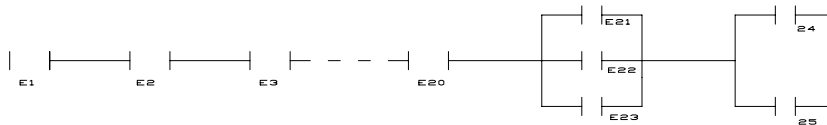


ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2002

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α

1) Τα εξαρτήματα ενός μηχανήματος συνδέονται ως εξής :



Όλα τα εξαρτήματα έχουν αξιοπιστία p . Να βρέθει η αξιοπιστία του μηχανήματος . (5%)
Θεωρούμε αξιοπιστία

ΛΥΣΗ:

Έχουμε την σύνδεση εξαρτημάτων με αξιοπιστία p . ζητάμε την αξιοπιστία(πιθανότητα) του μηχανήματος.
Έτσι έχουμε :

$$P(E_1) * P(E_2) * P(E_3) * \dots * P(E_{20}) * [P(E_{21}) + P(E_{22}) + P(E_{23})] / 3 * [P(E_{24}) + P(E_{25})] / 2$$

=

2) Γίνεται μια μελέτη για την λειψυδρία μιας πόλης κατά τον μήνα Αύγουστο. Να παρουσιαστεί αναλυτικά όλη η πιθανοθεωρητική θεώρηση θεωρώντας όλες τις τυχαίες μεταβλητές κανονικές (5%)

ΛΥΣΗ:

Αρχικά θεωρούμε όλες τις τυχαίες κατανομές συνεχείς. Έστω ότι η υδροδότηση μιας πόλης γίνεται από τρεις πηγές Π1,Π2,Π3. που ακολουθούν κανονικές κατανομές, (Π1, Π2, Π3 οι ημερήσιες παροχές). Έστω $\Pi_1 \sim N(30,4)$, $\Pi_2 \sim N(15,2)$, $\Pi_3 \sim N(10,1)$. Θεωρούμε ότι η ζήτηση είναι επίσης συνεχής κατανομή, κανονική με $Z \sim N(50,3)$. Το ζητούμενο είναι έστω να βρεθεί η πιθανότητα έλλειψης μία ημέρα. Για

να έχουμε έλλειψη πρέπει $Z > \Pi \Rightarrow \Pi - Z < 0$. Θεωρούμε $\Phi = \Pi - Z$. Η Φ θα είναι επίσης κανονική κατανομή με $\mu = -50 + 30 + 15 + 10 = 5$

$$\sigma = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2} = 5,4772$$

Θέλουμε την πιθανότητα

$$P(\Phi < 0) = \Phi\left(\frac{-5}{5,4772}\right) = \Phi(-0,9127) = 1 - \Phi(0,9127) = 1 - 0,8186 = 0,1814$$

Έστω ότι ζητούσαμε την έλλειψη τουλάχιστον 2 ημέρες την εβδομάδα. Θα λυθεί με διωνυμική κατανομή (δοκιμές Bernoulli).

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(0) - P(1) \Rightarrow$$

$$P(X \geq 2) = 0,3706$$

B) Θεωρούμε την ζήτηση ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα συνεχή κατανομή με $Z \sim N(50, 3)$ και την παροχή διακριτή με $\Pi = 60$ με πιθανότητα 0,7 ή $\Pi = 75$ με πιθανότητα 0,3.

$$P(\text{έλλειψη}) = P(E / \Pi = 60) * P(\Pi = 60) + P(E / \Pi = 75) * P(\Pi = 75) \Rightarrow$$

$$P(\text{έλλειψη}) = P(K > 60) * 0,7 + P(K > 75) * 0,3 =$$

$$= \left[1 - \Phi\left(\frac{60 - 50}{3}\right)\right] \cdot 0,7 + \left[1 - \Phi\left(\frac{75 - 50}{3}\right)\right] \cdot 0,3 = 0,0028$$

3) Γιατί στην μελέτη αντοχής ενός σκυροδέματος θεωρούμε την αντοχή του $A \sim N(\mu, \sigma)$, αν και η κανονική κατανομή παίρνει και αρνητικές τιμές.

