# ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

**ΜΕΡΟΣ Α (40%)**

1. Έστω X, Y είναι τ.μ. με εκθετική σ.π. Τι συμπέρασμα εξάγεται για την τ.μ. Z=min {X, Y}; (Θεωρείστε X, Y ανεξάρτητες) (10%)

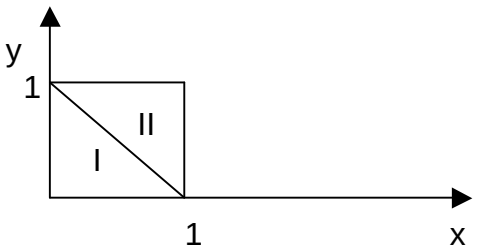
<u>Λύση:</u>

Έστω ότι η σ.π. της X είναι $f_X(x) = ke^{-kx}$ και της Y είναι $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$.

Θεωρούμε σ.κ. $F_z(z)$

$$F_z(z) = P(Z \le z) = P(\min\{X,Y\} \le z) = 1 - P(\min\{X,Y\} \ge z) = 1 - P(X \ge z, Y \ge z) =$$
$$1 - P(X \ge z) * P(Y \ge z) = 1 - [1 - P(X \le z)] * [1 - P(Y \le z)] = 1 - [1 - F_X(z)] * [1 - F_Y(z)] =$$
$$1 - e^{-kz} * e^{-\lambda z} = 1 - e^{-(\kappa+\lambda)z} \Rightarrow F_Z(z) = 1 - e^{-(\kappa+\lambda)z} \Rightarrow f_Z(z) = (\kappa + \lambda)e^{-(\kappa+\lambda)z}$$

2. Έστω X, Y έχουν την από κοινού σ.π. f(x,y)={3/2 στην περιοχή I και 1/2 στην περιοχή II}. Να βρεθεί η $f_X(x)$. (10%)




<u>Λύση:</u>

$$f_{Xx}(x) = \int_{-00}^{+00} f(x,y)dy = \frac{3}{2}\int_0^{1-x} dy + \frac{1}{2}\int_{1-x}^{1} dy = \frac{3}{2}\Big[y\Big]_0^{1-x} + \frac{1}{2}\Big[y\Big]_{1-x}^{1} = \frac{3}{2} * (1-x) + \frac{1}{2} * (1-1+x) = \frac{3}{2} - x$$

Άρα $f_X(x) = \frac{3}{2} - x$

3. Έστω X, Y ανεξάρτητες με μέση τιμή 2 και διασπορά 1. Έστω U=3X+2Y και V=2X-3Y. Να βρεθεί το Var(U) και Cov(U,V). (10%)

<u>Λύση:</u>

E(X)=2 και Var(X)=1
E(Y)=2 και Var(Y)=1

Var(U)= $3^2$*Var(X)+ $2^2$*Var(Y)=13

E(U)=3*2+2*2=10
E(V)=2*2-3*2=-2

Cov(U,V)= E(UV)- E(U)* E(V) (1)

U*V = (3X+2Y)*(2X-3Y)=$6X^2$ –9XY+ 4XY- $6Y^2$=$6X^2$ –5XY –$6Y^2$⇒

$\Rightarrow E(UV)= E(6X^2 -5XY -6Y^2)= E(6X^2)- E(5XY)- E(6Y^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow E(UV)= 6E(X^2)- 5E(XY)-6E(Y^2)$ (2)

Αλλά $E(X^2)= Var(X)+[E(X)]^2 =1+2^2=5$ και $E(Y^2)= Var(Y)+[E(Y)]^2=1+2^2=5$
Και $E(XY)= E(X)* E(Y)=2*2=4$ επειδή οι X, Y ανεξάρτητες

Οπότε (2) $\Rightarrow E(UV)=6[Var(X)+[E(X)]^2]-5 E(X)* E(Y)-6 E(Y^2)= Var(Y)+[E(Y)]^2\Rightarrow$

$\Rightarrow E(UV)=6*5 - 5*2*2 -6*5= -20$ (3)

Η (1) λόγω των (2) και (3) γίνεται:

$Cov(U,V)= -20 -10(-2)=0$

4. Έστω $V = k\frac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2}$ (τύπος Manning) όπου n, R, S είναι τ.μ. Να βρεθεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης για τη V, αν έχουμε $R_1,R_2,\ldots,R_n$ μετρήσεις για την R, $S_1,S_2,\ldots,S_K$ μετρήσεις για την S και $n_1,n_2,\ldots,n_j$ μετρήσεις για την n.
(k= σταθερά) (10%)

