Χρήστος Ι. Σχοινάς
Αν. Καθηγητής ΔΠΘ

Σημειώσεις για το μάθημα: «Βασικές Αρχές Θεωρίας Συστημάτων» (Μέρος Α΄)

ΞΑΝΘΗ, 2008

ΚΕΦΑΛΑΙΟ
1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.1 Ορισμοί και ιδιότητες

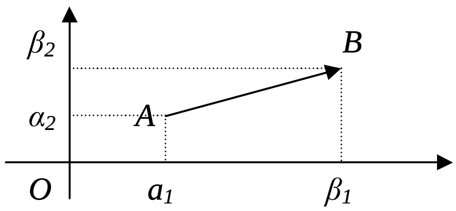
Συχνά, σε διάφορα προβλήματα στα Μαθηματικά, συναντάμε αλγεβρικά συστήματα αποτελούμενα από ένα σύνολο εφοδιασμένο με μία σχέση γραμμικότητας η οποία διέπει τα στοιχεία του. Το γεγονός αυτό τα καθιστά μείζονος σημασίας και εξαιρετικού ενδιαφέροντος. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την πλέον σημαντική έκφανση τέτοιων αλγεβρικών συστημάτων τα οποία ονομάζονται διανυσματικοί χώροι.

<u>Ορισμός 1.1</u> ***Διανυσματικός χώρος V πάνω στο σύνολο*** **¡** *ή* ***πραγματικός διανυσματικός χώρος V*** *λέγεται κάθε σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης μεταξύ των στοιχείων του V και του πολλαπλασιασμού μεταξύ πραγματικών αριθμών και στοιχείων του V που ικανοποιούν τα παρακάτω αξιώματα:*

1) $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$
2) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$
3) $\exists\vec{0}\in V$, *τέτοιο ώστε* $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$
4) $\forall\vec{x}\in V$, $\exists(-\vec{x})\in V$, *τέτοιο ώστε* $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$
5) $l(\vec{x}+\vec{y})=l\vec{x}+l\vec{y}$
6) $(l+m)\vec{x}=l\vec{x}+m\vec{x}$
7) $(lm)\vec{x}=l(m\vec{x})$
8) $1\vec{x}=\vec{x}$

Τότε τα στοιχεία του V καλούνται ***διανύσματα.***

<u>Ορισμός 1.2</u> *Το διατεταγμένο ζεύγος σημείων του* $\mathbb{R}^2$ *ονομάζεται* ***προσανατολισμένο διάνυσμα του*** $\mathbb{R}^2$ *με αρχικό σημείο ή αρχή το* *$A(\alpha_1,\alpha_2)$ και τελικό σημείο ή πέρας το $B(\beta_1,\beta_2)$ και συμβολίζεται με* $\overrightarrow{AB}$ *ή εναλλακτικά με* $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$ *(ή* $\overline{x}$ *ή* $\underline{x}$*). Οι συντεταγμένες του* $\overrightarrow{AB}$ *τότε είναι οι* b_1-a_1 *και* b_2-a_2 .

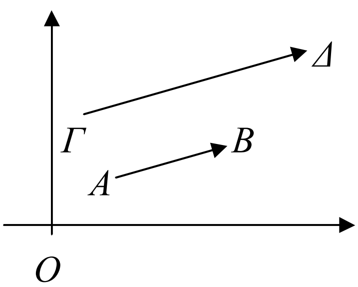


Σχήμα 1.1

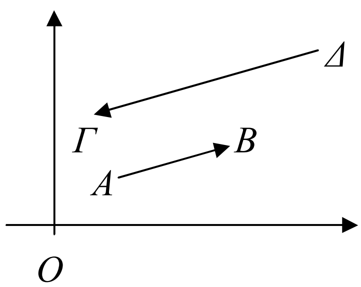
<u>Ορισμός 1.3</u> *Δύο διανύσματα* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *και* $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ *λέγονται* ***παράλληλα****, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός* $c\neq 0$ *τέτοιος ώστε*

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=c\overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

Αν c>0 τότε τα παράλληλα διανύσματα έχουν την ίδια φορά και καλούνται ***ομόρροπα.***
Αν c<0 τότε τα παράλληλα διανύσματα έχουν αντίθετη φορά και καλούνται ***αντίρροπα.***



Ομόρροπα διανύσματα

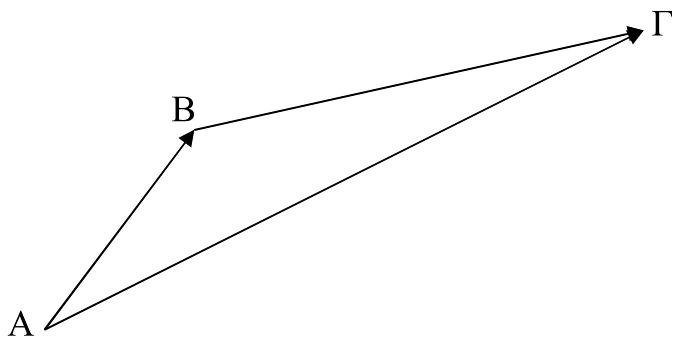


Αντίρροπα διανύσματα

Σχήμα 1.2

Ισχύει ότι

$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}.$$



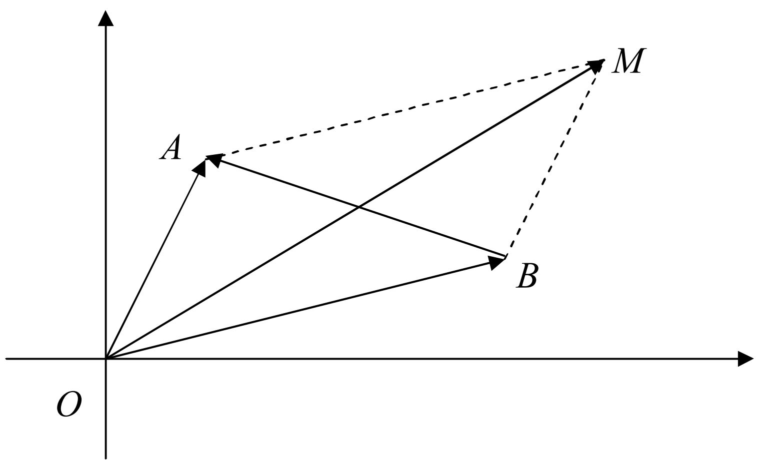
Σχήμα 1.3

Επίσης ισχύουν

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OM}$$

και

$$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$$



Σχήμα 1.4

Ορισμός 1.4 *Έστω* $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *και* $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ *δύο διανύσματα του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^n$. *Τότε το* ***εσωτερικό γινόμενό*** *τους ορίζεται ως εξής:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n .$$

Ορισμός 1.5 ***Μέτρο*** *ενός διανύσματος* $\vec{a}$ *ονομάζουμε τον αριθμό*

$$\|\vec{a}\| = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} .$$

Ιδιότητες

1) $\vec{a} \neq \vec{0}$ *ανν* $\|\vec{a}\| > 0$.
2) $\vec{a} = \vec{0}$ *ανν* $\|\vec{a}\| = 0$.
3) $\|c\vec{a}\| = |c| \|\vec{a}\|, \ \forall c \in \mathbb{R}$.
4) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (*τριγωνική ανισότητα*).
5) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$ (*ανισότητα του Schwartz*).
6) Αν $\vec{a} \perp \vec{b}$ *τότε* $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$.