Είναι πάντα αποδεχτή αυτή η θεώρηση; (5%)

ΛΥΣΗ:

Θεωρούμε ότι η αντοχή είναι κανονική κατανομή με $A \sim N(\mu, \sigma)$

και ότι σχεδόν ποτέ δεν παίρνει αρνητικές τιμές. Πράγματι,

$P(A < 0) = \Phi(0 - \mu/\sigma) = \Phi(-\mu/\sigma) = 1 - \Phi(\mu/\sigma) > 0$ που ισχύει για $\mu/\sigma > 3.5$ προσεγγιστικά. Το παραπάνω ισχύει και οπότε με ικανοποιητική προσέγγιση θεωρούμε ότι η αντοχή είναι κανονική κατανομή.

Μελετάμε τον τύπο σκυροδέματος C30: τότε $\mu = 300 \text{ kN/cm}^2$ και $\sigma < 3$.

Άρα $\mu/\sigma > 3.5$

4) Έστω X τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας $f(x)=c-[x]$, $-1 \leq x \leq 1$, c σταθερά. Αν $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ έχουν την ίδια συνάρτηση πιθανότητας να βρεθεί η $P_{2 < X_1 + \dots + X_{20} < 3}$ (10%)

ΛΥΣΗ:

$$f(x) = \begin{cases} c+x & \text{αν } -1 < x < 0 \\ c-x & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^0 (c+x) dx + \int_0^1 (c-x) dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[cx + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[cx - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 - \left(-c + \frac{1}{2} \right) + cx - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c - 1/2 + c - 1/2 = 1 \Leftrightarrow 2c - 1 = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

$$E(X) =$$

$$= \int_{-1}^0 x(1+x) dx + \int_0^1 x(1-x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + x) dx + \int_0^1 (x - x^2) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \mu = 0$$

$$\sigma^2 = \int_{-1}^0 (x-0)^2 (1+x) dx + \int_0^1 (x-0)^2 (1-x) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (x^2 + x^3) dx + \int_0^1 (x^2 - x^3) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 = -\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0,166667 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma = 0,40825$$

$$N : (0, 0,40825)$$

$$N_{20} : (20 \cdot 0, 0,40821 \cdot \sqrt{20}) : (0,1.826)$$

$$M_{20}=0, \sigma_{20}=1,826$$

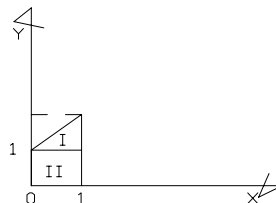
$$P(2 < x_1 + x_2 + \dots + x_{20} < 3) = \phi\left(\frac{3-0}{1.826}\right) - \phi\left(\frac{2-0}{1.826}\right) = \phi(1.643) - \phi(1.095) =$$

$$0,9498 - 0,8632 = 0,0866$$

Ή 8.66%

5) Έστω οι X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/4 \text{ αν τρίγωνο I} \\ (x+y)/4, \text{ τριγωνο II} \end{cases}$$



Είναι οι X, Y ανεξάρτητες ; να βρεθεί η $E(X)$ και η $Var Y$ (10%)

ΛΥΣΗ:

Οι X, Y έχουν από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , 0 < x < 1, 1 < y < 2 \\ (x+y)/4 & , 0 < x < 1, 0 < y < 1 \end{cases}$$

$y \backslash x$	0	1	2	$f_X(x)$
0	0	0.25	0.25	0.5
1	0.25	0.5	0.25	1
$f_Y(y)$	0.25	0.75	0.5	

Για να είναι τα X, Y , ανεξάρτητα θα πρέπει:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

Για $x=0$ και $y=1$ έχουμε : $F_{X,Y}(0,1) = 0.25 \cdot 0.25 = 0.0625$ άρα τα x, y δεν είναι ανεξάρτητα,

Για το $\mu = E(X) = \sum x f_X(x) = 0 \cdot f_X(0) + 1 \cdot f_X(1) = 0.75$

Για το $\mu = E(Y) = \sum y f_Y(y) = 0 \cdot f_Y(0) + 1 \cdot f_Y(1) = 0.75$

Για το $Var(Y) = \sum (y - \mu_y)^2 f_Y(y) = 0.75^2 \cdot 0.25 + 0.25^2 \cdot 0.75 + 1.25^2 \cdot 0.5 = 0.97$

