ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΑΡΤΙΟΣ 2003

Λ Υ Σ Ε Ι Σ Τ Ω Ν Α Σ Κ Η Σ Ε Ω Ν

ΜΕΡΟΣ Α

1) Έχουμε κατασκευάσει 400 δοκίμια. Να βρεθεί προσεγγιστικά ο αριθμός των δοκιμίων που περιέχονται μεταξύ των σημείων καμπής της συνάρτησης πιθανότητας της αντοχής τους (5%)

ΛΥΣΗ:

Έστω Χ η τυχαία μεταβλητή της αντοχής ενός ορισμένου τύπου σκυροδέματος. Όπως είναι γνωστό σαν συνάρτηση πιθανότητας θεωρούμε την κανονική.
Έστω χ_1, χ_2, τα σημεία καμπής της συνάρτησης πιθανότητας.
Έστω $X \sim N(\mu,\sigma)$. τα σημεια καμπής της κατανομής αυτης είναι ως γνωστόν τα : $\chi_1=\mu-\sigma$, $\chi_2=\mu+\sigma$. άρα $P(\chi_1<X<\chi_2) = P(\mu-\sigma<X\mu+\sigma)=$

$$=\Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1)-1=0.6826$$

2) Έχουμε επιλέξει σκυρόδεμα C30 για μια κατασκευή. Να δοθεί ο πιθανοθεωρητικός ορισμός αυτού του τύπου σκυροδέματος. Η συνάρτηση πιθανότητας του τύπου αυτού του σκυροδέματος παίρνει αρνητικές τιμές; Αν ναι πως το εξηγείτε; (5%)

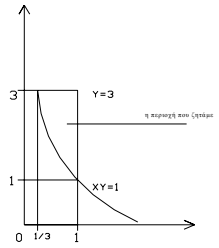
ΛΥΣΗ:

θεωρούμε ότι η αντοχή είναι κανονική κατανομή με $A \sim N(\mu,\sigma)$
και ότι σχεδόν ποτέ δεν παίρνει αρνητικές τιμές. Πράγματι,
$P(A<0)= \Phi(0-\mu/\sigma)=\Phi(-\mu/\sigma)=1-\Phi(\mu/\sigma)>0$ που ισχύει για $\mu/\sigma>3.5$ προσεγγιστικά.
Το παραπάνω ισχύει και οπότε με ικανοποιητική προσέγγιση θεωρούμε ότι η αντοχή είναι κανονική κατανομή.
Μελετάμε τον τύπο σκυροδέματος C30: τότε $\mu=300kp/cm^3$ και $\sigma<3$.
Άρα $\mu/\sigma>3.5$

3) Μια δοκός στηρίζεται σε δυο στηρίγματα Α και Β. Εξαιτίας της επενέργειας διαφόρων φορτίων σε διάφορες θέσεις μεταξύ των Α και Β η αντίδραση στο Α παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ 0 και 1 και η αντίδραση στο Β παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ 1 και 3. Ποια είναι η πιθανότητα το γινόμενο των αντιδράσεων να είναι μεγαλύτερο του 1;(10%)

ΛΥΣΗ:

Η αντίδραση στο Α είναι 0<A<1 και η αντίδραση στο Β είναι 1<B<3
Θέλω να βρώ την πιθανότητα το γινόμενο των αντιδράσεων να είναι μεγαλύτερο του 1.
Επιλέγω τυχαία ένα αριθμό μεταξύ 0 και 1 , και ένα άλλο μεταξύ 1και 3.
A*B>1 => XY>1=>Y=1/X Θα πάρω τα σημεία πάνω από την υπερβολή Y=1/X



η περιοχή αυτή είναι : $\int_{1/3}^{1}\left(3-\frac{1}{x}\right)dx = ... = 2-\ln 3$

άρα η P=2-LN3/2

4) Κατασκευάστε ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο, το οποίο να περιγράφει τη λειψυδρία μιας περιοχής κατά τον μήνα Ιούλιο. Θεωρείστε ότι στην περιοχή αυτή υπάρχουν τρεις πηγές παροχής νερού $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$.Να αναπτυχθεί διεξοδικά πως υπολογίζεται η πιθανότητα λειψυδρίας. (5%)