Πρόταση 1.1 *Αν θ είναι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων* $\vec{a}$ *και* $\vec{b}$ *τότε*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta .$$

Πόρισμα 1.1 *Αν δύο διανύσματα* $\vec{a}$ *και* $\vec{b}$ *είναι ορθογώνια δηλαδή, αν η γωνία τους θ είναι ίση με π/2, τότε*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 .$$

1.5 Εξωτερικό γινόμενο

<u>Ορισμός 1.6</u> *Θεωρούμε τα διανύσματα*

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3.$$

του $\mathbf{R}^3$. *Ονομάζουμε τότε* ***εξωτερικό γινόμενο*** *των* $\vec{a}$ *και* $\vec{b}$ *το διάνυσμα*

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.$$

<u>Παρατήρηση</u> Εναλλακτικά αντί του πιο πάνω ορισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο μνημονικός κανόνας:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

<u>Ιδιότητες</u>

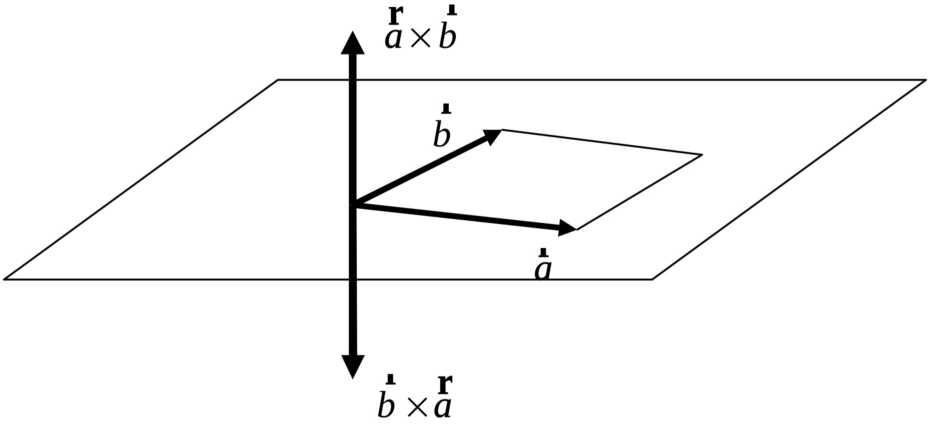
1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.
2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{\gamma}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{\gamma})$.
3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$.
4) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{\gamma} = (\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{\gamma})\vec{a}$.
5) $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{b}$.

<u>Απόδειξη</u> Θα δείξουμε την ιδιότητα (5):

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a} &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1) = 0.\end{aligned}$$

Άρα $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}$. Ομοίως $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{b}$.

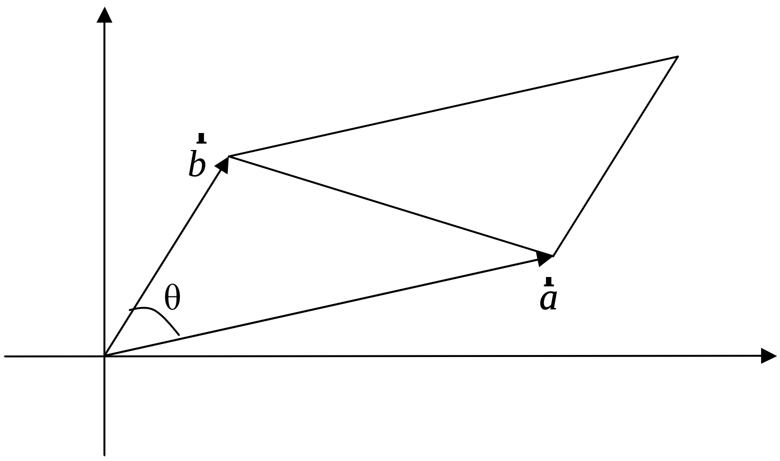
■



Σχήμα 1.4

<u>Πρόταση 1.2</u> *Αν θ είναι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων* $\vec{a}$ *και* $\vec{b}$ *τότε*

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\||\sin\theta|.$$



Σχήμα 1.5

Παρατήρηση Γεωμετρικά το $\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Παρατήρηση Αν $\vec{a} = c\vec{b}$ τότε $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Άσκηση
Έστω

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ
2

ΠΙΝΑΚΕΣ

2.1 Ορισμοί και ιδιότητες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μία εξόχως σημαντική και χρήσιμη έννοια, τον πίνακα, η οποία βρίσκει ποικίλες εφαρμογές σε τεχνολογικές, θετικές και οικονομικές επιστήμες. Επιχειρώντας να διατυπώσουμε τον ορισμό της έννοιας του πίνακα θα πρέπει να επισημανθεί ότι ο πίνακας αποτελεί ουσιαστικά μία γραμμική απεικόνιση και για το λόγο αυτό η Θεωρία Πινάκων εντάσσεται στη Γραμμική Άλγεβρα. Για τη βασική, όμως, θεμελίωση της Θεωρίας Πινάκων θα χρειαστούμε έναν ορισμό ο οποίος θα είναι πιο προσιτός στη μελέτη της εν λόγω θεωρίας.

<u>Ορισμός 2.1</u> ***Πίνακα*** *Α (ή* $\boldsymbol{m\times n}$ ***πίνακα****) ονομάζουμε μία ορθογώνια διάταξη στοιχείων* a_{ij}, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ *σε* m *γραμμές και* n *στήλες ως εξής:*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Αν $m = n$ *(δηλαδή αν ο αριθμός των γραμμών ισούται με τον αριθμό των στηλών) τότε ο Α καλείται* ***τετραγωνικός πίνακας****. Για τον πίνακα Α χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς*

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

ή

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n.$$

<u>Ορισμός 2.2</u> *Αν* $m = 1$ *τότε ο πίνακας*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται ***πίνακας γραμμή****.*

<u>Ορισμός 2.3</u> *Αν* $n = 1$ *τότε ο πίνακας*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται ***πίνακας στήλη****.*

Ορισμός 2.4 *Αν* $a_{ij}=0$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, *τότε ο πίνακας*

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

*καλείται **μηδενικός πίνακας**.*

Ορισμός 2.5 *Αν* $m=n$ *και* $a_{ii}=1$, $1\le i\le n$, $a_{ij}=0$, $i\ne j$, *τότε ο πίνακας*

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

*καλείται **μοναδιαίος πίνακας**.*

Ορισμός *Αν* $m=n$ *και* $a_{ij}=0$, $i\ne j$, *τότε ο πίνακας*

$$I=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

*καλείται **διαγώνιος πίνακας**.*

Ορισμός *Αν* $m=n$ *και* $a_{ij}=0$, $i>j$, *τότε ο πίνακας*

$$I=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

*καλείται **άνω τριγωνικός πίνακας**.*

Ορισμός *Αν* $m=n$ *και* $a_{ij}=0$, $i<j$, *τότε ο πίνακας*

$$I=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

*καλείται **κάτω τριγωνικός πίνακας**.*

Παρατήρηση

Δύο πίνακες $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, *είναι ίσοι ανν*

$$a_{ij}=b_{ij} \quad \textit{για κάθε} \quad 1\le i\le m,\ 1\le j\le n.$$

Ορισμός 2.6 ***Ανάστροφος*** *ενός πίνακα* $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, *καλείται ο πίνακας*

$$B=\left(a_{ji}\right)_{n\times m},\ 1\le j\le n,\ 1\le i\le m,$$

δηλαδή

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας B συμβολίζεται με A' *ή* A^T *ή* A^t.

Ορισμός 2.7 *Έστω οι πίνακες* $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$. *Τότε ονομάζουμε* ***άθροισμα*** *των A και B τον πίνακα*

$$\Gamma=A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n.$$

Ορισμός 2.8 *Έστω* $\lambda\in\mathbb{R}$ *και* $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$. *Τότε ονομάζουμε* ***γινόμενο αριθμού με πίνακα*** *(ή* ***βαθμωτό γινόμενο****)* *τον πίνακα*

$$\Gamma=\lambda A=\left(\lambda a_{ij}\right)_{m\times n},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n.$$

Ορισμός 2.9 *Έστω οι πίνακες*

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n},\quad 1\le i\le m,\ 1\le j\le n,$$
$$B=\left(b_{jk}\right)_{n\times p},\ 1\le j\le n,\ 1\le k\le p,$$

(δηλαδή θεωρούμε δύο πίνακες για τους οποίους ο αριθμός των στηλών του πρώτου ισούται με τον αριθμό γραμμών του δευτέρου). Τότε ορίζουμε ***γινόμενο*** *των A και B τον* $m\times p$ *πίνακα* $\Gamma=A\cdot B$ *όπου*

$$\Gamma=\left(\gamma_{ik}\right)_{m\times p},\ \gamma_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk},\ 1\le i\le m,\ 1\le k\le p.$$

Παράδειγμα 2.3 Έστω

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \text{ και } B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Τότε

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot(-3)\\ 1\cdot(-1)+2\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & -5\end{pmatrix},$$

ενώ

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 0+1\cdot 1 & (-1)\cdot 1+1\cdot 2\\ 0\cdot 0+(-3)\cdot 1 & 0\cdot 1+(-3)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -6\end{pmatrix}.$$

■

Παρατήρηση Παρατηρούμε ότι εν γένει δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Ιδιότητες

1) $A\cdot(B\cdot\Gamma)=(A\cdot B)\cdot\Gamma$.

2) $(A+B)\cdot\Gamma=A\cdot\Gamma+B\cdot\Gamma$.

3) $A\cdot(B+\Gamma)=A\cdot B+A\cdot\Gamma$.