<u>Λύση:</u>

$$\overline{R} = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_n}{n} \quad \text{και} \quad \bar{s}_R{}^2 = \frac{(R_1 - \overline{R})^2 + (R_1 - \overline{R})^2 + \ldots + (R_n - \overline{R})^2}{n-1}$$

$$\overline{S} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_k}{k} \quad \text{και} \quad \bar{s}_S{}^2 = \frac{(S_1 - \overline{S})^2 + (S_2 - \overline{S})^2 + \ldots + (S_k - \overline{S})^2}{k-1}$$

$$\overline{n} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_j}{j} \quad \text{και} \quad \bar{s}_n{}^2 = \frac{(n_1 - \overline{n})^2 + (n_2 - \overline{n})^2 + \ldots + (n_j - \overline{n})^2}{j-1}$$

$$Var(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial \overline{R}}\right)^2_{(\overline{R}.\overline{S},\overline{n})} * \bar{s}_R{}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \overline{S}}\right)^2_{(\overline{R}.\overline{S},\overline{n})} * \bar{s}_S{}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \overline{n}}\right)^2_{(\overline{R}.\overline{S},\overline{n})} * \bar{s}_n{}^2 =$$

$$= \left[\frac{2k}{3\overline{n}}\overline{R}^{-1/3}\overline{S}^{1/2}\right]^2 * \bar{s}_R{}^2 + \left[\frac{1}{2}\frac{k}{\overline{n}}\overline{R}^{2/3}\overline{S}^{-1/2}\right]^2 * \bar{s}_S{}^2 + \left[-\frac{k}{\overline{n}^2}\overline{R}^{2/3}\overline{S}^{1/2}\right]^2 * \bar{s}_n{}^2$$

Έστω 99% το επίπεδο εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή της V.
Τότε $1-\alpha=0.99\Rightarrow\alpha=0.01\Rightarrow\alpha/2=0.005\Rightarrow1-\alpha/2=0.995\Rightarrow\Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0.995) \Rightarrow$
$K_{\alpha/2}=2.575$

Τότε: $\mu_{\overline{V}} \in \left[\overline{V} - k_{\alpha A/2} * \sigma_V , \overline{V} + K_{\alpha/2} * \sigma_V\right]$

**ΜΕΡΟΣ Β (60%)**

1. Έστω X, Y, Z τ.μ. που παριστάνουν την αντοχή τριών δοκών με την ίδια σ.π. N(300,10).

α)Να βρεθεί η πιθανότητα η μέγιστη αντοχή να είναι μικρότερη από 290 kp/cm$^2$.
β)Να βρεθεί η πιθανότητα η ελάχιστη αντοχή να είναι μεγαλύτερη από 290 και ταυτόχρονα η μέγιστη κάτω από 305.

<u>Λύση:</u>
α)

$$P(\max\{X,Y,Z\}\le 290)=P(X\le 290, Y\le 290, Z\le 290)=P(X\le 290)*P(Y\le 290)*P(Z\le 290)=$$
$$=\Phi\left(\frac{290-300}{10}\right)*\Phi\left(\frac{290-300}{10}\right)*\Phi\left(\frac{290-300}{10}\right)=[\Phi(-1)]^3=[1-\Phi(1)]^3=[1-0{,}8413]^3\cong 0{,}004$$

β)

$$P[\min\{X,Y,Z\}\ge 290 \text{ και } \max\{X,Y,Z\}\le 305]=$$
$$=P[X\ge 290, Y\ge 290, Z\ge 290 \text{ και } X\le 305, Y\le 305, Z\le 305]=$$
$$=P[(290\le X\le 305),(290\le Y\le 305),(290\le Z\le 305)]=$$
$$=P(290\le X\le 305)*P(290\le Y\le 305)*P(290\le Z\le 305)=$$
$$=\left[\Phi\left(\frac{305-300}{10}\right)-\Phi\left(\frac{290-300}{10}\right)\right]*\left[\Phi\left(\frac{305-300}{10}\right)-\Phi\left(\frac{290-300}{10}\right)\right]*\left[\Phi\left(\frac{305-300}{10}\right)-\Phi\left(\frac{290-300}{10}\right)\right]=$$
$$=\left[\Phi\left(\frac{305-300}{10}\right)-\Phi\left(\frac{290-300}{10}\right)\right]^3=[\Phi(0{,}5)-\Phi(-1)]^3=[\Phi(0{,}5)-1+\Phi(1)]^3=$$
$$=[0{,}6915-1+0{,}9332]^3=[0{,}6247]^3\cong 0{,}244$$

2. 1000 άτομα φτάνουν ανεξάρτητα και τυχαία σε μια αφετηρία από 12:00 και 17:00. Να βρεθεί η πιθανότητα ότι τουλάχιστο 175 άτομα θα φτάσουν την πρώτη ώρα. (20%)

<u>Λύση 1(Poisson):</u>

‘Εστω $X_1$ ο αριθμός των αφίξεων την πρώτη ώρα

$$P(X_T\le x)=\frac{(vt)^x}{x}e^{-vt}$$

$$P(X_1\ge 175)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+...+P(X=174)\right]$$

$v=\frac{1000}{5}=200$ $\alpha\phi\iota\xi/\omega\rho\alpha$ ο μέσος όρος των αφίξεων

Θεωρούμε $X_5$ N(μ,σ) με $\mu=vt=200*1=200$ και

$$\sigma=\sqrt{vt}=\sqrt{200*1}=\sqrt{200}=14{,}14$$

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα η παραπάνω εκθετική προσεγγιστικά μπορεί να θεωρηθεί κανονική κατανομή.