ΛΥΣΗ:

Αρχικά θεωρούμε όλες τις τυχαίες κατανομές συνεχείς. Έστω ότι η υδροδότηση μιας πόλης γίνεται από τρεις πηγές Π1,Π2,Π3. που ακολουθούν κανονικές κατανομές, (Π1, Π2, Π3 οι ημερήσιες παροχές). Έστω Π1~ N (30,4), Π2~ N (15,2), Π3~ N (10,1). Θεωρούμε ότι η ζήτηση είναι επίσης συνεχής κατανομή, κανονική με Z ~ N(50,3). Το ζητούμενο είναι έστω να βρεθεί η πιθανότητα έλλειψης μία ημέρα. Για να έχουμε έλλειψη πρέπει Z > Π $\Rightarrow$ Π-Z < 0. Θεωρούμε Φ = Π-Z. Η Φ θα είναι επίσης κανονική κατανομή με
μ = -50+30+15+10 = 5

$\sigma = \sqrt{4^2+2^2+1^2+3^2} = 5{,}4772$

Θέλουμε την πιθανότητα

$P(\Phi < 0) = \Phi(\frac{-5}{5{,}4772}) = \Phi(-0{,}9127) = 1-\Phi(0{,}9127) = 1-0{,}8186 = 0{,}1814$

Έστω ότι ζητούσαμε την έλλειψη τουλάχιστον 2 ημέρες την εβδομάδα. Θα λυθεί με διωνυμική κατανομή (δοκιμές Bernoulli).

$P(X \geq 2) = 1-P(X \leq 2) = 1-P(0)-P(1) \Rightarrow$

P(X≥2) = 0,3706

Β) Θεωρούμε την ζήτηση ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα συνεχή κατανομή με Z ~ N(50, 3) και την παροχή διακριτή με Π = 60 με πιθανότητα 0,7 ή Π = 75 με πιθανότητα 0,3.
P(έλλειψη) = P(Ε / Π = 60) * P(Π = 60) + P(Ε / Π = 75) * P(Π = 75) $\Rightarrow$
P(έλλειψη) = P(K > 60)*0,7 + P(K > 75)*0,3 =

$$=\left[1-\Phi\left(\frac{60-50}{3}\right)\right]\cdot 0{,}7+\left[1-\Phi\left(\frac{75-50}{3}\right)\right]\cdot 0{,}3=0{,}0028$$

5) Σε μια στροφή στρίβουν αριστερά 15 αυτοκίνητα το λεπτό. Ποια είναι η πιθανότητα να στρίψουν αριστερά πάνω από 600 αυτοκίνητα σε μια ώρα;(5%)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

θα το μελετήσω ως BERNOULLI.
Υποθέτω ότι τα αυτοκίνητα μπορουν να στρίψουν ή δεξία ή αριστερά.
Επιλέγω μικρά χρονικά διαστήματα: ανά 5 δεπτερολεπτα = 1 πείραμα, υποθέτουμε ότι στρίβει η αριστερά η δεξιά, έστω αριστερά.
Σε ένα λεπτό θα έχουμε 12 πειράματα BERNOULLI, άρα 12 ευνοικά πειράματα.
Άρα η πιθανότητα επιτυχίας έιναι σταθερή v=15/12
Η ζητούμενη πιθανότητα των 600 αυτοκινήτων θα είναι
60 λεπτά = 720 πειράματα BERNOULLI.

$$P(\chi_{720}>600)=\binom{720}{600}\left(\frac{15}{12}\right)^{600}\left(1-\frac{15}{12}\right)^{120}$$

