ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2003

Λ Υ Σ Ε Ι Σ Τ Ω Ν Α Σ Κ Η Σ Ε Ω Ν

ΜΕΡΟΣ Α (40%)

1) Η αντοχή ενός τύπου σκυροδέματος ως γνωστόν θεωρείται κανονική. Ελέγχω 24 δοκίμια: 4 από αυτά έχουν αντοχή στο διάστημα [290, 300] 5 από αυτά έχουν αντοχή στο διάστημα [300,310] 5 από αυτά έχουν αντοχή στο διάστημα [310,320] 6 από αυτά στο διάστημα [320,330] και 4 στο διάστημα [330,340]. Μπορώ να υποθέσω ότι και στην περίπτωση μας η αντοχή είναι κανονική; (10%)

ΛΥΣΗ:

Είναι γνωστό ότι με ικανοποιητική προσέγγιση η αντοχή ενός τύπου δοκιμίου θεωρείται κανονική. Έχω συνολικά 24 δοκίμια.
4 δοκίμια [290,300)
5 δοκίμια [300,310)
5 δοκίμια (310,320]
6 δοκίμια (320,330]
4 δοκίμια (330,340]

Σύμφωνα με τον κανονισμό σκυροδέματος πρέπει να έχουμε αξιοπιστία 95% και για τον λόγο αυτόν επιλέγουμε επίπεδο σημαντικότητας 0.05.

Για να διαπιστώσουμε από το δείγμα αυτό αν η ποιότητα των δοκιμίων είναι διαφορετική από αυτήν που παρασκευάσαμε θα εφαρμόσουμε τον έλεγχο x^2.

ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΔΟΚΙΜΙΩΝ	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΤΙΜΗ(ni)	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ(ei)	$(n_i-e_i)^2/e_i$
1	4	4.8	0,14
2	5	4.8	0,0083
3	5	4.8	0,0083
4	6	4.8	0,3
5	4	4.8	0,14
ΣΥΝΟΛΟ	24	24	0,6

Η εφαρμογή του ελέγχου χ^2 είναι η ακόλουθη:
$X^2 > X^2_{n-1,p} = X^2_{5-1,1-0.05} = 9.49$
Εμείς έχουμε $\Sigma X^2=0,6<9,49$ Άρα η κατανομή είναι αποδεκτή.

2) Δίνεται μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφη χ στο [0,3]. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της

$$h(x)=\begin{cases} \frac{x}{2} & \text{αν } 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της Y=h(x) και να επαληθευτεί ότι πράγματι είναι συνάρτηση πιθανότητας . (10%)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Έχουμε την συνάρτηση : $h(x)=\begin{cases} \frac{x}{2} & \text{αν } 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Για να είναι συνάρτηση πιθανότητας αρκεί να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 \frac{x}{2}dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 \frac{x}{2}dx = 1 \Rightarrow \left|\frac{x2}{4}\right|_0^2 = 1 \Rightarrow 1-0=1$$ <u>ισχύει</u>.

3) Κατασκευάστε ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο, το οποίο να περιγράφει τη λειψυδρία μιας περιοχής κατά τον μήνα Ιούλιο. Θεωρείστε ότι στην περιοχή αυτή υπάρχουν τρεις πηγές παροχής νερού $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$.Να αναπτυχθεί διεξοδικά πως υπολογίζεται η πιθανότητα λειψυδρίας. (5%)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Αρχικά θεωρούμε όλες τις τυχαίες κατανομές συνεχείς. Έστω ότι η υδροδότηση μιας πόλης γίνεται από τρεις πηγές Π1,Π2,Π3. που ακολουθούν κανονικές κατανομές, (Π1, Π2, Π3 οι ημερήσιες παροχές). Έστω Π1~ N (30,4), Π2~ N (15,2), Π3~ N (10,1). Θεωρούμε ότι η ζήτηση είναι επίσης συνεχής κατανομή, κανονική με Z ~ N(50,3). Το ζητούμενο είναι έστω να βρεθεί η πιθανότητα έλλειψης μία ημέρα. Για να έχουμε έλλειψη πρέπει Z > Π ⇒ Π-Z < 0. Θεωρούμε Φ = Π-Z. Η Φ θα είναι επίσης κανονική κατανομή με
μ = -50+30+15+10 = 5

$$\sigma = \sqrt{4^2+2^2+1^2+3^2} = 5{,}4772$$

Θέλουμε την πιθανότητα

$$P(\Phi < 0) = \Phi(\frac{-5}{5,4772}) = \Phi(-0,9127) = 1 - \Phi(0,9127) = 1 - 0,8186 = 0,1814$$

Έστω ότι ζητούσαμε την έλλειψη τουλάχιστον 2 ημέρες την εβδομάδα. Θα λυθεί με διωνυμική κατανομή (δοκιμές Bernoulli).