Ορισμός 2.10 *Έστω A και B δύο τετραγωνικοί πίνακες. Τότε αυτοί θα λέγονται **αντιμεταθετικοί** αν*

$$A\cdot B=B\cdot A.$$

Ορισμός 2.11 *Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Αν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε*

$$A\cdot B=B\cdot A=I$$

*τότε ο B καλείται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται με A^{-1}. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας A καλείται **αντιστρέψιμος** ή **ομαλός**.*

2.2 Ορίζουσες

Έστω

$$A = (a_{11})$$

ένας 1×1 πίνακας. Τότε η **ορίζουσα** του πίνακα Α συμβολίζεται με $|A|$ ή $\det A$ και εκφράζεται από τη σχέση

$$|A| = a_{11}.$$

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ένας 2×2 πίνακας. Τότε η **ορίζουσα** του πίνακα A συμβολίζεται με $|A|$ ή $\det A$ και εκφράζεται από τη σχέση

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα χρησιμοποιούμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα.

Ορισμός 2.12 *Έστω a_{kl} ένα στοιχείο του πίνακα A. Τότε ονομάζουμε* ***αλγεβρικό συμπλήρωμα*** *ή* ***προσημασμένη ελάσσονα*** *ή* ***συντελεστή*** *του a_{kl} το*

$$A_{kl} = (-1)^{k+l} |B_{kl}|$$

όπου $|B_{kl}|$ είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν παραλείψουμε την k γραμμή και την l στήλη από τον πίνακα A.

Ορισμός 2.13 *Έστω πίνακας $A = (a_{ij}), 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε ονομάζουμε* ***ορίζουσα n τάξης*** *ή απλά* ***ορίζουσα*** *του A τον αριθμό*

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}.$$

Παρατήρηση
Για κάθε $1 \le i \le n$ και $1 \le j \le n$ ισχύει

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Παράδειγμα 2.4 Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση Έχουμε

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

όπου

$$a_{11} = -2,\ a_{12} = 6,\ a_{13} = 3$$

και

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 10 = 26,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16.$$

Άρα

$$|A| = -2 \cdot 26 + 6 \cdot 7 - 3 \cdot 16 = -58.$$

■

Παρατήρηση
Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας ενός 3×3 πίνακα είναι ο **κανόνας του Sarrus**.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

είναι ο **κανόνας του Sarrus**. Σύμφωνα με τον κανόνα του Sarrus δημιουργούμε

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}.$$

και τότε η ορίζουσα υπολογίζεται από τη σχέση

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Παράδειγμα 2.5 Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

με τον κανόνα του Sarrus.

Απάντηση Έχουμε

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} -2 & 6 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{matrix}$$

Άρα

$$|A| = (-2)\cdot 4\cdot 4 + 6\cdot 5\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot (-2) - 3\cdot 4\cdot 3 - (-2)\cdot 5\cdot (-2) - 4\cdot 2\cdot 6 = -58.$$

■

Ιδιότητες οριζουσών

1) Μια ορίζουσα δεν αλλάζει εάν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές.

2) Μια ορίζουσα αλλάζει πρόσημο αν εναλλάξουμε τη θέση δύο γραμμών ή δύο στηλών.

3) Μια ορίζουσα είναι ίση με μηδέν αν τα αντίστοιχα στοιχεία δύο γραμμών ή δύο στηλών είναι ίσα ή ανάλογα.

4) Εάν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης με κάποιο αριθμό $l \neq 0$ τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με l.

5) Μια ορίζουσα δεν μεταβάλλεται αν στα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής ή μιας στήλης πολλαπλασιασμένα με κάποιο αριθμό $l \neq 0$.

6) Εάν κάθε στοιχείο μιας γραμμής ή μιας στήλης είναι άθροισμα δύο αριθμών τότε η ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δύο οριζουσών.

7) Αν A, B είναι δύο $n \times n$ πίνακες τότε $|AB| = |A||B|$.

8) Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

Παράδειγμα 2.6 Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a+y \end{pmatrix}$$

όπου a, x και y πραγματικοί αριθμοί.

Απάντηση Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = axy.$$

■

Παράδειγμα 2.7 Να υπολογιστεί η ορίζουσα

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 \end{vmatrix}.$$

Απάντηση Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 .$$

■

Παράδειγμα 2.8 Να αποδεχτεί ότι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1).$$

Απάντηση Ισχύει ότι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 + a_1) - (a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a_2 + a_1)$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

■

Παράδειγμα 2.9 Να υπολογιστεί η ορίζουσα

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}.$$

Απάντηση Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+a & 2+a & 2 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3+a & 3+a & 3+a \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (3+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$= (3+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (3+a)a^2.$$

■

Παράδειγμα 2.10 Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

■

Παράδειγμα 2.11 Να υπολογιστεί η ορίζουσα

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & g & g \\ a & b & g & d \end{vmatrix}.$$

Απάντηση Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & g & g \\ a & b & g & d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & g-b & g-b \\ 0 & 0 & 0 & d-g \end{vmatrix}$$

$$= a(b-a)(g-b)(d-g).$$

■

Πρόταση 2.1 Ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν

$$|A| \neq 0.$$

Πρόταση 2.2 Το γινόμενο δύο ή περισσοτέρων πινάκων είναι αντιστρέψιμος πίνακας αν και μόνο αν όλοι οι πίνακες του γινομένου είναι αντιστρέψιμοι.

2.3 Τάξη Πίνακα

Η τάξη ενός πίνακα A (συμβολίζεται με $rankA$) είναι ένας φυσικός αριθμός r εάν τουλάχιστον μία υποορίζουσα τάξης r που σχηματίζεται από τον A είναι διάφορη από το μηδέν και όλες οι άλλες οι υποορίζουσες τάξης $r+1$, αν υπάρχουν, είναι ίσες με μηδέν.

Παράδειγμα 2.12 Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Αρχικά υπολογίζουμε τις υποορίζουσες τάξης 3

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}, |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}, |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}, |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0.$
Ακολούθως υπολογίζουμε την υποορίζουσα τάξης 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Άρα

$$rankA = 2.$$

■

Ορισμός 2.14 *Ένας πίνακας λέγεται **κλιμακωτός** εάν*

1. *Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν τις μηδενικές.*
2. *Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι ίσο με «1» και βρίσκεται δεξιά του αντίστοιχου «1» της προηγούμενης γραμμής.*
3. *Το πρώτο «1» μιας μη μηδενικής γραμμής είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία το «1» βρίσκεται.*

Στη συνέχεια αναφέρουμε ορισμένους μετασχηματισμούς που μπορούμε να κάνουμε στους πίνακες χωρίς να μεταβληθεί η τάξη τους. Αυτοί οι μετασχηματισμοί καλούνται στοιχειώδεις.

Οι **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών** $\boldsymbol{H}$ που χρησιμοποιούμε είναι οι ακόλουθοι:

1. Η εναλλαγή της i-στής γραμμής με την j-στη, (συμβολισμός $\boldsymbol{H}_{\mathbf{ij}}$).
2. Ο πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου της i-στής γραμμής με έναν αριθμό $k \neq 0$ (συμβολισμός $\boldsymbol{H}_{\mathbf{i}}(\boldsymbol{k})$).
3. Ο πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου της j-στής γραμμής με έναν αριθμό k και η πρόσθεση των αντίστοιχων στοιχείων που προκύπτουν στα αντίστοιχα στοιχεία της i-στής γραμμής (συμβολισμός $\boldsymbol{H}_{\mathbf{ij}}(\boldsymbol{k})$).

Πρόταση 2.3 Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί δεν μεταβάλλουν την τάξη του πίνακα A.

Παρατήρηση

Ίδιοι μετασχηματισμοί μπορούν να γίνουν και στις στήλες του πίνακα A.

Ορισμός 2.15 *Δύο πίνακες A και B καλούνται* ***ισοδύναμοι*** *(συμβολίζεται με $A \sim B$ ή $A \leftrightarrow B$) εάν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς. Ισχύει $rankA = rankB$.*

Παράδειγμα 2.13 Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Απάντηση Έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \overset{H_{12}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \underset{H_{31}(1)}{\overset{H_{21}(-2)}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1)}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Άρα $rankA = 2$.