ή
$P(X_6\geq 600) = 1-P(X_6<600) = 1-[P(X_6=0)+P(X_6=1)+$
$P(X_6=2)+ P(X_6=3)+ P(X_6=4)+ P(X_6=5)+ P(X_6=6)] =$

=1-

$$\left[\binom{150}{0}*\left(\frac{900}{6}\right)^{0}*\left(1-\frac{900}{6}\right)^{4}+\binom{150}{1}*\left(\frac{900}{6}\right)^{1}\left(1-\frac{900}{6}\right)^{3}+\ldots\right]=\frac{900^{0}}{0!}*\ell^{-900}=\ell^{-900}$$

6) Σε μια αφετηρία αυτοκινήτων φτάνουν 8 αυτοκίνητα κάθε τρία λεπτά. Αν πέρασε ένα λεπτό και δεν έφτασε κανένα αυτοκίνητο στην αφετηρία, ποια είναι η πιθανότητα στο επόμενο λεπτό να φτάσει; (5%)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Στην αφετηρία αυτοκινήτων φτάνουν 8 αυτοκίνητα κάθε τρία λεπτά. Στο πρώτο λεπτό δεν έφτασε κανένα αυτοκίνητο, θέλω να βρω την πιθανότητα να φτάσει στο επόμενο λεπτό.

Μιλάμε για εκθετική κατανομή. Έστω Τα ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων.

P(T<2,T>1)= $\frac{P(1<T<2)}{P(T>1)} = \frac{F(2)-F(1)}{1-F(1)} = \frac{1-\ell^{-\frac{16}{3}}-1+\ell^{-\frac{8}{3}}}{1-\ell^{-\frac{8}{3}}}$

F(x)=1- ℓ^{-vt} με v=8/3 αυτοκίνητο/λεπτό

ή

Έστω χ_2 ο αριθμός των αφίξεων το δέυτερο λεπτό.

$P(X_T \leq \chi) = \frac{(vt)^x}{x!} * \ell^{-vt}$

$P(X_2 \geq 1)$ = 1-[P(X=1)+P(X=2)+…+P(X=8)]

Έστω v= 8/1=8

Θεωρούμε X_2 N(μ,σ) με μ=vt=8*1=8 και

Και σ= $\sqrt{vt} = \sqrt{8*1} = 2.83$

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα η παραπάνω εκθετική προσεγγιστικά μπορεί να θεωρηθεί εκθετική κατανομή.

Έτσι : $P(X_2 \geq 1)$=1-$P(X_2 \leq 1)$=1-$\Phi\left(\frac{1-4}{\sqrt{4}}\right) = 1-\Phi(-1.5) = 1-1+\Phi(1.5) = 0.9313$

7) Αν η ασφάλεια ενός κτιρίου σε ένα ισχυρό σεισμό είναι 99%, ποια είναι η ασφάλεια του κτιρίου σε μια εικοσαετία (δίνεται ότι στην περιοχή αυτή συμβαίνουν 2 ισχυροί σεισμοί κάθε 5 χρόνια(5%)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Εστω Α το ενδεχόμενο το κτίσμα να αντέχει 20 χρόνια. Έστω επίσης το ενδεχόμενο X_{20} όπου είναι ο αριθμός των σεισμών σε μια εικοσαετία.

Η ασφάλεια του κτιρίου είναι 99% άρα και η αντοχή του είναι 99%.

Στην περιοχή αυτή συμβαίνουν 2 ισχυροί σεισμοί ανά 5 χρόνια, άρα v=2/5=0.4

Σύμφωνα με τον λόγο της ολικής πιθανότητας έχουμε:

$P(A)=P(A/ X_{20=0})*P(X_{20=0})+ P(A/ X_{20=1})*P(X_{20=1})+\ldots +$

$+P(A/ X_{20=n})*P(X_{20=n})+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 0{,}99^n * \frac{(0.4*20)^n}{n!} * \ell^{-0.4*20} =$

$= \ell^{-2} * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7.92^n}{n!}$ (σειρά του ℓ^x)

1 σεισμό 0.99

n σεισμούς 0.99^n ισχύει.