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(0) - P(1) \Rightarrow$

P(X≥2) = 0,3706

Θεωρούμε την ζήτηση ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα συνεχή κατανομή με Z ~ N(50, 3) και την παροχή διακριτή με Π = 60 με πιθανότητα 0,7 ή Π = 75 με πιθανότητα 0,3.

P(έλλειψη) = P(E / Π = 60) * P(Π = 60) + P(E / Π = 75) * P(Π = 75) ⇒

P(έλλειψη) = P(K > 60)*0,7 + P(K > 75)*0,3 =

$$= \left[1 - \Phi\left(\frac{60-50}{3}\right)\right] \cdot 0,7 + \left[1 - \Phi\left(\frac{75-50}{3}\right)\right] \cdot 0,3 = 0,0028$$

4) Έστω για την εκτίμηση του ποσοστού ρ ενός πληθυσμού παίρνουμε ένα δείγμα ν ατόμων. Να βρεθεί το ν έτσι ώστε το ποσοστό των καπνιστών στο δείγμα να διαφέρει από το πραγματικό ποσοστό ρ , κατ' απόλυτη τιμή λιγότερο από 0,01 με πιθανότητα τουλάχιστον 0.95; (10%)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Από ένα δείγμα θα βγάλω συμπεράσματα για όλον τον πληθυσμό.

έχουμε : $\left(\bar{x} - n_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + n_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

1-α = 0,95 ⇔ α= 0,05 ⇔ α/2 = 0,025

$n_{a/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$

$$\left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$\bar{x}$: το ποσοστό ρ των καπνιστών του πληθυσμού.

$$1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 0{,}01 \Leftrightarrow 1{,}96\sigma \le 0{,}01\sqrt{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \ge 196\sigma \Leftrightarrow n \ge (196\sigma)^2$$

5) Στο προηγούμενο διαγώνισμα των πιθανοτήτων υπήρχαν 200 γραπτά 40 από το πρώτο έτος 60 από το δεύτερο 30 από το τρίτο 20 από το τέταρτο και 50 από το πέμπτο και πάνω. Τα παρακάτω ποσοστά δείχνουν το ποσοστό των φοιτητών που πήραν κάτω από την βάση στα αντίστοιχα έτη: 15% 25% 40% 50% 70%. Παίρνουμε στη τύχη ένα γραπτό και διαπιστώνουμε ότι είναι κάτω από την βάση. Ποια η πιθανότητα να είναι γραπτό του δευτέρου έτους; (5%)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Αρχικά υπολογίζω σύμφωνα με τα ποσοστά αποτυχίας ανά έτος τον αριθμό των φοιτητών ανά έτος που έγραψαν κάτω από την βάση στις εξετάσεις. Ετσι έχουμε: $1^{ο}$ έτος: 6

$2^{ο}$ έτος :15

$3^{ο}$ έτος : 12

$4^{ο}$ έτος : 10

$5^{ο}$ έτος : 35

σύνολο = 78

Η πιθανότητα να έρθει γραπτό με βαθμό κάτω από την βάση είναι :

$K=(K\cap A)\cup(K\cap B)\cup(K\cap \Gamma)\cup(K\cap \Delta)\cup(K\cap E)$

Το αποδεικνύω:

- $K=(K\cap A)\cup(K\cap B)\cup(K\cap \Gamma)\cup(K\cap \Delta)\cup(K\cap E) = K\cap(A\cup B\cup \Gamma\cup \Delta\cup E) =$
  $= K\cap\Omega = K$
- $K=(K\cap A)\cap(K\cap B)\cap(K\cap \Gamma)\cap(K\cap \Delta)\cap(K\cap E) = K\cap\Omega = 0$ ΞΕΝΑ

Άρα $P(K) = P[(K\cap A)\cup(K\cap B)\cup(K\cap \Gamma)\cup(K\cap \Delta)\cup(K\cap E)] =$
$= P(K\cap A)+P(K\cap B)+P(K\cap \Gamma)+P(K\cap \Delta)+P(K\cap E)$

$P(K/A) = \dfrac{P(K\cap A)}{P(A)}$

$P(K/B) = \dfrac{P(K\cap B)}{P(B)}$

$P(K/\Gamma) = \dfrac{P(K\cap \Gamma)}{P(\Gamma)}$

$P(K/\Delta) = \dfrac{P(K\cap \Delta)}{P(\Delta)}$

$P(K/E) = \dfrac{P(K\cap E)}{P(E)}$

Άρα:

P(K) =P(K/A)*P(A)+P(K/B)*P(B)+P(K/Γ)*P(Γ)+P(K/Δ)*P(Δ)+P(K/E)*P(E)

Η πιθανότητα τώρα το γραπτό που θα βγει να είναι κάτω από την βάση και να είναι και από το δεύτερο έτος είναι :

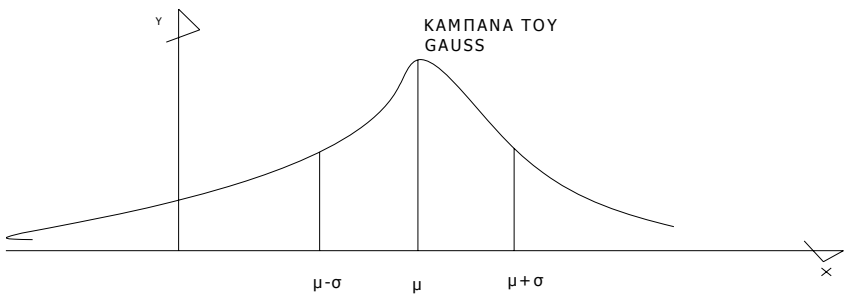
$$P(B/K) = \frac{P(B \cap K)}{P(K)} = \frac{P(K/B) * P(B))}{P(K/A) * P(A) + P(K/B) * P(B) + P(K/\Gamma) * \mathrm{P}(\Gamma) + \mathrm{P}(\mathrm{K}/\Delta) * \mathrm{P}(\Delta) + \mathrm{P}(\mathrm{K}/\mathrm{E}) * \mathrm{P}(\mathrm{E})}$$

= 0,125 $\Rightarrow$ 12,5 % η πιθανότητα να προέρχεται το γραπτό από το 2^{ο} έτος.

ΜΕΡΟΣ Β (60%)

1) Μια τυχαία μεταβλητη Α που παίρνει μόνο θετικές τιμές είναι κανονικη. Το ύψος της καμπάνας του gauss είναι μια μονάδα. Επίσης παρά το γεγονός ότι στη κανονική κατανομή η τυχαία μεταβλητητ παιρνει και αρνητικες τιμές το σφάλμα θεωρείται μηδαμινο. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η πιθανότητα P(A<1.2). αν η πιθανότερη τιμή της Α είναιο Α=1,1 να βρεθεί η πιθανότητα P(A,1,2)

<u>ΛΥΣΗ:</u>



$$P(-\infty < x < 0) = 0 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0-\mu}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{\sigma} \geq 3.5 \Leftrightarrow \mu \geq 3.5\sigma \rightarrow (1)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} < 1.2) = \mathrm{P}(-\infty < \mathrm{A} < 1.2) = \Phi\left(\frac{1{,}2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{1.2-\mu}{\sigma}\right)$$

για να έχουμε max P(A<1.2) πρέπει η 1.2-μ/σ να γίνει η μεγιστη.

$$\mu \geq 3.5\sigma \Rightarrow \mu = 3.5\sigma \Rightarrow \sigma = \mu / 3.5$$

για μ=3,5σ : $\frac{1,2-\mu}{\sigma} = \frac{1,2-3,5\sigma}{\sigma} = \frac{1,2}{\sigma} - 3,5$

(2) για μ=1.2 :

$$P(A < 1.2) = \Phi\left(\frac{1,2-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1,2-1,1}{1,1/3,5}\right) = \Phi\left(\frac{0,35}{1,1}\right) = \Phi(0,3181) = 0,6255$$

2) Ένα έργο πρέπει να τελειώσει την χρονική στιγμή t_1. αν τελειώσει την χρονική στιγμή t(t>t1) τότε η ζημιά που προκαλείται είναι c1(t-t1), c1>0. αν τελειώσει την χρονική στιγμή t(t<t1) η ζημιά που προκαλείται είναι c2(t-t1), c2<0. αν ο χρόνος για να τελειώσει το έργο είναι κανονική κατανομή N(t1+d,d). να βρεθεί ο μέσος όρος της ζημίας ως συνάρτηση του d.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Από την εκφώνηση ξέρω ότι ο χρόνος για να τελειώσει το έργο είναι κανονική κατανομή, $N(t_1+d,d)$
έστω C η ζημιά που προκαλείται αν τελειώσει το έργο νωρίτερα η αργότερα.