■

Παράδειγμα 2.14 Να βρεθεί η τάξη του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 4-4l & -1 & 0 \\ -2 & 3-2l & -1 \\ 2 & -1 & 2-2l \end{pmatrix}.$$

Απάντηση Έχουμε

$$A=\begin{pmatrix} 4-4l & -1 & 0 \\ -2 & 3-2l & -1 \\ 0 & -1 & 2-2l \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{12} \\ : \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 3-2l & -1 \\ 4-4l & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-2l \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{1}(-1/2) \\ : \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (2l-3)/2 & 1/2 \\ 4-4l & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-2l \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{21}(4l-4) \\ : \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & (2l-3)/2 & 1/2 \\ 0 & 4l^2-10l+5 & 2l-2 \\ 0 & -1 & 2-2l \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{23} \\ : \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (2l-3)/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 2-2l \\ 0 & 4l^2-10l+5 & 2l-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{2}(-1) \\ : \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (2l-3)/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2l-2 \\ 0 & 4l^2-10l+5 & 2l-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{12}((3-2l)/2) \\ : \\ H_{32}(-4l^2+10l-5) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2l^2+5l-5/2 \\ 0 & 1 & 2l-2 \\ 0 & 0 & (2-2l)(4l^2-10l+4) \end{pmatrix}.$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι $(1-l)(l-2)(l-1/2)\neq 0 \Rightarrow$ $l\neq 1,\ l\neq 2,\ l\neq 1/2.$ Τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2l^2+5l-5/2 \\ 0 & 1 & 2l-2 \\ 0 & 0 & (2-2l)(4l^2-10l+4) \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{3}(1/((2-2l)(4l^2-10l+4))) \\ : \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2l^2+5l-5/2 \\ 0 & 1 & 2l-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{13}(2l^2-5l+5/2) \\ \vdots \\ H_{23}(-2l+2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως $rank\,A=3$. Έστω τώρα $l=1$ ή $l=2$ ή $l=1/2$. Τότε $rank\,A=2$.

■

<u>Παράδειγμα 2.15</u> Με τη βοήθεια των στοιχειωδών μετασχηματισμών να βρεθούν οι τάξεις των πινάκων

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

$$c)\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad d)\ D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Απάντηση</u> α)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{21}(-2) \\ \vdots \\ H_{31}(-3) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{2}(-1/3) \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{12}(-2) \\ \vdots \\ H_{32}(4) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{3}(-1/4) \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{13}(-1) \\ \vdots \\ H_{23}(-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα $rank\,A=3$.

b) $$B=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&4&3&2\\3&2&1&3\\6&8&7&5\end{pmatrix}\begin{array}{c}H_{21}(-2)\\H_{31}(-3)\\ \vdots\\H_{41}(-6)\end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&0&-3&2\\0&-4&-8&3\\0&-4&-11&5\end{pmatrix}\begin{array}{c}H_{23}\\ \vdots\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-4&-8&3\\0&0&-3&2\\0&-4&-11&5\end{pmatrix}\begin{array}{c}H_2(-1/4)\\ \vdots\end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&-3/4\\0&0&-3&2\\0&-4&-11&5\end{pmatrix}\begin{array}{c}H_{12}(-2)\\ \vdots\\H_{42}(4)\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&3/2\\0&1&2&-3/4\\0&0&-3&2\\0&0&-3&2\end{pmatrix}\begin{array}{c}H_3(-1/3)\\ \vdots\end{array}\begin{pmatrix}1&0&-1&3/2\\0&1&2&-3/4\\0&0&1&-2/3\\0&0&-3&2\end{pmatrix}\begin{array}{c}H_{13}(1)\\H_{23}(-2)\\ \vdots\\H_{43}(3)\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&5/6\\0&1&0&7/12\\0&0&1&-2/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\text{E}.$$

Άρα $rankB=3$ διότι η τέταρτη γραμμή του E είναι μηδέν και η πρώτη, η δεύτερη και η τρίτη γραμμή είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

c) $$C=\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\2&4&-2&2\\3&6&-4&3\end{pmatrix}\begin{array}{c}H_{21}(-2)\\ \vdots\\H_{31}(-3)\end{array}\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\0&0&4&2\\0&0&5&3\end{pmatrix}\begin{array}{c}H_2(1/4)\\ \vdots\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\0&0&1&1/2\\0&0&5&3\end{pmatrix}\begin{array}{c}H_{12}(3)\\ \vdots\\H_{32}(-5)\end{array}\begin{pmatrix}1&2&0&3/2\\0&0&1&1/2\\0&0&0&1/2\end{pmatrix}\begin{array}{c}H_3(2)\\ \vdots\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3/2\\0&0&1&1/2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}H_{13}(-3/2)\\ \vdots\\H_{23}(-1/2)\end{array}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Άρα $rank\,C=3$.

d)

$$D=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\3&4&1&2\\2&3&2&3\end{pmatrix}\begin{matrix}H_{21}(-3)\\ \vdots\\ H_{31}(-2)\end{matrix}\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-2&1&5\\0&-1&2&5\end{pmatrix}\begin{matrix}H_{23}\\ \vdots\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-1&2&5\\0&-2&1&5\end{pmatrix}\begin{matrix}H_{2}(-1)\\ \vdots\end{matrix}\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&-2&-5\\0&-2&1&5\end{pmatrix}\begin{matrix}H_{12}(-2)\\ \vdots\\ H_{32}(2)\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&4&9\\0&1&-2&-5\\0&0&-3&-5\end{pmatrix}\begin{matrix}H_{3}(-1/3)\\ \vdots\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&4&9\\0&1&-2&-7\\0&0&1&5/3\end{pmatrix}\begin{matrix}H_{13}(-4)\\ \vdots\\ H_{23}(2)\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&7/3\\0&1&0&-11/3\\0&0&1&5/3\end{pmatrix}.$$

Άρα $rank\,D=3$.

■

2.4 Αντίστροφος πίνακας A^{-1}

Α) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΩΝ.

Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ορίζουμε τον πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

όπου A_{ij} τα αλγεβρικά συμπληρώματα του Α. Τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$

όπου C^T ο ανάστροφος του πίνακα C.

<u>Παράδειγμα 2.16</u> Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

<u>Απάντηση</u> Πρώτα θα υπολογίσουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -3 + 2 = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = -9 + 1 = -8,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -6 + 1 = -5,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -3 + 1 = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3 + 1 = -2.$$

Επίσης

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2.$$

Άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -8 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -4 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

■

B) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

Έστω ο $n\times n$ τετραγωνικός και αντιστρέψιμος πίνακας $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, $1\le i\le n$, $1\le j\le n$. Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|I)$$

όπου I είναι ο $n\times n$ μοναδιαίος πίνακας. Στον επαυξημένο αυτόν πίνακα εκτελούμε κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς έτσι ώστε να καταλήξουμε εν τέλει στον επαυξημένο πίνακα της μορφής

$$(I|B)$$

όπου $B=A^{-1}$. Έχουμε δηλαδή

$$(A|I) : \ldots : \left(I|A^{-1}\right).$$

<u>Παράδειγμα 2.17</u> Να υπολογίσετε τον A^{-1} όπου

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}.$$

<u>Απάντηση</u> Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -1 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{:}{H_1(1/2)}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1/2 & 1/2 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{:}{H_{21}(-5)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 11/2 & -5/2 & 1\end{array}\right)\underset{:}{H_2(2/11)}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & -5/11 & 2/11\end{array}\right)\underset{:}{H_{12}(1/2)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 3/11 & 1/11\\ 0 & 1 & -5/11 & 2/11\end{array}\right)$$

Συνεπώς

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3/11 & 1/11\\ -5/11 & 2/11\end{pmatrix}.$$

■

<u>Παράδειγμα 2.18</u> Να υπολογίσετε τον A^{-1} όπου

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}.$$

<u>Απάντηση</u> Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(A|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\1&4&3&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}H_{21}(-1)\\ \vdots \\ H_{31}(-1)\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}H_{12}(-3)\\ \vdots \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&4&-3&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}H_{13}(-3)\\ \vdots \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-3&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right).$$

Άρα

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

■

Παράδειγμα 2.19 Να υπολογίσετε τον A^{-1} όπου

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Απάντηση Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(A|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{21}(-4) \\ : \\ H_{31}(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{2}(-1/2) \\ : \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9/2 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{32}(-2) \\ : \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9/2 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{13}(2) \\ : \\ H_{23}(9/2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -41/2 & 4 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Οπότε

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -41/2 & 4 & 9/2 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

2.5 Γραμμικά Συστήματα

Θεωρούμε ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2, ..., x_n$ της μορφής

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

όπου $a_{ij,}\ b_i,\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n$ σταθερές.