Άρα $\ell^{-2} * \ell^{7.92} = \ell^{5.92}$

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ (60%)

1) Η κοινή συνάρτηση πιθανότητας των δύο διακριτών τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι f(x,y)=c(2x+y) για ακέραια x, y στα διαστήματα $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, ενώ f(x,y)=0 για όλα τα άλλα x, y. Να υπολογισθούν: (αφού πρώτα υπολογισθεί η c)
α) Η πιθανότητα P(X=2, Y=1), και η πιθανότητα P(X≥1, $Y \le 2$),
β) Οι περιθώριες συναρτήσεις των X και Y. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες; Να υπολογισθεί ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης

ΛΥΣΗ:

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X,Y είναι:

x \ y	0	1	2	3
0	0	c	2c	3c
1	2c	3c	4c	5c
2	4c	5c	6c	7c

Επομένως το άθροισμα όλων των τιμών πρέπει να είναι ίσο με 1,
Δηλαδή : 42c=1=> c=1/42

Α) Η πιθανότητα P(X=2, Y=1) = 5/42

$$P(X \ge 1, Y \le 2) = 24c = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

Β) Η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της X είναι :

X	0	1	2
fx(x)	6c	14c	22c

Με αντικατάσταση της σταθεράς έχουμε:

X	0	1	2
fx(x)	1/7	1/3	11/21

Όμοια η περιθώρια συνάρτηση του Y βρίσκεται ως εξής :

Y	0	1	2	3
fy(y)	6c	9c	12c	15c

Με αντικατάσταση της σταθεράς :

Y	0	1	2	3
fy(y)	1/7	9/42	2/7	15/42

Ελέγχω εάν οι μεταβλητές X,Y είναι ανεξάρτητες ,

Πρέπει f(x,y)=fx(x)*fy(y)

Ελέγχω για X=1, Y=1 έχουμε :

F(1,1)=3/42
Fx(1) =1/3
Fy(1) =9/42

Η συνθήκη δεν ικανοποιείται και άρα οι X,Y δεν είναι ανεξάρτητες.

<u>Υπολογισμός συντελεστή γραμμικής συσχέτισης</u>

Έχουμε την διακριτή συνάρτηση πιθανότητας f(x,y)=(2x+y)1/42

$$x^{\tau} y^{s}\left(\frac{1}{42}(2x+y)\right)dxdy=\int_0^3\left[\int_0^2\frac{1}{42}\left(x^{\tau+1}y^{s}+x^{\tau}y^{s+1}\right)dx\right]dy=$$

$$\int_0^2\int_0^3\frac{1}{42}\int_0^3\left[y^{s}\frac{x^{t+2}}{t+2}+y^{s+1}\frac{x^{t+1}}{t+1}\right]_0^2 dy=\frac{1}{42}\int_0^3[y^{s}\frac{2^{t+2}}{t+2}+y^{s+1}\frac{2^{t+1}}{t+1}]dy=$$

$$=\frac{1}{42}\left[\frac{y^{s+1}}{s+1}\frac{2^{t+2}}{t+2}+\frac{y^{s+2}}{s+2}\frac{2^{t+1}}{t+1}\right]_0^3=\frac{1}{42}\left[\frac{3^{s+1}}{s+1}\frac{2^{t+2}}{t+2}+\frac{3^{s+2}}{s+2}\frac{2^{t+1}}{t+1}\right]$$

άρα για τα=0, σ=0 $E(X^0Y^0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1\vee$

ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δίδεται από τον τύπο :

$$P = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_\chi \sigma_y} = \frac{E(x,y) - E(x)E(y)}{\sigma_\chi \sigma_y}$$

για τ=1, s=1 έχουμε, E(x,y)=36

για τ=1, s=0 έχουμε, E(x)=19.5

για τ=0, s=1 έχουμε, E(y)=27

$E(\chi^2)=9.75$

$E(y^2)=13.5$

Και έχουμε : $\rho = \frac{36 - 19.5 \times 27}{\sqrt{9.75 - (19.5)^2} - \sqrt{13.5 - (27)^2}}$