6) Δίνεται ότι η x έχει ομοιόμορφη συνάρτηση πιθανότητας στο $[a, \beta]$. δίνεται επίσης και το δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$. Να γίνει εκτίμηση των παραμέτρων a, β με την μέθοδο των ροπών . (5%)

ΛΥΣΗ:

Εφόσον η X είναι ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή ισχύει ότι :

$$f(x) = \begin{cases} C \text{ αν } a \leq x \leq \beta \\ 0 \text{ αλλού} \end{cases}$$

Από συνθήκη κανονικοποίησης έχουμε :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} cdx = 1 \Rightarrow \left| cx \right|_{\alpha}^{\beta} = 1 \Rightarrow \beta c - \alpha c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

θα γίνει εκτίμηση των παραμέτρων με τη μέθοδο των Ροπών.

$$E(x) = \bar{X} \quad (1)$$

$$E(x^2) = \overline{X^2} \quad (2)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι :

$$E(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{και}$$

$$E(x^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Επομένως :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{και}$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}$$

Από τις σχέσεις (1,2) προκύπτει ότι :

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \bar{x} \quad (3)$$

$$\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3} = \overline{x^2} \quad (4)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (3,4) και με τον περιορισμό $\alpha < \beta$ έχουμε:

$$\hat{\alpha} = \frac{2\bar{x} - \sqrt{12\overline{x^2} - 12\bar{x}^2}}{2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{2\bar{x} + \sqrt{12\overline{x^2} - 12\bar{x}^2}}{2}$$

ΜΕΡΟΣ Β (60%)

1) Υποθέτουμε ότι τα δικινητήρια και τετρακινητήρια αεροπλάνα έχουν ιδίου τύπου μηχανές με αξιοπιστία P . υποθέτουμε ότι ένα αεροπλάνο πραγματοποιεί μια έπιτυχη πτήση αν λειτουργούν τουλάχιστον τα 50% των μηχανών του. Να βρεθεί για ποιες τιμές της P ένα τετρακινητήριο αεροπλάνο είναι πιο ασφαλές

ΛΥΣΗ:

Δικινητήριο :

η πιθανότητα να λειτουργούν όλες είναι : p^2

η πιθανότητα να λειτουργεί μία είναι : $p(1-p)^2$

η πιθανότητα να λειτουργεί τουλάχιστον μία είναι :

$$P^2(x > 1) = p^2 + 2p(1-p) = p^2 + 2p - 2p^2 = 2p - p^2 = p(2-p)$$

Τετρακινητήριο :

Η πιθανότητα να λειτουργούν τουλάχιστον δύο:

$$\begin{aligned} P_4(x \geq 2) &= p^4 + p^3(1-p)^4 + p^2(1-p)^6 = \\ &= p^4 + 4p^3 - 4p^4 = 6p^2(1-2p+p^2) = \\ &= 6p^2 + (1-4+6)p^4 + (4-12)p^3 = \\ &= 3p^2 - 8p^3 + 6p^4 \end{aligned}$$

θέτουμε $P_4(x > 2) > P_2(x > 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3p^4 - 8p^3 + 6p^2 \geq 2p - p^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3p^4 - 8p^3 + 7p^2 - 2p \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(3p^3 - 8p^2 + 7p - 2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 0,66667$$

$$p_3 =$$

μιγαδικές λύσεις

$$p_4 =$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για $\rho=0.7$ έχουμε : $P_4(x \geq 2) = 0.9163$
 $P^2(x \geq 1) = 0.91$

Για $\rho=0.8$ έχουμε : $P_4(x \geq 2) = 0.9728$
 $P^2(x \geq 1) = 0.96$

Για $\rho=0.6$ έχουμε : $P_4(x \geq 2) = 0.82$
 $P^2(x \geq 1) = 0.84$

2) α) Επιλέγουμε ένα αριθμό στην τύχη μεταξύ 0 και 1, και ένα δεύτερο αριθμό στην τύχη μεταξύ 1 και 3. να βρεθεί η πιθανότητα το γινόμενο τους να είναι μεγαλύτερο του 1.