<u>Ορισμός 2.16</u> ***Λύση*** *του συστήματος θα ονομάζεται ένα σύνολο τιμών* $y_1, y_2, ..., y_n$ *οι οποίες ικανοποιούν τις παραπάνω εξισώσεις.*

<u>Ορισμός 2.17</u> *Όταν ένα σύστημα έχει τουλάχιστον μια λύση λέγεται* ***συμβιβαστό.*** *Διαφορετικά λέγεται* ***ασυμβίβαστο ή αδύνατο.***

<u>Ορισμός 2.18</u> *Ένα* ***συμβιβαστό*** *σύστημα είτε έχει μια λύση είτε έχει άπειρες λύσεις. Όταν έχει άπειρες λύσεις ονομάζεται* ***αόριστο****.*

Για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα ορίζουμε τον $m \times n$ πίνακα των συντελεστών

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

τον $n \times 1$ πίνακα των αγνώστων

$$\vec{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)',$$

και τον $m \times 1$ πίνακα των σταθερών όρων

$$\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)'.$$

Το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$A\vec{x} = \vec{b}\ .$$

Θα αναπτύξουμε 3 μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

Ι. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS-JORDAN

Εδώ θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(A|\vec{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & b_2 \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_3 \end{array}\right).$$

Στη μέθοδο αυτή η επόμενη πρόταση είναι σημαντική.

<u>Πρόταση 2.4</u> Το γραμμικό σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει λύση εάν και μόνον εάν

$$rank\, A = rank\left(A|\vec{b}\right).$$

Η εφαρμογή της μεθόδου Gauss-Jordan γίνεται αντιληπτή με τη βοήθεια των παρακάτω παραδειγμάτων

<u>Παράδειγμα 2.20</u> Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ x+\quad y&=2 \end{aligned}.$$

<u>Απάντηση</u> Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|\vec{b})=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Εκτελώντας κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς έχουμε

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\overset{H_{12}}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right)\overset{H_{21}(-2)}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\overset{H_{12}(-1)}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Από τον τελευταίο πίνακα προκύπτει $x=1,\ y=1$.

Παράδειγμα 2.21 Να λύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ x - y - z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 11 \end{aligned}$$

Απάντηση Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|\overset{\mathbf{r}}{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \end{array}\right).$$

Εφαρμόζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{21}(-1) \\ : \\ H_{31}(-4) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{2}(-1/3) \\ : \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4/3 & 5/3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{12}(-2) \\ : \\ H_{32}(3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{3}(-1/2) \\ : \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{23}(-4/3) \\ : \\ H_{13}(-1/3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Οπότε από τον τελευταίο πίνακα η λύση του συστήματος είναι

$$x = 1,\ y = -1,\ z = 2.$$

■

Παράδειγμα 2.22 Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 10 \end{aligned}$$

Απάντηση Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(A|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{array}\right).$$

Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{21}(-1) \\ : \\ H_{31}(-2) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{12}(-2) \\ : \\ H_{32}(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{13}(8) \\ : \\ H_{23}(-2) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Άρα προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 11x_3 &= 10 \\ x_2 + 4x_3 &= -2 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $x_3 = c$ και παίρνουμε την απειρία λύσεων

$$x_1 = 10 + 11c,\ x_2 = -2 - 4c,\ x_3 = c,\ x_4 = 0 \ \text{ όπου } c \in R.$$

■

Παράδειγμα 2.23 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 8 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= 19 \\ 8x_1 + 4x_2 - 20x_3 &= 21 \end{aligned} \quad .$$

Απάντηση Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 4 & -3 & 1 & 19 \\ 8 & 4 & -20 & 21 \end{array}\right)$$

Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 4 & -3 & 1 & 19 \\ 8 & 4 & -20 & 21 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_1(1/2) \\ : \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -5/2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 & 19 \\ 8 & 4 & -20 & 21 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{21}(-4) \\ : \\ H_{31}(-8) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -5/2 & 4 \\ 0 & -5 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right).$$

Παρατηρούμε, ότι από τον τελευταίο πίνακα, ότι προκύπτει $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -11$το οποίο είναι άτοπο, επομένως το σύστημα είναι ασυμβίβαστο πράγμα που ήταν αναμενόμενο εφόσον $rank\, A = 2$ και $rank(A|\vec{b}) = 3$ δηλαδή $rank\, A \neq rank(A|\vec{b})$.

■

Παράδειγμα 2.24 Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ l\,x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ 6x_1 + (l+2)x_2 + 2x_3 &= 13 \end{aligned} \qquad ,$$

όπου l μια παράμετρος.

Απάντηση Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ l & 4 & 1 & 5 \\ 6 & l+2 & 2 & 13 \end{array}\right)$$

Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς με $l \neq 4, l \neq -3$ έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ l & 4 & 1 & 5 \\ 6 & l+2 & 2 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{21}(-l) \\ \vdots \\ H_{31}(-6) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4-l & 1-l & 5-6l \\ 0 & l-4 & -4 & -23 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_2(1/(4-l)) \\ \vdots \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & (1-l)/(4-l) & (5-6l)/(4-l) \\ 0 & l-4 & -4 & -23 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{12}(-1) \\ \vdots \\ H_{32}(4-l) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/(4-l) & 19/(4-l) \\ 0 & 1 & (1-l)/(4-l) & (5-6l)/(4-l) \\ 0 & 0 & -3-l & -18-6l \end{array}\right) \begin{array}{c} H_3(-1/(3+l)) \\ \vdots \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/(4-l) & 19/(4-l) \\ 0 & 1 & (1-l)/(4-l) & (5-6l)/(4-l) \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{13}(3/(l-4)) \\ \vdots \\ H_{23}((l-1)/(4-l)) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/(4-l) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(l-4) \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Άρα εάν $l \neq 4, l \neq -3$ έχουμε μοναδική λύση την $x_1 = 1/(4-l),\ x_2 = 1/(l-4),\ x_3 = 6.$

Έστω τώρα $l = 4$. Τότε από τους παραπάνω πίνακες έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 & 13 \end{array}\right) \begin{matrix} H_{21}(-4) \\ \sim \\ H_{31}(-6) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -19 \\ 0 & 0 & -4 & -23 \end{array}\right) \begin{matrix} H_3(-1/4) \\ \sim \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 23/4 \end{array}\right) \begin{matrix} H_{13}(-1) \\ \sim \\ H_{23}(3) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 23/4 \end{array}\right).$$

Παρατηρούμε ότι από τον τελευταίο πίνακα ότι προκύπτει $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -7/4$ το οποίο είναι άτοπο, επομένως το σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

Έστω τώρα ότι $l = -3$. Τότε από τους παραπάνω πίνακες έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 2 & 13 \end{array}\right) \begin{matrix} H_{21}(3) \\ \sim \\ H_{31}(-6) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/7 & 19/7 \\ 0 & 1 & 4/7 & 23/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Άρα έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 3/7\,x_3 &= 19/7 \\ x_2 + 4/7\,x_3 &= 23/7 \end{aligned}.$$

Θέτουμε $x_3 = c$ και παίρνουμε την απειρία λύσεων

$$x_1 = 19/7 - 3/7c,\ x_2 = 23/7 - 4/7c,\ x_3 = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

■

Παράδειγμα 2.25 Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned}(l+1)x+y+z&=1\\ x+(l+1)y+z&=l\\ x+y+(l+1)z&=l^2\end{aligned}$$

όπου l μια παράμετρος.

Απάντηση Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|\vec{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} l+1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & l+1 & 1 & l\\ 1 & 1 & l+1 & l^2\end{array}\right)$$

Μετά από κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς με $l\neq 0, l\neq -3$ έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} l+1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & l+1 & 1 & l\\ 1 & 1 & l+1 & l^2\end{array}\right)\xrightarrow{H_{13}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & l+1 & l^2\\ 1 & l+1 & 1 & l\\ l+1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}H_{21}(-1)\\ \vdots\\ H_{31}(-l-1)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & l+1 & l^2\\ 0 & l & -l & l-l^2\\ 0 & -l & -l^2-2l & -l^3-l^2+1\end{array}\right)\begin{array}{c}H_{2}(1/l)\\ \vdots\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & l+1 & l^2\\ 0 & 1 & -1 & 1-l\\ 0 & -l & -l^2-2l & -l^3-l^2+1\end{array}\right)\begin{array}{c}H_{12}(-1)\\ \vdots\\ H_{32}(l)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & l+2 & l^2+l-1\\ 0 & 1 & -1 & 1-l\\ 0 & 0 & -l^2-3l & -l^3-2l^2+l+1\end{array}\right)\begin{array}{c}H_{3}(-1/(l^2+3l))\\ \vdots\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & l+2 & l^2+l-1\\ 0 & 1 & -1 & 1-l\\ 0 & 0 & 1 & (l^3+2l^2-l-1)/(l^2+3l)\end{array}\right)\begin{array}{c}H_{13}(-l-2)\\ \vdots\\ H_{23}(1)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (-l^2+2)/(l^2+3l) \\ 0 & 1 & 0 & (2l-1)/(l^2+3l) \\ 0 & 0 & 1 & (l^3+2l^2-l-1)/(l^2+3l) \end{array}\right).$$

Άρα εάν $l \neq 0, l \neq -3$ έχουμε τη μοναδική λύση

$x=(-l^2+2)/(l^2+3l),\ y=(2l-1)/(l^2+3l),\ z=(l^3+2l^2-l-1)/(l^2+3l).$

Έστω $l=0$. Τότε από τους παραπάνω πίνακες παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Παρατηρούμε ότι από τον τελευταίο πίνακα ότι προκύπτει $0x+0y+0z=1$ το οποίο είναι άτοπο, επομένως το σύστημα είναι ασυμβίβαστο για $l=0$.