2) Υποθέτουμε ότι Y_1 και Y_2 είναι δυο στατιστικά ανεξάρτητοι αμερόληπτοι εκτιμητές της παραμέτρου θ και έστω $VarY_1=cVarY_2$, όπου c είναι γνωστή σταθερά. Να υπολογισθούν οι σταθερές k_1, k_2, ώστε ο γραμμικός συνδυασμός $k_1Y_1 + k_2Y_2$ να είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου θ με τη μικρότερη δυνατή διασπορά.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

------

3) Έστω X_1, X_2,….X_n είναι n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, που παριστάνουν
τις αντοχές n δοκιμίων με συνάρτηση πιθανότητας για την κάθε μια χωριστά f(x) και με συνάρτηση κατανομής για την κάθε μια χωριστά F(x).
α) Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της Z=min{ X_1, X_2,….X_n} (5%)
β) Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της Z=max{ X_1, X_2,….X_n} (5%)
Έστω X_1, X_2,….X_{30} είναι n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να βρεθεί η πιθανότητα
γ) $P(X_1+X_2+….+X_{15}>70)$, όπου X_i~Poisson(5), i=1,2,…15 (2%)
δ) Σε ένα εργαστήριο δομικών υλικών έχουν κατασκευασθεί 640 δοκίμια μπετόν των οποίων η αντοχή μπορεί να θεωρηθεί κανονική. 25 απ' τα δοκίμια αυτά έχουν αντοχή μικρότερη από 18 $Kg.m^2$ και 110 από αυτά έχουν αντοχή από 24 $Kg.m^2$. Πόσα δοκίμια έχουν αντοχή μεταξύ 17 $Kg.m^2$ και 19 $Kg.m^2$;
Αν ένα δοκίμιο έχει αντοχή πάνω από 21 $Kg.m^2$ ποια είναι η πιθανότητα να έχει αντοχή κάτω από 25 $Kg.m^2$ (8%)

ΛΥΣΗ:

Έχουμε συνολικά 640 δοκίμια των οποίων η συνάρτηση της αντοχης τους μπορεί με καλή προσέγγιση να θεωρηθεί κανονική.
Τα 25 δοκίμια έχουν αντοχή μικρότερη από 18 και 110 έχουν αντοχή μεγαλύτερη από 24. ζητάμε τον αριθμό των δοκιμίων που έχουν αντοχη μεταξύ 17 και 19.

Για αντοχή μικρότερη από 18 : $\frac{25}{640} = 0.0390625 = 3.90695\%$

Για αντοχή μεγαλύτερη από 24 : $\frac{110}{640} = 0.171875 = 17.1875\%$

$$\Phi(-\infty < \chi < 18) = 0{,}0390625 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{18-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}0390625 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{18-\mu}{\sigma} = -\Phi(0{,}9609375) = -1{,}76 \Leftrightarrow 18-\mu = -1{,}76\sigma$$

$$\Phi(24 < \chi < \infty) = 0{,}1718755 \Leftrightarrow 1-\Phi\left(\frac{24-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}175875 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{24-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}828125 \Leftrightarrow \frac{24-\mu}{\sigma} = 0{,}955 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24-\mu = 0{,}955\sigma = 18+1.76\sigma \Leftrightarrow 6 = 2{,}715\sigma$$

$$\alpha\pi\acute{o}(1)\kappa\alpha\iota(2) 24-0{,}955\sigma = 18+1{,}76\sigma \Leftrightarrow 6 = 2{,}715\sigma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma = 2{,}21$$
$$\Leftrightarrow \mu = 21{,}889$$

Η πιθανότητα να έχει ένα δοκίμιο αντοχή κάτω από 25 με δεδομένο ότι έχει πάνω από 21 είναι :

$$P = \frac{P(21 < x < 25)}{P(21 < x < \infty)} = \frac{\Phi\left(\frac{25-21{,}884}{2{,}21}\right) - \Phi\left(\frac{21-21{,}889}{2{,}21}\right)}{1-\Phi\left(\frac{21-21{,}889}{2{,}21}\right)} = ...$$