$$C=g(t)=\begin{cases} C_1(t-t_1) & t>t_1 \\ C_2(t-t_1) & t<t_1 \end{cases}$$

Έστω f(t) η συνάρτηση πιθανότητας της t (κανονική κατανομή). Τότε η αναμενόμενη ζημία είναι :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{t1} g(t)f(t)dt + \int_{t1}^{\infty} g(t)f(t)dt = C_1(t-t_1)\,P(t>t_1) + C_2(t-t_1)\,P(t<t_1) =$$

$$= C_1(t-t_1)\left(1-\Phi\left(\frac{t1-ti-d}{d}\right)\right) + C_2(t-t_1)\left(1-\Phi\left(\frac{t1-ti-d}{d}\right)\right) =$$

$$= (c_1+c_2)\,(t-t_1)\,(1-\Phi(-1)) =$$

3) Σε ένα συγκρότημα παρασκευής σκυροδέματος το μίγμα άμμου χαλικιού προμηθέυεται από τρία διαφορετικά μέρη. Το μέσο ποσοστό άμμου κατά βαρός στα μίγματα είναι 80,50,70 (80 από την πρώτη πηγή 50 από την δέυτερη και 70 από την Τρίτη) με συνταλέστές μεταβλητότητας 0.05 0.08 και 0.05 αντίστοιχα. Το υπόλοιπο ποσοστό καλύπτεται από χαλίκι. Παρασκευλαζεται ένα μίγμα 10 φορτιων που προέρχονται 3 από την πρωτη πηγή 3 από την δέυτερη και 4 τεσσερα από την Τρίτη. Ποια έιναι η πιθανότητα ότι στο μόγμα αυτό ο λόγος άμμου προς χαλίκι θα ξεπερνάει τα 2.6 και δεν θα είναι κάτω από 2.7.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

1^H ΠΗΓΗ : μέσο ποσοστό άμμου: 80±0,05*80 x_1

χαλίκι : 100-(80±0,05*80) y_1

2^H ΠΗΓΗ : μέσο ποσοστό άμμου: 50±0,08*50 x_2

χαλίκι : 100-(50±0,08*50) y_2

3^H ΠΗΓΗ : μέσο ποσοστό άμμου: 70±0,05*70 x_3

χαλίκι : 100-(70±0,05*70) y_3

	ΑΜΜΟΣ	**ΧΑΛΙΚΙ**
1Η ΠΗΓΗ 3/10	$x_1 \to 80 \pm 4$	$y_2 \to 20 \pm 4$
2Η ΠΗΓΗ 3/10	$x_2 \to 50 \pm 4$	$y_2 \to 50 \pm 4$
3Η ΠΗΓΗ 4/10	$x_3 \to 70 \pm 3.5$	$y_3 \to 30 \pm 3.5$

$$\bar{x} = \frac{3}{10}\overline{x_1} + \frac{3}{10}\overline{x_2} + \frac{4}{10}\overline{x_3}$$

$$Var(x) = Var\left(\frac{3}{10}x_1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{4}{10}x_3\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Var(x) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 \operatorname{var} x_1 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 \operatorname{var} x_2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2 \operatorname{var} x_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Var(x) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 4^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 4^2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2 3.5^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 = 4{,}84$$
$$\Leftrightarrow \sigma = 2{,}2$$
$$\Leftrightarrow \mu = 80\frac{3}{10} + 50\frac{3}{10} + 70\frac{4}{10} = 67$$

άμμος : $N_1 \sim (\mu_1 \ , \sigma_1 \ )$: (67 , 22)
χαλίκι : $N_2 \sim (\mu_2 \ , \sigma_2 \ )$: (33 , 22)

θέτουμε : $2{,}6 < \mu_1/\mu_2 < 2{,}7$
$\mu_1 + \mu_2 = 100$ $\Leftrightarrow$ $2.6 < \mu_1/100-\mu_1 < 2.7$

$$2.6 < \frac{\mu_1}{100 - \mu 1} \Leftrightarrow 260 - 2.6\mu_1 < \mu_1 \Leftrightarrow 260 < 3.6\mu_1 \Leftrightarrow \mu_1 > 72{,}22222$$

$$\frac{\mu_1}{100 - \mu_1} < 2.7 \Leftrightarrow \mu_1 < 270 - 2.7\mu_1 \Leftrightarrow 2.7\mu_1 < 270 \Leftrightarrow \mu_1 < 72{,}97297$$

άρα έχουμε:

$$\mathrm{P}(2.6 < \mathrm{A} < 2.7) = \mathrm{P}(72{,}22222 < \chi < 72{,}97297) =$$

$$\Phi\left(\frac{72{,}97 - 67}{2{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{72{,}2222 - 67}{2{,}2}\right) = \Phi(2{,}715) - \Phi(2{,}374) = 0{,}99 - 0{,}99118 = 0{,}00547$$