Έστω $l=-3$. Τότε από τους παραπάνω πίνακες παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Παρατηρούμε από τον τελευταίο πίνακα ότι προκύπτει $0x+0y+0z=7$ το οποίο είναι άτοπο, επομένως το σύστημα είναι ασυμβίβαστο για $l=-3$.

■

II. ΜΕΘΟΔΟΣ (ΚΑΝΟΝΑΣ) ΤΟΥ CRAMMER

Εδώ η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται μόνο όταν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός (δηλαδή $m = n$).

Έστω A_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα A όταν αντικαταστήσουμε την $i-$στήλη με τη στήλη των σταθερών όρων $\vec{b}$.

α) Εάν $|A| \neq 0$ τότε το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, ..., x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

β) Εάν $|A| = 0$ και τουλάχιστον μια από τις ορίζουσες $|A_i|$, $i = 1, 2, ..., n$ είναι διάφορη από το μηδέν τότε το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ είναι αδύνατο.

γ) Εάν $|A| = 0$ και $|A_i| = 0$, $i = 1, 2, ..., n$ τότε το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ είναι αόριστο ή αδύνατο.

<u>Παράδειγμα 2.26</u> Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned} 12x + y &= 9 \\ 5x - y &= 8 \end{aligned}.$$

<u>Απάντηση</u> Υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17,\ |A_2| = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 51,$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 5 = -17.$$

Άρα

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-17}{-17} = 1,\ y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{51}{-17} = -3.$$

■

Παράδειγμα 2.27 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 . \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Απάντηση Έχουμε

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}\ ,$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(8-1) + 1(12-5) + 3(3-10) = 0,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(8-1) + 1(8-3) + 3(2-6) = 0,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(8-3) - 1(12-5) + 3(9-10) = 0,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(6-2) + 1(9-10) + 1(3-10) = 0.$$

Οπότε το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.

Πρώτα θα εξετάσουμε εάν είναι αόριστο. Θέτουμε $x_3 = c$ και έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 - 3c \\ 3x_1 + 2x_2 &= 2 - c \end{aligned} .$$

Άρα

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-3c & -1 \\ 2-c & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2-6c+2-c}{4+3} = -c + \frac{4}{7},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-3c \\ 3 & 2-c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4-2c-3+9c}{4+3} = c + \frac{1}{7}.$$

Θα ελέγξουμε αν η λύση ικανοποιεί την τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος. Πράγματι $5x_1 + x_2 + 4x_3 = -5c + 20/7 + c + 1/7 + 4c = 3.$
Άρα επαληθεύεται η τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος . Επομένως το σύστημα είναι αόριστο με

$$x_1 = -c + \frac{4}{7},\ x_2 = c + \frac{1}{7},\ x_3 = c,\ c \in R.$$

■

<u>Παράδειγμα 2.28</u> Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 13 \end{aligned} \quad .$$

<u>Απάντηση</u> Έχουμε

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}\ ,$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 1(8-6) - 1(8-6) + 1(24-24) = 0,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 13 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 6(8-6) - 1(10-13) + 1(30-52) = -7 \neq 0.$$

Συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο εφόσον $|A| = 0$ και $|A_1| \neq 0$.

■

Παράδειγμα 2.29 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}(l+1)x+y+z&=1\\ x+(l+1)y+z&=l\\ x+y+(l+1)z&=l^2\end{aligned}$$

όπου l μια παράμετρος.

Απάντηση Έχουμε

$$x=\frac{|A_1|}{|A|},\ y=\frac{|A_2|}{|A|},\ z=\frac{|A_3|}{|A|},$$

$$|A|=\begin{vmatrix} l+1 & 1 & 1\\ 1 & l+1 & 1\\ 1 & 1 & l+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} l+3 & l+3 & l+3\\ 1 & l+1 & 1\\ 1 & 1 & l+1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} l+3 & 0 & 0\\ 1 & l & 0\\ 1 & 0 & l\end{vmatrix}=l^2(l+3),$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ l & l+1 & 1\\ l^2 & 1 & l+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ l & 1 & 1-l\\ l^2 & 1-l^2 & l+1-l^2\end{vmatrix}=$$

$$=l+1-l^2-(1-l)(1-l^2)=-l^3+2l,$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} l+1 & 1 & 1\\ 1 & l & 1\\ 1 & l^2 & l+1\end{vmatrix}=(l+1)(l^2+l-l^2)-$$

$$=(l+1-1)+(l^2-l)=2l^2-l,$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} l+1 & 1 & 1\\ 1 & l+1 & l\\ 1 & 1 & l^2\end{vmatrix}=(l+1)(l^3+l^2-l)-$$

$$=(l^2-l)+(1-l-1)=l^4+2l^3-l^2-l.$$

Άρα εάν $l \neq 0,\ l \neq -3$ έχουμε μοναδική λύση την

$x=(-l^2+2)/(l^2+3l),\ y=(2l-1)/(l^2+3l),\ z=(l^3+2l^2-l-1)/(l^2+3l).$

Έστω τώρα $l=0$. Τότε
$|A|=0, |A_1|=0, |A_2|=0, |A_3|=0.$ Επομένως το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο. Οι τρεις εξισώσεις για $l=0$ γίνονται

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+y+z&=0\\ x+y+z&=0 \end{aligned}$$

οι οποίες αλληλοαναιρούνται . Άρα το σύστημα είναι αδύνατο για $l=0$.

Έστω τώρα $l=-3$. Έχουμε $|A|=0, |A_1|=27-6=21\neq 0.$
Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

■

III. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Στη μέθοδο αυτή θα πρέπει ο πίνακας A να είναι τετραγωνικός και αντιστρεπτός. Τότε από τη σχέση $A\vec{x}=\vec{b}$ έχουμε $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$.

<u>Παράδειγμα 2.30</u> Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2&=10\\ x_1+x_2&=9 \end{aligned}.$$

<u>Απάντηση</u> Ο πίνακας Α των συντελεστών είναι ο
$A=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ο οποίος έχει αντίστροφο τον $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Οπότε
$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 8\end{pmatrix}$. Επομένως $x_1=1,\ x_2=8$.

■

Παράδειγμα 2.31 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \end{aligned}.$$

Απάντηση Έχουμε

$$|A| = 24 - 25 - 2(12 - 15) + 3(10 - 12) = -1.$$

Υπολογίζουμε πρώτα τα αλγεβρικά συμπληρώματα

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 25 = -1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 15 - 12 = 3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 15 - 12 = 3,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Επομένως

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Άρα $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1.$

■

ΟΜΟΓΕΝΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2, ..., x_n$ της μορφής

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

όπου $a_{ij,}$ $i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n$ σταθερές καλείται **ομογενές σύστημα**.

Το παραπάνω σύστημα γράφεται $A\vec{x} = \vec{0}$. Επίσης το σύστημα έχει την προφανή λύση $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

<u>Πρόταση 2.5</u> Ένα ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει λύση διάφορη της προφανούς εάν και μόνο εάν $rank\, A = r < n$.

<u>Πόρισμα</u> Εάν σε ένα ομογενές σύστημα οι εξισώσεις είναι λιγότερες από τους αγνώστους δηλαδή $m < n$ τότε $rank\, A = r \le m < n$ οπότε το σύστημα έχει λύση διάφορη της μηδενικής.

<u>Πρόταση 2.6</u> Ένα ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$, όπου A είναι ένας $n \times n$ πίνακας, έχει λύση διάφορη της μηδενικής εάν και μόνο εάν $|A| = 0$.

<u>Πρόταση 2.7</u> Έστω $rank\, A = r < n$, τότε το ομογενές σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ έχει $n - r$ γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις οι οποίες αποτελούν βάση για τον διανυσματικό χώρο που παράγεται από τις λύσεις του συστήματος.

Παράδειγμα 2.32 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} l\,x + y + z &= 0 \\ x + l\,y + z &= 0\,. \\ x + y + l\,z &= 0 \end{aligned}$$

Να βρεθεί η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τις λύσεις του παραπάνω συστήματος.

