

**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2002**

ΜΕΡΟΣ 1 (40%)

1. Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις:
α) $\text{Cov}(X,X)$ (2%) γ) $\text{Cov}(X,3)$ (1%)
β) $E(X - \mu_X)$ (1%) δ) $\text{Var}(X - \mu_X)$ (1%)
ε) $\text{Cov}(X+Y,Z)$ (να εκφρασθεί σε συνάρτηση των $\text{Cov}(X,Z)$ και $\text{Cov}(Y,Z)$) (5%)
- 2) Δίνεται η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = ce^{-|x|}$. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(X^2 + X > 0)$. (10%)
- 3) Έστω X και Y έχουν ομοιόμορφη συνάρτηση πιθανότητας στα διαστήματα $[0, 2]$ και $[0, 3]$ αντίστοιχα. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες να βρεθεί η $P(Y \geq 2X)$ (5%) και η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X και Y . (5%)
- 4) Έστω X_1, X_2, \dots, X_{30} είναι η ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να βρεθεί η πιθανότητα
α) $P(X_1 + X_2 + \dots + X_{30} > 148)$, όπου $X_i \sim \text{Poisson}(5)$, $i=1,2,\dots,30$ (3%)
β) $P(X_1 + X_2 + \dots + X_{30} > 148)$, όπου $X_i \sim N(5, 1)$, $i=1,2,\dots,30$ (3%)
γ) $P(X_1 + X_2 + \dots + X_{30} > 148)$, όπου $X_i \sim \text{εκθετική}$ με παράμετρο 5, $i=1,2,\dots,30$ (4%)

ΜΕΡΟΣ 2 (60%)

1. Υποθέτουμε ότι Y_1 και Y_2 είναι δυο στατιστικά ανεξάρτητοι αμερόληπτοι εκτιμητές της παραμέτρου θ και έστω $\text{Var}Y_1 = c\text{Var}Y_2$, όπου c είναι γνωστή σταθερά. Να υπολογισθούν οι σταθερές k_1, k_2 , ώστε ο γραμμικός συνδυασμός $k_1Y_1 + k_2Y_2$ να είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου θ με τη μικρότερη δυνατή διασπορά. (20%)
2. Ο Γιάννης και η Μαίρη είναι δυο καλοί πρωτοετείς του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών, που συμπάθησε πολύ ο ένας τον άλλο και εξέφρασαν την επιθυμία να πηγαίνουν κάθε μέρα μαζί στις παραδόσεις. Ο Γιάννης περνά κάθε πρωί από την «ΚΑΛΛΙΡΡΟΗ» στο χρονικό διάστημα 8.00 έως 9.00 και η Μαίρη περνά κάθε πρωί από την «ΚΑΛΛΙΡΡΟΗ» στο χρονικό διάστημα 8.00 έως 9.30. Να βρεθεί η πιθανότητα να συναντηθούν μια τυχαία μέρα στην «ΚΑΛΛΙΡΡΟΗ», ώστε να πάνε μαζί στις παραδόσεις στις κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) αν υπάρχει αμοιβαία συμφωνία αυτός που φτάνει πρώτος στην «ΚΑΛΛΙΡΡΟΗ» να περιμένει τον άλλο για 10 λεπτά.
β) Δεν υπάρχει αμοιβαία συμφωνία, αλλά ο Γιάννης, που είναι ερωτευμένος περιμένει πάντα 10 λεπτά τη Μαίρη στη «ΚΑΛΛΙΡΡΟΗ». (20%)
3. A) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n είναι η ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, που παριστάνουν τις αντοχές ή δοκιμών με συνάρτηση πιθανότητας για την κάθε μια χωριστά $f(x)$ και με συνάρτηση κατανομής για την κάθε μια χωριστά $F(x)$.
α) Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ (5%)
β) Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της $Z = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ (5%)
B) Τι παρατηρείτε αν οι παραπάνω X_i , $i=1, \dots, n$, παριστάνουν χρόνους μεταξύ διαδοχικών αφίξεων σε η αφετηρίες αυτοκινήτων; (3%)
C) Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του ερωτήματος B και $n=17$ να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας του 5^{ου} μεγαλύτερου σε μέγεθος χρόνου. (7%)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.5 ΩΡΕΣ