Έτσι

$$P(X_1 \geq 175) = 1 - P(X_1 \leq 175) = 1 - \Phi\left(\frac{175-200}{\sqrt{200}}\right) = 1 - \Phi(-1{,}77) = 1 - 1 + \Phi(1{,}77) = 0{,}9616$$

<u>Λύση 2(Κατανομή Bernoulli):</u>

Έστω X ο αριθμός των ατόμων που φτάνουν την πρώτη ώρα
Για ένα οποιοδήποτε άτομο η πιθανότητα να φτάσει την πρώτη ώρα είναι 1/5 (ένα άτομο σε 5 ώρες .
Το πείραμα αυτό είναι ένα πείραμα Bernoulli με n=1000 και p=1/5
Τότε η X είναι διωνυμική κατανομή με μ= n*p=1000*1/5=200 και
$\sigma^2$= n*p*q=1000*(1/5)*(4/5)=160

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα η παραπάνω εκθετική προσεγγιστικά μπορεί να θεωρηθεί κανονική κατανομή.

$$P(X_1 \geq 175) = 1 - P(X_1 \leq 175) = 1 - \Phi\left(\frac{175-200}{\sqrt{160}}\right) = 1 - \Phi(-1{,}976) = 1 - 1 + \Phi(1{,}976) = 0{,}9761$$

3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα δείγμα της τ.μ. X με σ.π. $f(x,\vartheta) = \frac{xe^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^2}$ με x>0, θ>0. Δίνεται E(X)=2θ και Var(X)=$2\theta^2$.

α)Να εκτιμηθεί ο θ με τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοεπιφάνειας.
β)Να βρεθεί (λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη ερώτηση) εκτιμητής για το Var(X). Να αποδειχθεί ότι ο εκτιμητής αυτός δεν είναι αμερόληπτος.
γ)Να βρεθεί αμερόληπτος εκτιμητής για το Var(X). (20%)

<u>Λύση:</u>

α)Έστω $f(x,\vartheta) = \frac{xe^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^2}$

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i e^{-\frac{x_i}{\theta}}}{\theta^2}\right) = \left(\frac{x_1 e^{-\frac{x_1}{\theta}}}{\theta^2}\right) * \left(\frac{x_2 e^{-\frac{x_2}{\theta}}}{\theta^2}\right) * \ldots * \left(\frac{x_n e^{-\frac{x_n}{\theta}}}{\theta^2}\right)$$

$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_n e^{-\frac{x_n}{\theta}}}{\theta^2}\right) = \ln\frac{1}{\theta^{2n}} + \ln\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = -2n\ln\theta + \ln\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Για $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ βρίσκουμε τον εκτιμητή θ

$$-\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n}$$

αλλά $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n}$, οπότε $\theta = \frac{\overline{X}}{2}$

$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{\overline{X}}{2}\right) = \frac{1}{2}E(\overline{X}) = \frac{1}{2}2\theta = \theta$ άρα θ αμερόληπτος εκτιμητής

β) Var(X)=2θ$^2$ . Έστω ότι $\hat{Var}(X) = 2\left(\frac{\overline{X}}{2}\right)^2 = \frac{\overline{X}^2}{2}$

Για να είναι ο παραπάνω αμερόληπτος εκτιμητής της διασποράς θα πρέπει
$E(\hat{Var}(X)) = Var(X)$

$$E[\hat{Var}(X)] = E\left(\frac{\overline{X}^2}{2}\right) = \frac{1}{2}E(\overline{X}^2) = \frac{1}{2}\left[Var(\overline{X}) + (E(\overline{X}))^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{Var(X)}{n} + (E(X))^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\theta^2}{n} + (2\theta)^2\right] = \frac{1}{2}2\theta^2\left[\frac{1}{n} + 2\right] = 2\theta^2\left[\frac{1+2n}{2n}\right]$$

Άρα ο αμερόληπτος εκτιμητής θα είναι $\hat{Var}(X) = \frac{2n}{1+2n} * \frac{\overline{X}^2}{2} = \frac{n\overline{X}^2}{1+2n}$