Απάντηση Για να έχει το σύστημα λύση διάφορη της προφανούς θα πρέπει $|A| = 0$ δηλαδή

$$|A| = \begin{vmatrix} l & 1 & 1 \\ 1 & l & 1 \\ 1 & 1 & l \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} l+2 & l+2 & l+2 \\ 1 & l & 1 \\ 1 & 1 & l \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} l+2 & 0 & 0 \\ 1 & l-1 & 0 \\ 1 & 0 & l-1 \end{vmatrix}$$

$$= (l+2)(l-1)^2 = 0\,.$$

Άρα $l = -2, l = 1$. Θέτουμε πρώτα $l = -2$. Τότε προκύπτει

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0\,. \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Έχουμε

$$
\left(A|\vec{0}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{H_{13}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{31}(2)]{H_{21}(-1)}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{H_{2}(-1/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{32}(-3)]{H_{12}(-1)}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
$$

Οπότε από τον τελευταίο πίνακα παίρνουμε τις εξισώσεις $\begin{matrix} x-z=0 \\ y-z=0 \end{matrix}$. Θέτουμε $z=c$ και παίρνουμε $x=c,\ y=c,\ z=c,\ c\in R$

Άρα κάθε λύση $\vec{x}$ του παραπάνω συστήματος για $l=-2$ γράφεται $\vec{x}=\begin{pmatrix} c & c & c \end{pmatrix}'=c\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}',\ c\in R$. Επομένως η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τις λύσεις του παραπάνω συστήματος για $l=-2$ είναι 1, πράγμα που αναμενόταν αφού $n-rank\,A=3-2=1$.

Έστω τώρα $l=1$. Τότε έχουμε $x+y+z=0$. Θέτουμε $y=c,\ z=d$. Συνεπώς $x=-c-d,\ y=c,\ z=d,\ c,d\in R$. Άρα κάθε λύση $\vec{x}$ του παραπάνω συστήματος για $l=1$ γράφεται $\vec{x}=\begin{pmatrix} c-d & c & d \end{pmatrix}'=c\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}'+d\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}',\ c,d\in R$. Επομένως η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τις λύσεις του παραπάνω συστήματος για $l=1$ είναι 2.

■

Παράδειγμα 2.33 Να λύσετε το ομογενές σύστημα

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 . \\
&2x_1 + x_3 - x_4 = 0
\end{aligned}
$$

Να βρεθεί η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τις λύσεις του παραπάνω συστήματος.

Απάντηση Εδώ ο αριθμός των εξισώσεων ο οποίος είναι ίσος με 3 είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων που ισούται με 4. Άρα το παραπάνω σύστημα έχει λύση διάφορη της μηδενικής. Έχουμε

$$
\left(A|\vec{0}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{21}(-1) \\ : \\ H_{31}(-2) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_2(1/2) \\ : \\ \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{12}(-1) \\ : \\ H_{32}(2) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
$$

Από τον τελευταίο πίνακα έχουμε

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 1/2\,x_3 - 1/2\,x_4 = 0 \\
&x_2 + 1/2\,x_3 + 3/2\,x_4 = 0
\end{aligned}
$$

Θέτουμε $x_3 = c, x_4 = d$ και παίρνουμε $x_1 = (d-c)/2,\ x_2 = (-c-3d)/2,\ x_3 = c,\ x_4 = d,\ \ c,d \in R$. Άρα κάθε λύση του συστήματος γράφεται
$\vec{x} = \left((d-c)/2 \quad (-c-3d)/2 \quad c \quad d\right) = c\left(-1/2 \quad -1/2 \quad 1 \quad 0\right) +$
$d\left(1/2 \quad -3/2 \quad 0 \quad 1\right),\ c,d \in R.$

Άρα η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τις λύσεις του παραπάνω συστήματος είναι 2 πράγμα που αναμενόταν αφού $n - rank\,A = 4 - 2 = 2$.

■

2.6 Χαρακτηριστική Εξίσωση Πίνακα

Έστω ο $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας A της μορφής

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

όπου $a_{ij},\ 1\le i\le n, 1\le j\le n$ πραγματικές σταθερές. Ονομάζουμε **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A την εξίσωση

$$|A-\lambda I|=0,$$

όπου I ο $n\times n$ μοναδιαίος πίνακας και $\lambda\in R$. Οι ρίζες $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης καλούνται **χαρακτηριστικές τιμές ή ιδιοτιμές** του πίνακα A. Έστω λ_i μια ιδιοτιμή του A. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$(A-\lambda_i I)\vec{x}=\vec{0}$$

το οποίο έχει λύση διάφορη της μηδενικής εφόσον $|A-\lambda I|=0$. Κάθε λύση $\vec{x}$ του ομογενούς συστήματος καλείται χαρακτηριστικό διάνυσμα ή ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

<u>Πρόταση 2.8</u> Έστω $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα A και $\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα αυτών. Τότε τα $\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>Πρόταση 2.9</u> Έστω λ_i μια απλή ιδιοτιμή (δηλαδή πολλαπλότητας ένα) του πίνακα A. Τότε η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην λ_i είναι ένα.

<u>Πρόταση 2.10</u> Έστω λ_i μια ιδιοτιμή του πίνακα A πολλαπλότητας r. Τότε η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην λ_i είναι μικρότερη ή ίση με r.

Πρόταση 2.11 Η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην l_i ενός $n \times n$ πίνακα A είναι ίση με τον αριθμό $n - rank(A - l_i I)$.

Πρόταση 2.12 Οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (A^T ο ανάστροφος του A.

Πρόταση 2.13 Εάν $l_1, l_2, ..., l_m$ ιδιοτιμές του A και k πραγματική σταθερά τότε οι $k l_1, k l_2, ..., k l_m$ είναι ιδιοτιμές του kA.

Ορισμός 2.19 *Ένας πίνακας λέγεται **ορθογώνιος** εάν* $AA' = I$.

Πρόταση 2.14 Εάν l μια ιδιοτιμή ενός ορθογωνίου πίνακα A τότε και η $1/l$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A.

Παράδειγμα 2.34 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.
β) Να βρεθούν οι διαστάσεις των διανυσματικών χώρων που παράγονται από τα ιδιοδιανύσματα.

Απάντηση Θεωρούμε τον πίνακα

$$(A - l I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - l \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - l & 2 & 1 \\ 1 & 3 - l & 1 \\ 1 & 2 & 2 - l \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$|A - l I| = (2 - l)((3 - l)(2 - l) - 2) - 2(2 - l - 1) + (2 - 3 + l) =$$
$$-(l - 1)^2 (l - 5)$$

Θεωρούμε την εξίσωση

$\left|A - l I\right| = -(l-1)^2(l-5) = 0$. Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι $l_1 = 1,\ l_2 = 5$, η $l_1 = 1$ είναι πολλαπλότητας 2.

Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές. Παίρνουμε πρώτα $l_1 = 1$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A - I)\vec{x} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

από όπου παίρνουμε τη σχέση $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Θέτουμε $x_2 = c, x_3 = d$ και παίρνουμε

$x_1 = -2c - d,\ x_2 = c,\ x_3 = d,\ \ c, d \in R.$ Οπότε τα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_1 = 1$ είναι της μορφής

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2c - d & c & d \end{pmatrix}'$ όπου $c, d \in R$. Άρα ισχύει

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2c - d & c & d \end{pmatrix}' = c\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}' + d\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}'$. Επομένως η διάσταση του χώρου που παράγεται από ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_1 = 1$ είναι 2, πράγμα που αναμενόταν αφού $n - rank(A - I) = 3 - 1 = 2$.

Παίρνουμε τώρα $l_2 = 5$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A - 5I)\vec{y} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

από όπου παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} -3y_1 + 2y_2 + y_3 &= 0 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 &= 0 \\ y_1 + 2y_2 - 3y_3 &= 0 \end{aligned}\ .$$

Παίρνουμε

$$\left(A-5I|\vec{0}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}H_{12}\\ \vdots\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}H_{21}(3)\\ \vdots\\ H_{31}(-1)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 4 & 0\\ 0 & 4 & -4 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}H_{2}(-1/4)\\ \vdots\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 4 & -4 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}H_{12}(2)\\ \vdots\\ H_{32}(-4)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Από τον τελευταίο πίνακα παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{array}{l}y_1-y_3=0\\ y_2-y_3=0\end{array}.$$

Θέτουμε $y_3=c,\ c\in R$ και παίρνουμε $y_1=y_2=c$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα $\vec{y}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_2=5$ είναι της μορφής $\vec{y}=\begin{pmatrix}c & c & c\end{pmatrix}'$ όπου $c\in R$. Άρα ισχύει

$$\vec{y}=\begin{pmatrix}c & c & c\end{pmatrix}'=c\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}'.$$

Επομένως η διάσταση του χώρου που παράγεται από ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_2=5$ είναι 1 πράγμα που αναμενόταν αφού $n-rank(A-5I)=3-2=1$.