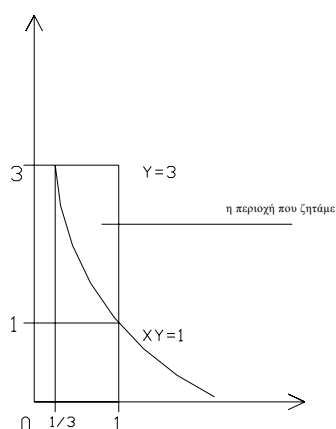
Β) υποθέτουμε ότι η θ είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο $\{-\pi/2, \pi/2\}$. Να βρεθεί η πιθανότητα το $\sin\theta > 1/3$

Γ) έστω x τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = c/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, c σταθερά

Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της $Y = 1/X$

ΛΥΣΗ:

Επιλέγω τυχαία ένα αριθμό μεταξύ 0 και 1, και ένα άλλο μεταξύ 1 και 3.
 $A \cdot B > 1 \Rightarrow XY > 1 \Rightarrow Y = 1/X$ Θα πάρω τα σημεία πάνω από την υπερβολή $Y = 1/X$



η περιοχή αυτή είναι : $\int_{1/3}^1 \left(3 - \frac{1}{x}\right) dx = \dots = 2 - \ln 3$
 άρα η $P=2-\ln 3/2$

B) θέλουμε την πιθανότητα $\sin \theta > 1/3$

$\sin \theta > 1/3 \Rightarrow \theta > 0,33984 \text{ rad και } \theta < \pi/2$

Για να ισχύει $\sin \theta > 1/3$, με το να είναι ομοιόμορφα κατανομημένη
 Στο $[-\pi/2, \pi/2]$, θα πρέπει να ισχύει

$$0,33984 < \theta < \pi/2$$

επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P(0,33984 < \theta < \pi/2)$$

Η θ είναι ομοιόμορφα κατανομημένη και άρα ισχύει :

$$F(x) = \begin{cases} C & \text{αν } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{Αλλού} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 1 \Leftrightarrow \pi c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{\pi}$$

$$E(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\pi} x dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(-\frac{\pi}{2} \right)^2 \right] = 0$$

$$E(x^2) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^3 - \left(-\frac{\pi}{2} \right)^3 \right] =$$

$$= \frac{1}{3\pi} 2 \frac{\pi^3}{2^3} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{\pi^2}{12} \Leftrightarrow$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi^2}{12}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

συνεπώς έχουμε : $\theta \sim N(0, \frac{\sqrt{3}\pi}{6})$

$$P(0,33984 < \theta < \pi/2) =$$

$$\Phi\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}\right) - \Phi\left(\frac{0,33984 - 0}{\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{6\chi}{2\chi\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{6 \cdot 0,33984}{\pi\sqrt{3}}\right) =$$

$$\Phi(1,732) - \Phi(0,375) = 0,9582 - 0,64615 = 0,312$$

□ : έχουμε χ τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$\Phi(\chi) = \frac{c}{1 + \chi^2}, \chi \in R, c \in R \quad c \text{ η σταθερά.}$$

Για την συνάρτηση πιθανότητας έχουμε

$$c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \chi^2} dx = 1 \Rightarrow c\pi = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$$

Για την συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \chi^2} dx = \frac{1}{\pi} \pi = 1$$

για την συνάρτηση πιθανότητας της $Y=1/X$

Έστω $f_y(y)$ η συνάρτηση πιθανότητας της Y . Αρκεί να βρώ την συνάρτηση κατανομής της Y , έστω $F_y(y)$

$$F_y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{x} \leq y\right) = P\left(x \geq \frac{1}{y}\right) = P\left(x \leq \frac{-1}{x}\right) = F_x\left(\frac{-1}{y}\right)$$

Επομένως :

$$f_y(y) = [F_Y(Y)] = f_x\left(\frac{-1}{y}\right) \left[-\left(\frac{-1}{y^2}\right) \right] = f_x\left(\frac{-1}{y}\right) \frac{1}{y^2} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{y^2+1}} \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi} \frac{y^2}{1+y^2} \frac{1}{y^2} = \frac{1}{(1+y^2)} \frac{1}{\pi}$$

3) Έστω X τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\theta, \sigma^2)$. Δίνεται και το δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$ [η σ θεωρείται άγνωστη. Να βρεθεί η αμερόληπτη εκτιμήτρια για την θ^2 .

ΛΥΣΗ:
