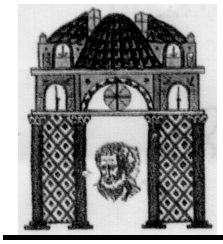

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΞΑΝΘΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ & ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Δ.Π.Θ.

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου στο μάθημα Πιθανότητες-Στατιστική
(8-9-2000)

Α΄ ΜΕΡΟΣ (40%)

1. Μετράμε τον αριθμό των αυτοκινήτων που φτάνουν σε μια αφετηρία σε διαστήματα 2 λεπτών, σε ώρες αιχμής, για 5 μέρες και έστω ότι έχουμε τις εξής μετρήσεις: 1, 1, 2, 3, 3. Να βρεθεί η πιθανότητα σε διάστημα 5 λεπτών, σε ώρες αιχμής, να φτάσουν στην αφετηρία πάνω από 4 αυτοκίνητα. (7%).

Λύση Έστω X_2 η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των αυτοκινήτων που φτάνουν σε μια αφετηρία σε χρόνο 2 sec. Η X_2 ακολουθεί την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας την

$P(X_2 = x) = \frac{(2\nu)^x}{x!} e^{-2\nu}$, και μέση τιμή την $E(X_2) = 2\nu$. Αλλά $\frac{1+1+2+3+3}{5} = \bar{x} \approx E(X_2)$. Άρα $E(X_2) \approx 2$ και επομένως $\nu \approx 1$. Άρα

$$P(X_5 > 4) = 1 - (P(X_5 = 0) + P(X_5 = 1) + P(X_5 = 2) + P(X_5 = 3)) =$$

$$1 - \left(\frac{(5.1)^0}{0!} e^{-5.1} + \frac{(5.1)^1}{1!} e^{-2.1} + \frac{(5.1)^2}{2!} e^{-5.1} + \frac{(5.1)^3}{3!} e^{-5.1} \right) = 1 - \frac{118}{3} e^{-5} = 6,$$

2. Έστω η πιθανότητα έλλειψης νερού για μια συγκεκριμένη μέρα σε μια περιοχή κατά τον μήνα Ιούλιο είναι 0,2. Να ορισθούν δύο τυχαίες μεταβλητές: μία που να έχει συνάρτηση πιθανότητας Bernoulli και μία που να έχει σ.π τη γεωμετρική κατανομή και να δοθούν δύο παραδείγματα (ένα για τη Bernoulli και ένα για την γεωμετρική) εύρεσης πιθανότητας. (7%)

Λύση

Bernoulli: X_7= Αριθμός των ημερών που έχουμε έλλειψη νερού σε μια εβδομάδα

Γεωμετρική: Τ=Αριθμός των ημερών που θα περάσουν και θα υπάρχει επάρκεια νερού, έως την «πρώτη ημέρα έλλειψης νερού».

Παραδείγματα:

Α) Ποια είναι η πιθανότητα σε μια εβδομάδα να έχουμε έλλειψη νερού πάνω από δύο μέρες;

Λύση

$$P(X_7 > 2) = 1 - (P(X_5 = 0) + P(X_5 = 1)) = 1 - \left(\binom{7}{0} (0,2)^0 (0,8)^7 + \binom{7}{1} (0,2)^1 (0,8)^6 \right)$$

Β)Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε 5 συνεχείς μέρες επάρκειας νερού μετά από την τελευταία μέρα έλλειψης νερού μέχρι να εμφανισθεί πάλι μια μέρα με έλλειψη νερού;

Λύση

$P(T=5)=(0,2).(0.8)^5= 0,065536.$

3. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ώστε η συνάρτηση $f(x)=\frac{c}{1+x^2}$ να είναι συνάρτηση πιθανότητας;(5%).

Λύση

Πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{1+x^2}dx=1$. Αλλά το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα:

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\pi$. Άρα $c=\frac{1}{\pi}$.

4. Έστω ότι μελετάμε την ταχύτητα $V=\frac{1.49}{n}R^{\frac{2}{3}}S^{\frac{1}{2}}$ της στρωτής ομοιόμορφης ροής σ' έναν ανοικτό αγωγό (τύπος του Manning).Θεωρούμε ότι n, R, S είναι τυχαίες μεταβλητές. Έστω επίσης ότι έχουμε τις μετρήσεις n_1 , n_2 ,…n_k για την n, R_1, R_2,….R_m για την R και S_1, S_2,….S_τ για την S. Να αναπτυχθεί αναλυτικά μια μέθοδος για την εύρεση της πιθανότητας P(V>v), όπου v είναι μια τιμή της V.(11%)

Λύση

Θεωρούμε τις τ.μ n, R, S λογαριθμοκανονικές με παραμέτρους αντίστοιχα: λ_n, ζ_n, λ_R, ζ_R, λ_S, ζ_S, που υπολογίζονται ως εξής:

Υπολογίζουμε μόνο τις λ_n, ζ_n και όμοια υπολογίζονται και οι άλλες:

Είναι γνωστό ότι $\zeta_n^2=\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)$ και $\lambda_n=\ln\mu-\frac{1}{2}\zeta_n^2$, όπου μ=E(n) και σ^2=Var(n). Αλλά,

$$\mu=E(n)\approx\frac{n_1+n_2+..n_k}{k}\ \text{και}\ \sigma^2=Var(n)\approx s_n^2=\frac{(n_1-\bar{n})^2+(n_2-\bar{n})^2+..+(n_k-\bar{n})^2}{k-1}$$

Επομένως: $\zeta_n=\sqrt{\ln\left(1+\frac{{s_n}^2}{\bar{n}^2}\right)}$ και $\lambda_n=\ln\bar{n}-\frac{1}{2}\zeta_n^2$.

Άρα $P(V>v)=1-\Phi\left(\frac{\ln v-\lambda_n}{\zeta_n}\right)$.

5. Αν X είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας την

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & \text{αν } -\frac{\pi}{2}\le\chi\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της Y=tanX (10%).

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τη συνάρτηση κατανομής της Y,

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\tan X\le y)=P(X\le\arctan y)=F_X(\arctan y)$.

Άρα $f_Y(y)=f_X(\arctan y).(\arctan y)'=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$

Β΄ ΜΕΡΟΣ (60%)
(Το κάθε πρόβλημα υπολογίζεται με 20 %.)

1. Στην επόμενη ορκομωσία των φοιτητών της Πολυτεχνικής Σχολής υποθέτουμε ότι θα ορκισθούν 100 φοιτητές. Για κάθε φοιτητή ο αριθμός των συγγενών του που θα παρακολουθήσει την ορκομωσία θεωρούμε ότι έχει την παρακάτω συνάρτηση πιθανότητας:

Αριθμός συγγενών	0	1	2
Πιθανότητα	0.2	0.3	0.5

Αν το αμφιθέατρο έχει χωρητικότητα 200 επιπλέον ατόμων (δηλαδή χωρητικότητα αμφιθεάτρου =100+200=300), ποια είναι η πιθανότητα ότι το αμφιθέατρο δεν θα είναι επαρκές ως προς την χωρητικότητά του;

Λύση

Έστω X_i ο αριθμός των συγγενών που θα παρακολουθήσουν την ορκωμοσία.

Τότε $E(X_i)$=0. 0,2+ 1. 0,3+2. 0,5=1,3.

$E(X_i^2) = 0^2 .0,2 + 1^2 . 0,3 + 2^2 . 0,5 = 2,3.$

Άρα $Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 2,3 - (1,3)^2 = 0,61.$

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$, που σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα πληροί την κανονική κατανομή με μέση τιμή

E(S)=100.1,3=130 και Var(S)=100. 0,61=61$\Rightarrow\sigma_S$ =7,81.

Η πιθανότητα που ψάχνουμε είναι η:

$P(S \geq 200) = 1 - \Phi\left(\frac{200-130}{7,81}\right) = 1 - \Phi(8,96) = 1 - 1 = 0$. Άρα το αμφιθέατρο θα χωρέσει όλους τους συγγενείς.

2. Έστω ότι η αντοχή Α ενός τύπου σκυροδέματος έχει την κανονική κατανομή: A~N(300, 10) Kg/cm^2 (C30). Ένα εργοστάσιο παρασκευής του σκυροδέματος αυτού κερδίζει 10.000 δραχμές/m^3 αν A>295, ενώ κερδίζει 8.000 δραχμές/m^3, αν A<295 (το σκυρόδεμα θεωρείται κατώτερης ποιότητας). Να υπολογισθεί το αναμενόμενο κέρδος ανά m^3.

Λύση

Έστω Y το κέρδος ανά m^3 σκυροδέματος. Τότε

$$Y = g(A) = \begin{cases} 10000 & \text{αν } A > 295 \\ 8000 & \text{αν } A < 295 \end{cases}$$

Έστω f(a) η συνάρτηση πιθανότητας της Α (κανονική κατανομή). Τότε το αναμενόμενο κέρδος ανά m^3 είναι:E(Y)= E(g(A))=

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(a)f(a)da = \int_{-\infty}^{295} g(a)f(a)da + \int_{295}^{\infty} g(a)f(a)da = 10000P(A > 295) + 8000P(A < 295) =$$

$$10000.\left(1 - \Phi\left(\frac{295-300}{10}\right)\right) + 8000.\Phi\left(\frac{295-300}{10}\right) = 9383 \text{ δρχ/m}^3 .$$

3. 'Η κατανομή του ύψους των θαλάσσιων κυμάτων σε μια περιοχή ακολουθεί μια συνάρτηση πυκνότητας του Rayleigh:

με παράμετρο α. 'Ας υποθέσουμε ότι έχουν καταγραφεί οι ακόλουθες

$$f_H(h) = \frac{h}{a^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(h/a)^2}, h > 0$$

μετρήσεις για τα ύψη κύματος: l.5 , 2.8 , 2.5 , 3.2 , 1.9 , 4.1 , 3.6 , 2.6 , 2.9 , 2.3 (m).

Υπολογίστε την παράμετρο α με τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας.

Λύση

$$f_H(h) = \frac{2 \cdot h}{a^2} \cdot e^{-\frac{h^2}{a^2}}$$

Αν $h_1, h_2, .. h_n$, είναι οι μετρήσεις για το ύψος h, εφαρμόζοντας τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοεπιφάνειας για τον υπολογισμό της παραμέτρου α, θεωρούμαι τη βοηθητική συνάρτηση:

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{2 \cdot h_i}{a^2} e^{-\frac{h_i^2}{a^2}} \Rightarrow$$

$$\ln L = n \cdot \ln 2 - 2 \cdot n \cdot \ln a + \sum_{i=1}^{n} \ln h_i - \frac{1}{a^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} h_i^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = -\frac{2 \cdot n}{a} + \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^{n} h_i^2}{a^3} = 0 \Rightarrow \hat{a}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}{n} \Rightarrow \hat{a} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}{n}}$$

Τα δεδομένα της Ασκησης για *n*=10 δίνουν

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^2 = (1.5^2 + 2.8^2 + ... + 2.3^2) = 80.42 \Rightarrow \hat{a} = \pm 2.836$$