

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ (5-9-2005)

ΟΜΑΔΑ Α (40%)

1) Αν τα ενδεχόμενα A, B, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ανεξάρτητα μπορούμε να πούμε το ίδιο για τα

α) $A \cup B, \Gamma$

β) $A, B \cap \Gamma$

γ) $A \cap B, A \cap \Gamma$

Να δικαιολογηθεί με μαθηματικές πράξεις η απάντηση.

ΛΥΣΗ:

α)
$$\begin{aligned} P[(A \cup B) \cap \Gamma] &= P[(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)] = P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma) = \\ &= P(A) P(\Gamma) + P(B) P(\Gamma) - P(A) P(B) P(\Gamma) = P(\Gamma) [P(A) + P(B) - P(A) P(B)] = \\ &= P(\Gamma) [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = P(\Gamma) P(A \cup B) \end{aligned}$$

β)
$$P[A \cap (B \cap \Gamma)] = P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) P(B) P(\Gamma) = P(A) P(B \cap \Gamma)$$

γ)
$$P[(A \cap B) \cap (A \cap \Gamma)] = P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) P(B) P(\Gamma) \quad (1)$$

$$P[(A \cap B) \cap (A \cap \Gamma)] = P[A]^2 P(B) P(\Gamma) \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$[P(A)]^2 = P(A) \Rightarrow P(A) = 1 \quad \text{μόνο για αυτή την τιμή ισχύει}$$

Για να είναι τα ενδεχόμενα A, B, Γ ανεξάρτητα πρέπει να ισχύει:

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) P(B) P(\Gamma)$$

2) α) Αν $X \sim N(5, 7)$ και $Y=3X^2$, να υπολογιστεί η προσδοκώμενη τιμή του Y .
β) Να βρεθεί επίσης η προσδοκώμενη τιμή του Y αν η X είναι λογαριθμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $\lambda = 3$, $\zeta = 1$.

ΛΥΣΗ:

$$\alpha) E(Y) = E(3X^2) = 3E(X^2) = 3[Var(X) - [E(X)]^2] \Rightarrow$$

$$E(Y) = 3(7^2 - 5^2) = 3(49 - 25) = 3 \cdot 24 = 72$$

$$\beta) \text{ Η } X \text{ είναι λογαριθμοκανονική} \Rightarrow E(X) = e^{\lambda + \frac{1}{2}\zeta} \text{ και } Var(X) = \mu^2(e^{\zeta^2} - 1)$$

$$E(X) = e^{3+0,5 \cdot 1^2} \Rightarrow E(X) = e^{3,5}$$

$$Var(X) = (e^{3,5})^2 (e^{1^2} - 1) = e^7 (e - 1) = e^8 - e^7$$

$$E(Y) = 3E(X^2) = 3[Var(X) - [E(X)]^2] = 3(e^8 - e^7 - e^7) \Rightarrow$$

$$E(Y) = 2363,075$$

3) Η συνάρτηση κατανομής που χρησιμοποιείται σε μοντέλα (ακόμα και πολεοδομικά) αύξησης πληθυσμού είναι $F(X) = \frac{1}{1 + e^{-(ax+b)}}$, $-\infty < X < +\infty, a, b > 0$. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X ικανοποιεί τη σχέση: $f(x) = aF(x)(1-F(x))$.

ΛΥΣΗ:

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση κατανομής για να πάρουμε τη συνάρτηση πιθανότητας.

$$f(x) = F'(x) = \frac{ae^{-(ax+b)}}{[1 + e^{-(ax+b)}]^2} = \frac{1}{1 + e^{-(ax+b)}} \frac{ae^{-(ax+b)}}{1 + e^{-(ax+b)}} \Rightarrow$$

$$f(x) = F(x) \frac{ae^{-(ax+b)} + a - a}{1 + e^{-(ax+b)}} = F(x) \left[\frac{a(1 + ae^{-(ax+b)})}{1 + e^{-(ax+b)}} - \frac{a}{1 + e^{-(ax+b)}} \right] \Rightarrow$$

$$f(x) = F(x) [a - aF(x)] = aF(x) [1 - F(x)]$$

4) Αν X, Y, Z τ.μ. με $z = \frac{3X^2}{Y}$ με παρατηρήσεις για τη X : 3, 3.2, 3.5, 3.1 και για τη Y : 1, 1.1, 1.4, 1.2 να υπολογιστεί πιθανότητα $P(3 < Z < 3.2)$ θεωρώντας μια βολική συνάρτηση πιθανότητας για όλους τους υπολογισμούς.

