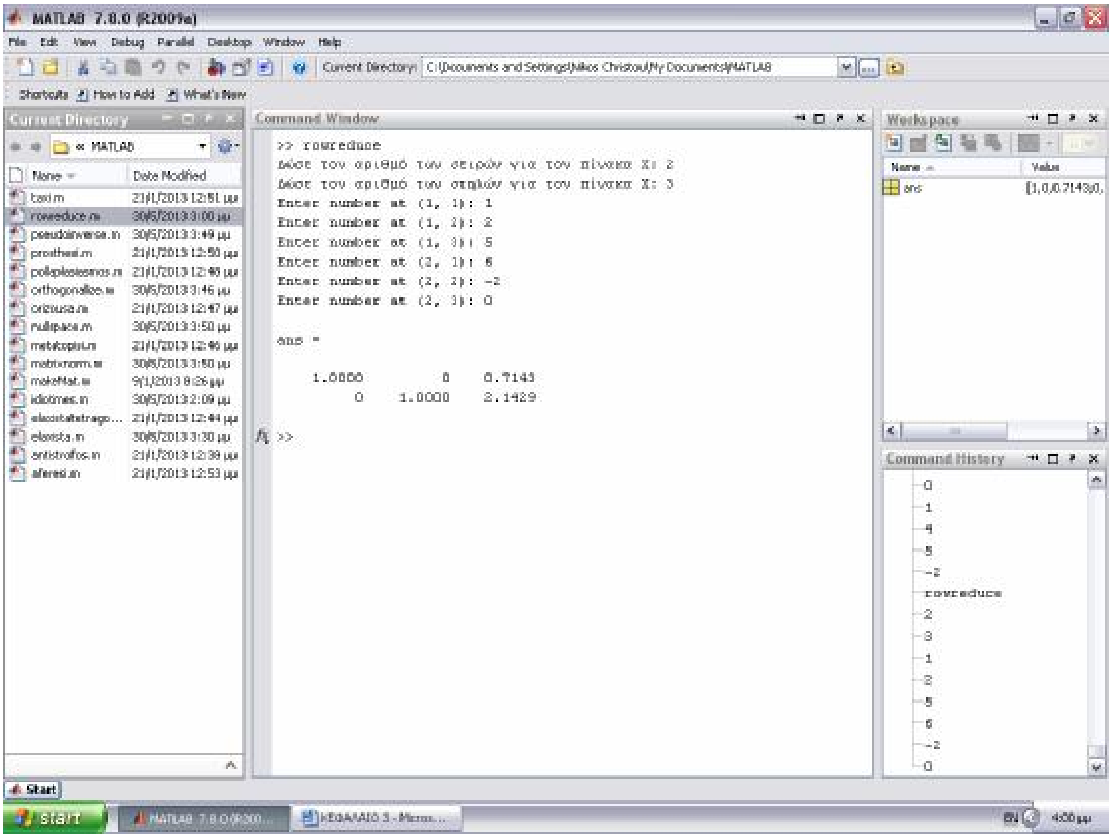
Υπολογισμός Ελαχίστων τετραγώνων

Γράφοντας την εντολή `elaxistatetragona` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μέσω του βοηθητικού προγράμματος `makeMad` μας ζητά να δώσουμε στοιχεία για τον πίνακα τον οποίο θέλουμε να δημιουργήσει. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των σειρών και αφότου τον δώσουμε και πατήσουμε `Enter` μας ζητά και τον αριθμό των στηλών. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Στη συνέχεια μας ζητείται να εισάγουμε τον αριθμό των σειρών για το διάνυσμα `y`. Οι σειρές των δύο πινάκων πρέπει να είναι ίδιες αλλιώς το πρόγραμμα δεν θα μας επιστρέψει κάποιο αποτέλεσμα. Όταν δημιουργήσουμε και το δεύτερο πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα.



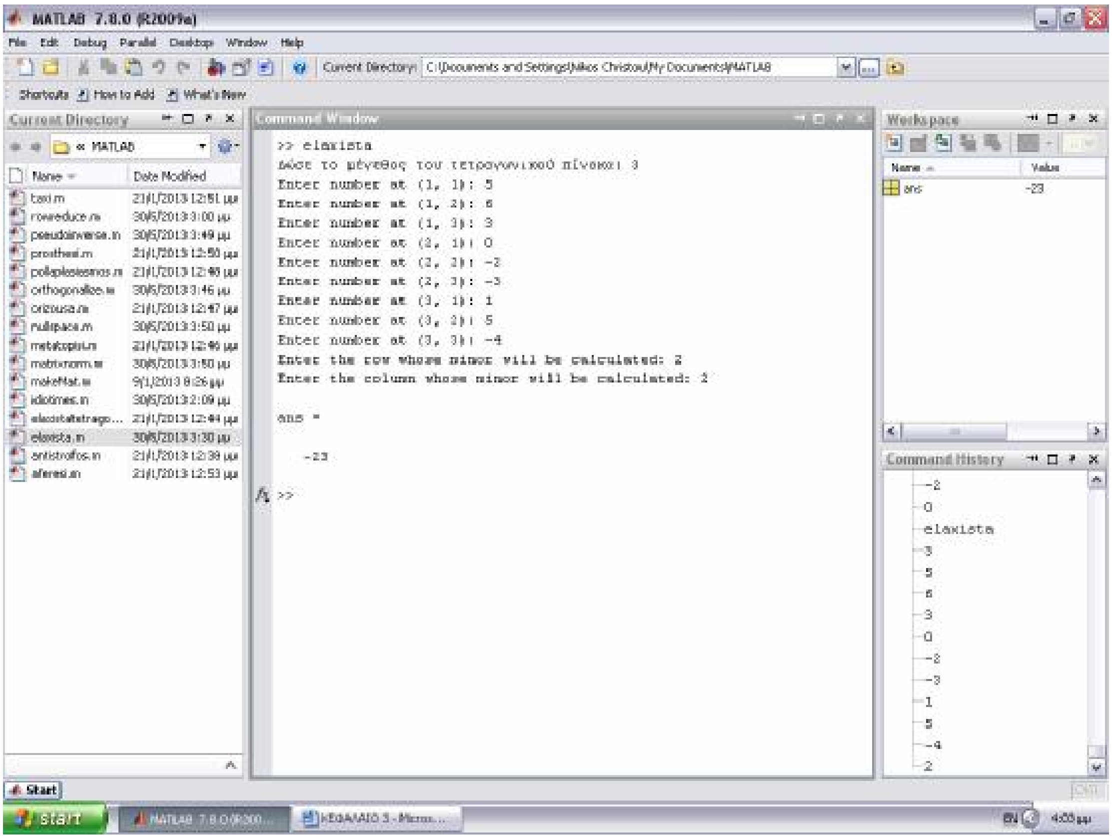
Μετατροπή πίνακα σε σειρές

Γράφοντας την εντολή `rowreduce` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μέσω του βοηθητικού προγράμματος `makeMad` μας ζητά να δώσουμε στοιχεία για τον πίνακα τον οποίο θέλουμε να δημιουργήσει. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των σειρών και αφότου τον δώσουμε και πατήσουμε `Enter` μας ζητά και τον αριθμό των στηλών. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δώσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα. Η εντολή `rowreduce` προσθέτει πολλαπλάσια των σειρών μαζί έτσι ώστε να παράγει στοιχεία μηδέν, όταν είναι δυνατόν.



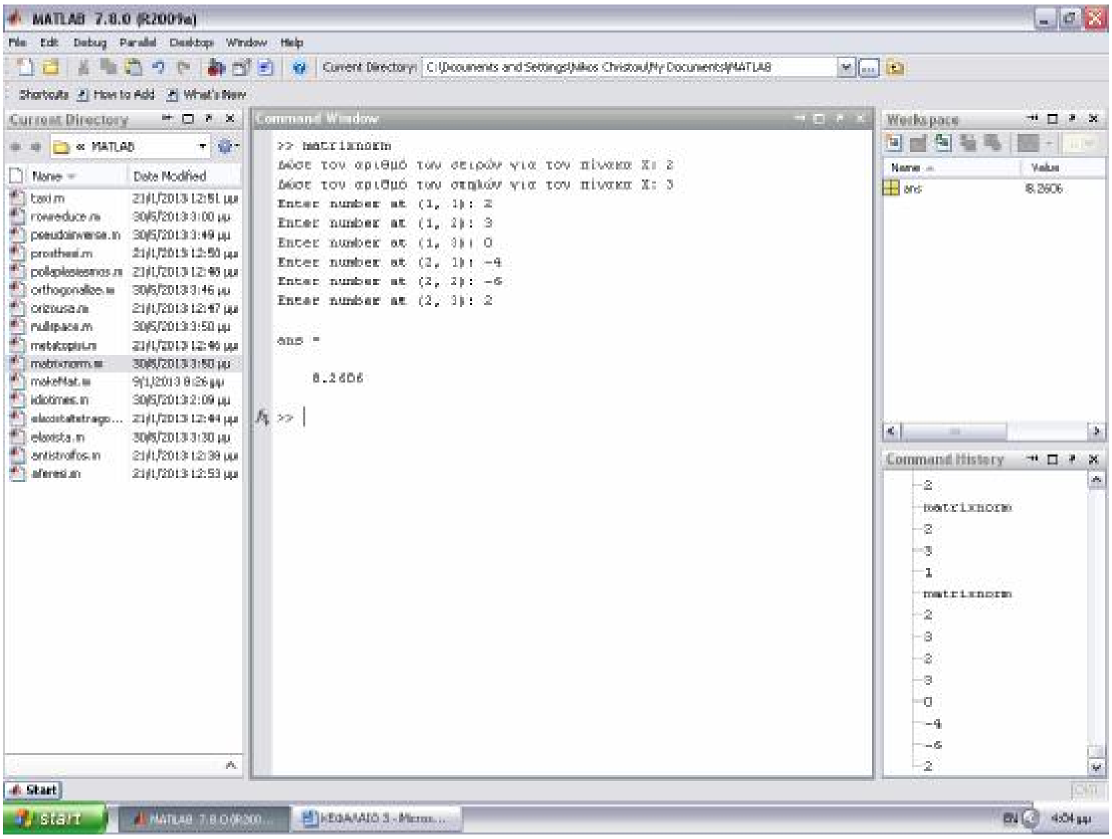
Υπολογισμός ελαχίστων τετραγωνικού πίνακα

Γράφοντας την εντολή `elaxista` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μας ζήτα να εισάγουμε το μέγεθος του τετραγωνικού πίνακα που θέλουμε να υπολογίσουμε. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Στη συνέχεια μας ζητάει να δώσουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου του οποίου θα υπολογίσουμε το ελάχιστο. Όταν δώσουμε το στοιχείο που μας ενδιαφέρει πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα.



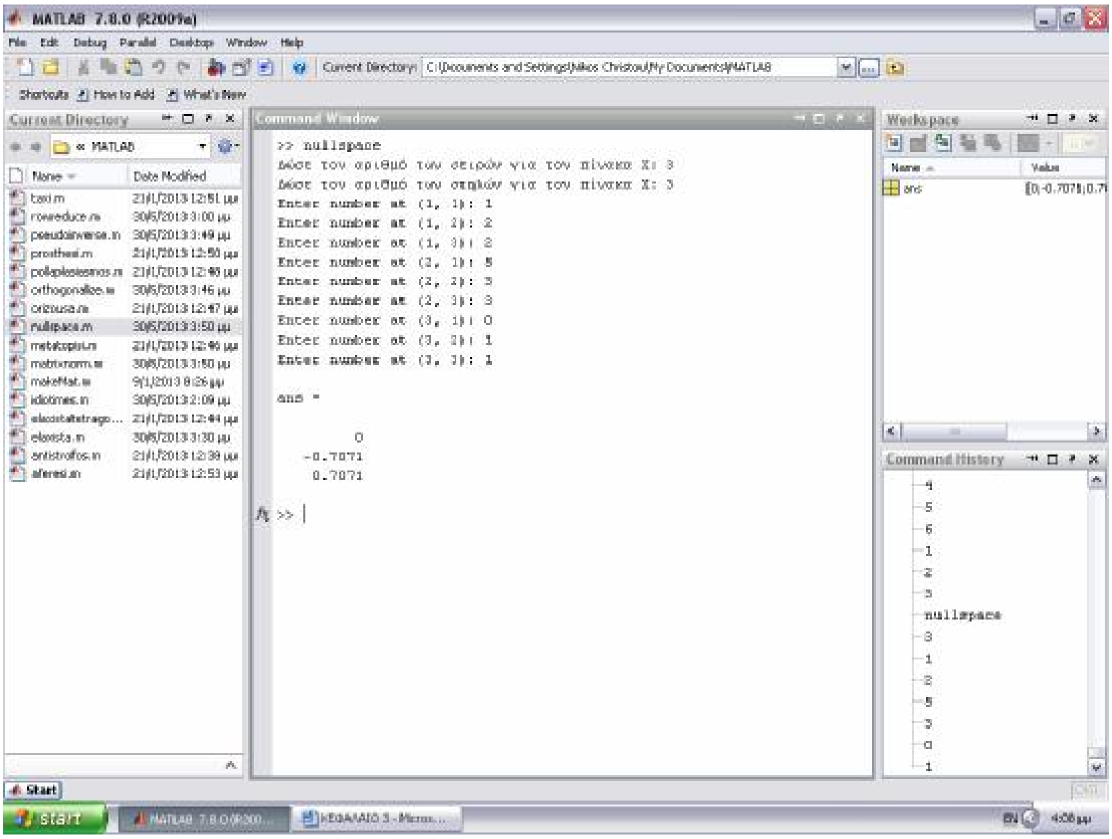
Μετατροπή πίνακα σε διάνυσμα

Γράφοντας την εντολή `matrixnorm` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μέσω του βοηθητικού προγράμματος `makeMad` μας ζητά να δώσουμε στοιχεία για τον πίνακα τον οποίο θέλουμε να δημιουργήσει. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των σειρών και αφότου τον δώσουμε και πατήσουμε `Enter` μας ζητά και τον αριθμό των στηλών. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δώσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα.



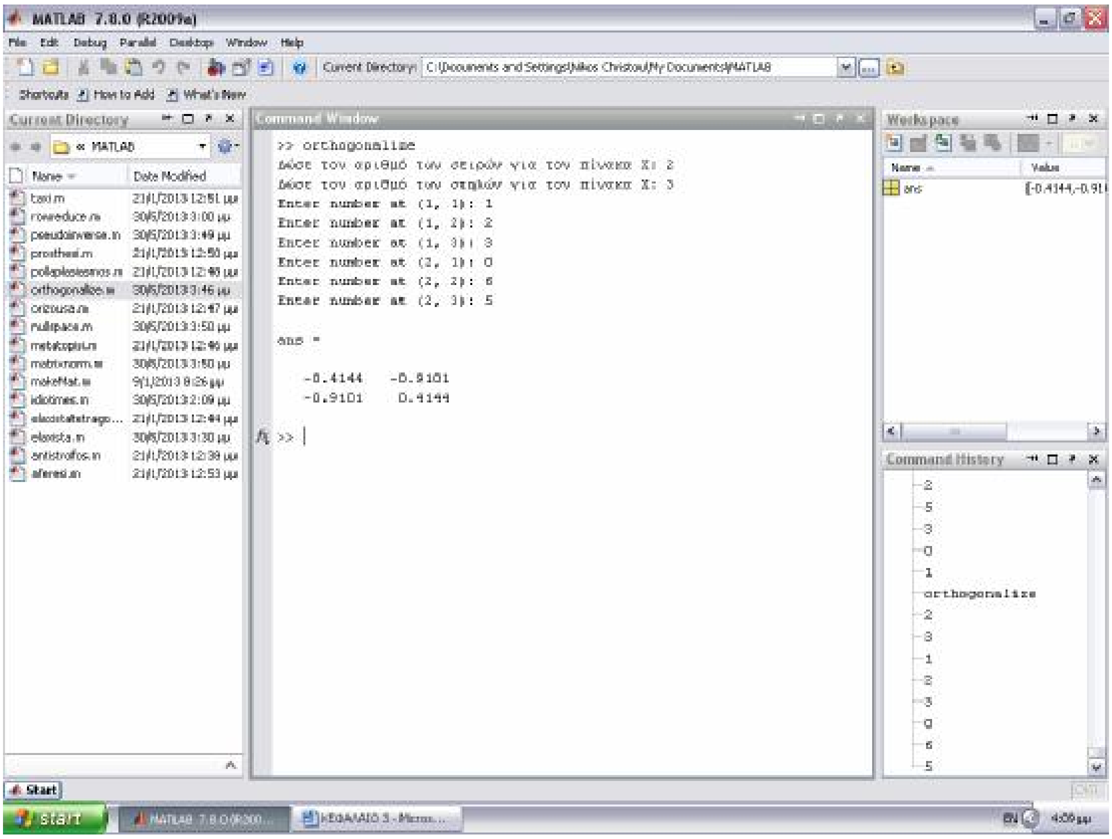
Υπολογισμός του πίνακα ο οποίος μηδενίζει τον αρχικό μας πίνακα

Γράφοντας την εντολή `nullspace` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μέσω του βοηθητικού προγράμματος `makeMad` μας ζητά να δώσουμε στοιχεία για τον πίνακα τον οποίο θέλουμε να δημιουργήσει. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των σειρών και αφότου τον δώσουμε και πατήσουμε `Enter` μας ζητά και τον αριθμό των στηλών. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δώσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα.



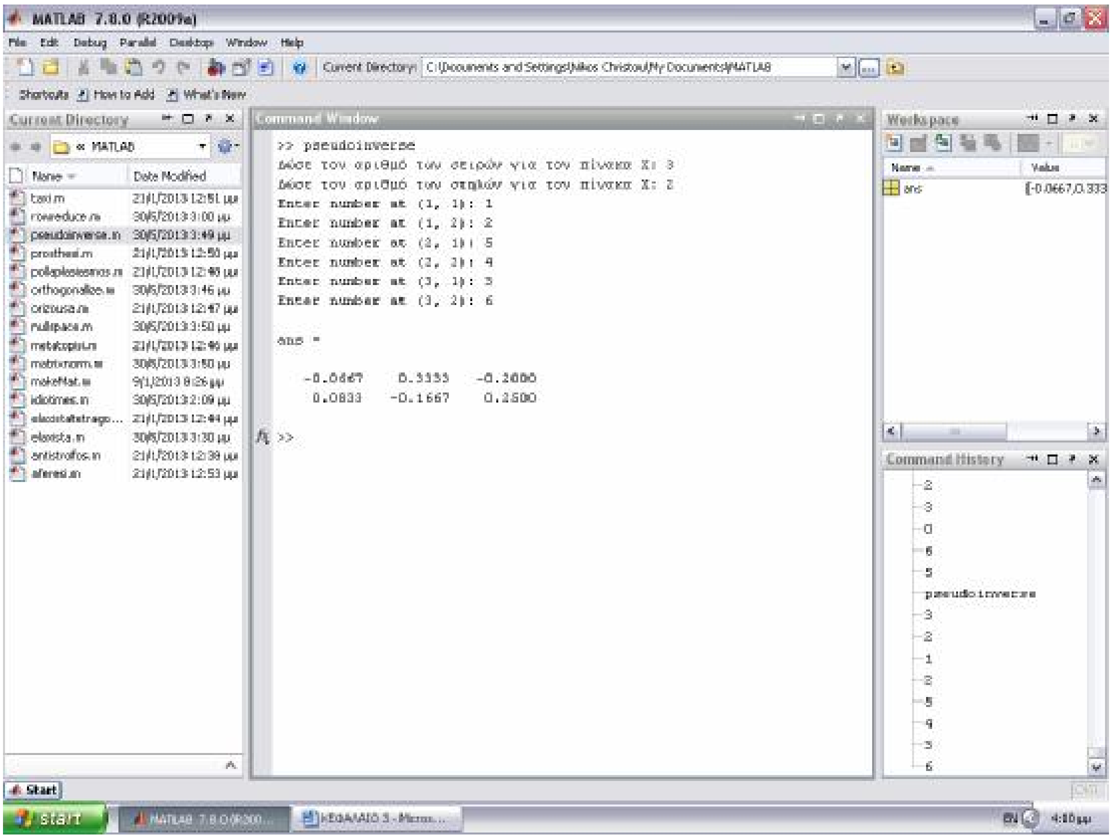
Εύρεση ορθοκανονικής βάσης πίνακα

Γράφοντας την εντολή `orthogonalize` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μέσω του βοηθητικού προγράμματος `makeMad` μας ζητά να δώσουμε στοιχεία για τον πίνακα τον οποίο θέλουμε να δημιουργήσει. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των σειρών και αφότου τον δώσουμε και πατήσουμε `Enter` μας ζητά και τον αριθμό των στηλών. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δώσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα.



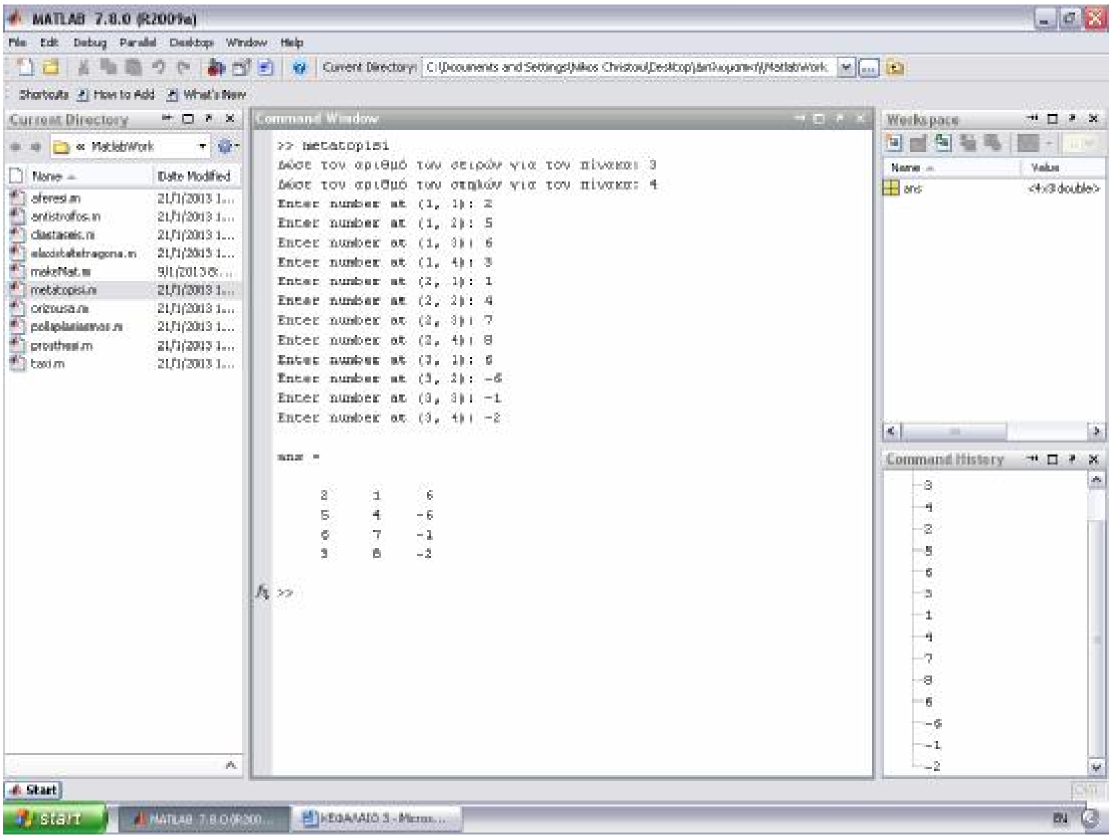
Υπολογισμός ψευδούς αντίστροφου πίνακα

Γράφοντας την εντολή `pseudoinverse` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μέσω του βοηθητικού προγράμματος `makeMad` μας ζητά να δώσουμε στοιχεία για τον πίνακα τον οποίο θέλουμε να δημιουργήσει. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των σειρών και αφότου τον δώσουμε και πατήσουμε `Enter` μας ζητά και τον αριθμό των στηλών. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δώσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα. Η εντολή `pseudoinverse` μας δίνει τον αντίστροφο ανεξαρτήτως αν ο πίνακας μας είναι τετραγωνικός ή όχι. Στην περίπτωση που ο πίνακας είναι τετραγωνικός τότε το αποτέλεσμα που δίνει είναι το ίδιο με της εντολής `antistrofos`.



Μετατόπιση στοιχείων πίνακα

Γράφοντας την εντολή `metatopisi` στο `Command Window` και πατώντας `Enter` το πρόγραμμα μέσω του βοηθητικού προγράμματος `makeMad` μας ζητά να δώσουμε στοιχεία για τον πίνακα τον οποίο θέλουμε να δημιουργήσει. Πρώτα μας ζητά τον αριθμό των σειρών και αφότου τον δώσουμε και πατήσουμε `Enter` μας ζητά και τον αριθμό των στηλών. Στη συνέχεια πατάμε `Enter` και μας ζητείται να εισάγουμε τα στοιχεία του πίνακα. Μετά από κάθε αριθμό που εισάγουμε πατάμε `Enter`. Όταν δώσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα πατάμε `Enter` και το πρόγραμμα μας δίνει το αποτέλεσμα. Τα στοιχεία του πίνακα που δώσαμε ως σειρές μετατρέπονται σε στήλες και τα στοιχεία του πίνακα που δώσαμε ως στήλες μετατρέπονται σε σειρές.



ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ

Α
Ακολουθία κώδικα, 46
Αλγεβρικά συμπληρώματα, 19
Ανάστροφος, 63
Αντίστροφος, 19,31,51,58,80
Αφαίρεση, 54,76

Β
Βρόγχος, 39

Γ
Γινόμενο, 49
Γραμμικά συστήματα, 23

Δ
Διαστάσεις, 65

Ε
Ελάχιστα τετράγωνα, 64,69,82

Ι
Ιδιοδιανύσματα, 61,62
Ιδιότητες οριζουσών, 15
Ιδιότητες πινάκων, 11
Ιδιοτιμές, 60,62,81

Κ
Κανόνας Gramer, 28
Κόμβος, 43

Μ
Μέθοδος απαλοιφής, 24
Μετατροπή, 66,83,85,89
Μορφή πίνακα, 67

Ο
Ορθοκανονικό, 72,87
Ορίζουσα, 12,50,56,78

Π
Πολλαπλασιασμός, 55,77
Πρόσθεση, 53,75

Σ
Στοιχειώδη μετασχηματισμοί, 21
Συστήματα, 59

Τ
Τάξη, 16,57,79

Χ
Χαρακτηριστική εξίσωση, 33

Ψ
Ψευτοαντίστροφος, 73,88

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΑΓΓΛΙΚΟ

A
Addition, 53,75
Algebraically supplements, 19

C
Code sequence, 46

D
Determinant, 50,56,78
Dimensions, 65

E
Eigen system, 62
Eigen values, 60,81
Eigen vectors, 61
Excel, 48

G
Gauss-Jordan, 24
Gramer, 28

I
Inverse, 51,58,80

L
Least squares, 64,69,82
Linear solve, 59
Loop, 39

M
Mathematica, 52
Matlab, 74
Matrix form, 67
Matrix power, 68
Matrix rank, 57,79
MDETERM, 50
Minors, 69,82
MINVERSE, 51
Multiplication, 55,77

N
Node, 43
Norm, 70,85
Null space, 71,86

O
Orthogonalize, 72,88

P
Pseudo inverse, 73

R
Row reduce, 66,83

S
Subtraction, 54,76

T
Transpose, 63

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Χρ. Σχοινάς, Γ. Παπασχοινόπουλος, Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονλικη, 2011.

[2] Ιωάννης Σχοινάς, Γραμμική Αλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Εκδόσεις Δ.Π.Θ. Ξάνθη, 1985.

[3] Νικόλας Η. Παπαμάρκος, Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων Τόμος 1, Εκδόσεις Δ.Π.Θ. Ξάνθη, 1990.

[4] Charlies M. Gilmore, Μικροεπεξεργαστές Θεωρία και Εφαρμογές, Εκδόσεις Τζιόλα,Θεσσαλονίκη.

[5] Γεώργιος Ι. Βλαχτσεβάνος, Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων Τόμος 2, Εκδόσεις Δ.Π.Θ. Ξάνθη, 1984.

[6] Χ. Χαμζάς, Α. Παπούλης, Ηλεκτρικά Κυκλώματα Σήματα και Συστήματα, Εκδόσεις Δ.Π.Θ. Ξάνθη.

[7] http://wiki.answers.com/Q/What_are_the_applications_of_Eigenvalue_and_eigenvector_in_Engineering

[8] http://integrals.wolfram.com/index.jsp

[9] http://office.microsoft.com/el-gr/support/?CTT=97