ΛΥΣΗ:

$$\mu_x = \frac{3 + 3.2 + 3.5 + 3.1}{4} = 3.2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(3 - 3.2)^2 + (3.2 - 3.2)^2 + (3.5 - 3.2)^2 + (3.1 - 3.2)^2}{3} = 0.0467$$

$$\mu_y = \frac{1 + 1.1 + 1.4 + 1.2}{4} = 1.175$$

$$\sigma_y^2 = \frac{(1 - 1.175)^2 + (1.1 - 1.175)^2 + (1.4 - 1.175)^2 + (1.2 - 1.175)^2}{3} = 0.029167$$

$$\text{Ισχύει } Z = \frac{3X^2}{Y}$$

Θεωρούμε X, Y λογαριθμικές με $X \sim (\lambda_x, \zeta_x)$ και $Y \sim (\lambda_y, \zeta_y)$

$$\text{όπου } \zeta_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \quad \text{άρα } \zeta_x = \frac{0.216}{3.2} = 0.0675$$

$$\text{όπου } \lambda_x = \ln \mu_x - \frac{1}{2} \zeta_x^2 \quad \text{άρα } \lambda_x = \ln 3.2 - \frac{1}{2} 0.0675^2 = 1.1608$$

$$\text{όπου } \zeta_y = \frac{\sigma_y}{\mu_y} = \frac{0.1708}{1.175} = 0.1453$$

$$\text{όπου } \lambda_y = \ln \mu_y - \frac{1}{2} \zeta_y^2 = \ln 1.175 - \frac{1}{2} 0.1453^2 = 0.1507$$

$$\text{App } \ln Z = \ln \left(\frac{3X^2}{Y} \right) = \ln(3X^2) - \ln Y = \ln 3 + 2 \ln X - \ln Y$$

$$\text{App } \ln Z \sim N(\lambda_z, \zeta_z)$$

$$\text{όπου } \lambda_z = \ln 3 + 2\lambda_x - \lambda_y = 3.27$$

$$\text{όπου } \zeta_z = \sqrt{\ln 3 + 4\zeta_x^2 + \zeta_y^2} = 1.066$$

$$\text{αρα } P(3 < Z < 3.2) = P(\ln 3 < \ln Z < \ln 3.2) = P(1.099 < \ln Z < 1.163) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1.163 - 3.27}{1.066}\right) - \Phi\left(\frac{1.099 - 3.27}{1.066}\right) = \Phi(-1.977) - \Phi(-2.037) =$$

$$= [1 - \Phi(1.977)] - [1 - \Phi(2.037)] = (1 - 0.9761) - (1 - 0.9793) = 0.0032 \approx 0.00$$

5) Ποια είναι η εκτίμηση της παραμέτρου μιας γεωμετρικής κατανομής με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοεπιφάνειας; Ποια με τη μέθοδο των ροπών;

ΛΥΣΗ:

Με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοεπιφάνειας:

$$1) L(x, p) = p(1-p)^{x-1} \Rightarrow$$

$$L(x_1 x_2 \dots x_n, p) = p(1-p)^{x_1-1} * p(1-p)^{x_2-1} * \dots * p(1-p)^{x_n-1} = p^n (1-p)^{x_1+x_2+\dots+x_n-n}$$

$$2) \ln L(x, p) = \ln L(x_1 x_2 \dots x_n, p) = \ln(p^n (1-p)^{x_1+x_2+\dots+x_n-n}) = \ln p^n + \ln((1-p)^{x_1+x_2+\dots+x_n-n}) = n \ln p + (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \ln(1-p)$$

$$3) \frac{d \ln L(x_1 x_2 \dots x_n, p)}{dp} = 0$$

$$\Rightarrow n \frac{1}{p} - (x_1 + x_2 + \dots + x_n - n) \frac{1}{1-p} = 0$$

$$\Rightarrow n(1-p) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n - n)p = 0$$

$$\Rightarrow n - np - (x_1 + x_2 + \dots + x_n - n)p = 0$$

$$\Rightarrow n - p(n + x_1 + x_2 + \dots + x_n - n) = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Με τη ροπών:

$$E(X) = \mu = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$\text{Αλλά } E(X) = 1/p$$

Αρα :

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = 1/p$$

$$p = \frac{n}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}$$

ΟΜΑΔΑ Β (60%)

1) Έστω ότι έχουμε δοκίμια ενός συγκεκριμένου τύπου σκυροδέματος. Γνωρίζουμε ότι το 60% αυτών είναι αποδεκτά (πάνω από την ελάχιστη επιτρεπόμενη αντοχή). Επειδή τα αποδεκτά δοκίμια έχουν μπερδευτεί με τα μη αποδεκτά χρησιμοποιούμε ένα τεστ θλιπτικής αντοχής που υποβάλουμε αυτά τα δοκίμια για να ελέγξουμε αν είναι αποδεκτά ή όχι. Το τεστ αυτό δίνει 90% σωστή διάγνωση αν το δοκίμιο είναι πράγματι αποδεκτό ενώ δίνει 3% λαθεμένη διάγνωση αν το δοκίμιο δεν είναι στην πραγματικότητα αποδεκτό. Ένα τυχαίο δοκίμιο υποβάλλεται σε τρία τεστ και τα δύο δείχνουν ότι είναι αποδεκτό (επιτρεπτής αντοχής). Ποια η πιθανότητα να είναι πράγματι αποδεκτό; Ποια είναι η πιθανότητα ότι ένα τέταρτο τεστ θα χαρακτηρίσει το δοκίμιο «αποδεκτό»;

ΛΥΣΗ:

$A = \{ \text{πράγματι αποδεκτό δοκίμιο} \}$

$B_n = \{ \text{το } n\text{-οστό τεστ λέει αποδεκτό δοκίμιο} \}$

$$P(A) = 0,60$$

$$P(A^c) = 0,40$$

$$P(B/A) = 0,90$$

$$P(B^c/A) = 0,10$$

$$P(B/A^c) = 0,03$$

Δύο από τα τρία τεστ δείχνουν το δοκίμιο αποδεκτό:

$$\Gamma = \{B_1 B_2 B_3^c, B_1 B_2^c B_3, B_1^c B_2 B_3\}$$

α) Ποια η πιθανότητα να είναι πράγματι αποδεκτό; $P(A/\Gamma) =$;

β) Ποια η πιθανότητα ότι ένα τέτοιο τεστ θα χαρακτηρισθεί το δοκίμιο αποδεκτό;

$$P(B_4/\Gamma) =$$

$$P(B) = P[B \cap (A \cup A^c)] = P[(B \cap A) \cup (B \cap A^c)] =$$

$$P(B/A)P(A) + P(B/A^c)P(A^c) = 0,90 * 0,60 + 0,03 * 0,40 = 0,552$$

$$\alpha) P(A/\Gamma) = \frac{P(A)P(\Gamma/A)}{P(\Gamma/A)P(A) + P(\Gamma/A^c)P(A^c)} \quad (1)$$

$$P(\Gamma/A^c) = \binom{3}{2} P(B_1/A^c)P(B_2/A^c)P(B_3^c/A^c) = 3 * 0,03 * 0,03 * 0,97 = 0,002619$$

$$P(\Gamma/A) = \binom{3}{2} P(B_1/A)P(B_2/A)P(B_3^c/A) = 3 * 0,90 * 0,90 * 0,10 = 0,243$$

Από την σχέση (1) έχουμε:

$$P(A/\Gamma) = \frac{0,60 * 0,243}{0,243 * 0,60 + 0,002619 * 0,40} = 0,9929$$

$$\beta) P(B_4/\Gamma) = \frac{P(B_4\Gamma)}{\Gamma} = \frac{P(B_4)P(\Gamma)}{P(\Gamma)} = P(B_4) = P(B) = 0,552$$

2) Για την πρόσληψη ενός εργοταξιάρχη σε ένα εργοτάξιο στην Πίνδο, μια επιτροπή της τεχνικής εταιρίας ΔΥΝΑΜΙΚΗ έχει να επιλέξει από ένα πλήθος υποψηφίων διπλωματούχων Πολιτικών Μηχανικών που υπέβαλαν αίτηση. Η επιτροπή αποφασίζει να εξετάσει έναν-έναν, που επιλέγεται τυχαία μέχρις ότου πετύχει κάποιον υποψήφιο ικανό για εργοταξιάρχη.

α) Αν υποτεθεί ότι το 20% των υποψηφίων είναι ικανοί για εργοταξιάρχες, ποια η πιθανότητα η επιτροπή να απορρίψει το πολύ δύο υποψηφίους;

β) Αν η απόρριψη κάθε υποψηφίου έχει κόστος της τάξης των 40 ευρώ, ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του κόστους για την πλήρωση της θέσης.

ΛΥΣΗ:

α) Έχουμε γεωμετρική κατανομή

Έστω X : ο αριθμός των δοκιμών μέχρι τη 1^η επιτυχία.

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= 0.2 * 0.8^{-1} + 0.2 + 0.2 * 0.8 + 0.2 * 0.8^2 = 0.738$$

β) Έστω κόστος: $Y = 40(X-1)$

$$\text{αρα } E(Y) = E(40(X-1)) = 40E(X-1) = 40\left(\frac{1}{0.2} - 1\right) = 160$$

$$Var(X) = Var(40(X-1)) = 1600\left(\frac{1-0.2}{0.2^2} - 1\right) = 30400$$

3) Ένα εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρικών ανιχνευτών παράγει 15% ελαττωματικούς ανιχνευτές. Ας υποθέσουμε ότι 10 τέτοιοι ανιχνευτές επιλέγονται τυχαία, συσκευάζονται και χωρίς να ελεγχθούν διοχετεύονται στο εμπόριο. Αν το κόστος επιδιόρθωσης δίνεται από τη σχέση $K=3X^2$ όπου X ο αριθμός των ελαττωματικών να βρεθεί το αναμενόμενο κόστος επιδιόρθωσης.

ΛΥΣΗ:

$$E(K) = 3E(X^2) = 3 \left[Var(X) - [E(X)]^2 \right] \quad (1)$$

$$P(\text{ελαττωματικός}) = 0,15$$

$$P(\text{μη ελαττωματικός}) = 0,85$$

X : ο αριθμός n ελαττωματικών δοκιμών είναι Bernoulli

$$n = 10$$

$$\rho = 0,15$$

$$E(X) = n\rho = 10 * 0,15 = 1,5$$

$$Var(X) = n\rho(1-\rho) = 10 * 0,15 * (1-0,15)$$

Από την σχέση (1) έχουμε:

$$E(K) = 3 * (1,275 - 1,5^2) \Rightarrow E(K) = -2,925$$