■

<u>Παράδειγμα 2.35</u> Θεωρούμε τον πίνακα

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -7 & -5\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

β) Να βρεθούν οι διαστάσεις των διανυσματικών χώρων που παράγονται από τα ιδιοδιανύσματα.

Απάντηση Θεωρούμε τον πίνακα

$$\left(A-\lambda I\right)=\begin{pmatrix}-3 & -7 & -5\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-\lambda & -7 & -5\\ 2 & 4-\lambda & 3\\ 1 & 2 & 2-\lambda\end{pmatrix}.$$

Άρα

$$\left|A-\lambda I\right|=(-3-\lambda)((4-\lambda)(2-\lambda)-6)+7(4-2\lambda-3)-5(4-4+\lambda)=$$
$$-(\lambda-1)^3$$

Θεωρούμε την εξίσωση
$\left|A-\lambda I\right|=-(\lambda-1)^3=0$. Άρα έχουμε μια ιδιοτιμή την $\lambda=1$, η οποία είναι πολλαπλότητας 3.

Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην παραπάνω ιδιοτιμή. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A-I)\vec{x}=\vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix}-4 & -7 & -5\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$\left(A-I\,|\,\vec{0}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-4 & -7 & -5 & 0\\ 2 & 3 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)\overset{H_{13}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 3 & 0\\ -4 & -7 & -5 & 0\end{array}\right)\underset{H_{31}(4)}{\overset{H_{21}(-2)}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\overset{H_2(-1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\underset{H_{32}(-1)}{\overset{H_{12}(-2)}{\sim}}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Από τον τελευταίο πίνακα έχουμε

$$\begin{matrix} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}.$$

Θέτουμε $x_3 = c, c \in R$ και παίρνουμε $x_1 = -3c,\ x_2 = c$.

Άρα τα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι της μορφής $\vec{x} = c\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}'$ όπου $c \in R$. Επομένως η διάσταση του χώρου που παράγεται από ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι 1 πράγμα που αναμενόταν εφόσον $n - rank(A - I) = 3 - 2 = 1$.

■

<u>Παράδειγμα 2.36</u> Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.
β) Να βρεθούν οι διαστάσεις των διανυσματικών χώρων που παράγονται από τα ιδιοδιανύσματα.

<u>Απάντηση</u> Θεωρούμε τον πίνακα

$$\left(A - \lambda I\right) = \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 3 & 12-\lambda \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$\left|A - \lambda I\right| = (6-\lambda)(12-\lambda) + 9 = \lambda^2 - 18\lambda + 81 = (\lambda - 9)^2.$$

Από την εξίσωση $\left|A - \lambda I\right| = (\lambda - 9)^2 = 0$ προκύπτει μια ιδιοτιμή η $\lambda = 9$, η οποία είναι πολλαπλότητας 2.

Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην παραπάνω ιδιοτιμή. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A - 9I)\vec{x} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

από όπου παίρνουμε $x_1 + x_2 = 0$. Θέτουμε $x_2 = c, c \in R$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 9$ είναι της μορφής $\vec{x} = \begin{pmatrix} -c & c \end{pmatrix}'$ όπου $c \in R$. Εφόσον $\vec{x} = c(-1 \quad 1)$ είναι προφανές ότι η διάσταση του χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 9$ είναι 1.

2.7 Διαγωνοποίηση Πίνακα

Έστω ένας πίνακας A ο οποίος έχει r διακεκριμένες. Τότε έχουμε την παρακάτω πρόταση.

<u>Πρόταση 2.15</u> Έστω A ένας $n\times n$ πίνακας ο οποίος έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές τις $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας T τέτοιος ώστε

$$B=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

Η $i-$στήλη του πίνακα T είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα $A^m, m\in N$, όπου A ένας $n\times n$ πίνακας ο οποίος έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Πράγματι από την προηγούμενη πρόταση έχουμε
$B^m=(T^{-1}AT)^m=T^{-1}ATT^{-1}AT\ldots T^{-1}AT=T^{-1}A^mT$. Άρα $A^m=TB^mT^{-1}$.
Είναι προφανές ότι

$$B^m=\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m\end{pmatrix}.$$

Άρα

$$A^m=T\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m\end{pmatrix}T^{-1}.$$

■

Έστω, τώρα, ένας πίνακας A ο οποίος έχει r διακεκριμένες ιδιοτιμές και n-r ιδιοτιμές με κάποια πολλαπλότητα. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι πρώτες ιδιοτιμές λ_i, i = 1, 2, …, r είναι διακεκριμένες και οι υπόλοιπες λ_i, i = r+1, r+2, …, n έχουν πολλαπλότητα m_i > 1, i = r+1, r+2, …, n. Τότε έχουμε την παρακάτω πρόταση.

<u>Πρόταση 2.16</u> Έστω ένας $n\times n$ πίνακας A ο οποίος έχει r διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_i, i = 1, 2, …, r και n-r ιδιοτιμές λ_i, i = r+1, r+2, …, n. Υποθέτουμε ότι η διάσταση του διανυσματικού χώρου των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην λ_i είναι ίση με m_i, i = r+1, r+2, …, n. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας T τέτοιος ώστε

$$B = T^{-1}AT = diag(l_1, l_2, ..., l_r, l_{r+1}, l_{r+1}, ..., l_{r+1}, ..., l_n, l_n, ..., l_n).$$

Οι στήλες του T είναι διανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i, i = 1, 2, …, n.

<u>Παράδειγμα 2.37</u> Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.
β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $B = T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος.
γ) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^m.

<u>Απάντηση</u> α) Δημιουργούμε τον πίνακα

$$(A - lI) = \begin{pmatrix} 1-l & -1 \\ 2 & 4-l \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$|A - lI| = (1-l)(4-l) + 2 = l^2 - 5l + 6$$

Θεωρούμε την εξίσωση

$|A - lI| = l^2 - 5l + 6 = 0$. Οπότε έχουμε δυο ιδιοτιμές τις $l_1 = 2,\ l_2 = 3$.

Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές.

Έστω πρώτα $l_1 = 2$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A-2I)\vec{x} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

από όπου παίρνουμε $x_1 + x_2 = 0$. Θέτουμε $x_1 = c, c \in R$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l = 2$ είναι της μορφής $\vec{x} = \begin{pmatrix} c & -c \end{pmatrix}'$ όπου $c \in R$. Παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}'.$$

Έστω τώρα $l = 3$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A-3I)\vec{y} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

από όπου παίρνουμε $2y_1 + y_2 = 0$. Θέτουμε $y_1 = c, c \in R$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα $\vec{y}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l = 3$ είναι της μορφής $\vec{y} = \begin{pmatrix} c & -2c \end{pmatrix}'$ όπου $c \in R$. Παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}'.$$

β) Συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας T διαμορφώνεται ως εξής:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

γ) Βρίσκουμε τον T^{-1} ο οποίος είναι ο

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Άρα $B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Άρα $B^m = T^{-1}A^mT = \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{pmatrix}$ από όπου προκύπτει

$$A^m = T\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{pmatrix}T^{-1},\ m \in N.$$

Παράδειγμα 2.38 Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -6 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.
β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $B=T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος.
γ) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^m.

Απάντηση α) Θεωρούμε τον πίνακα

$$\left(A-lI\right)=\begin{pmatrix} 3-l & 1 & 2 \\ -4 & -2-l & -6 \\ 2 & 2 & 5-l \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$\left|A-lI\right|=(3-l)((-2-l)(5-l)+12)-(-20+4l+12)+2(-8+4+2l)$$
$$(3-l)(l-1)(l-2).$$

Θεωρούμε την εξίσωση
$\left|A-lI\right|=(3-l)(l-1)(l-2)=0$. Συνεπώς έχουμε τρεις ιδιοτιμές τις $l_1=1, l_2=2,\ l_3=3$.

Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές.

Έστω πρώτα $l_1=1$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A-I)\vec{x}=\vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -6 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Εφόσον η $l_1=1$ είναι απλή ρίζα η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $l_1=1$ είναι 1. Θέτουμε $x_3=c,\ c\in R$. Οπότε από την πρώτη και τρίτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος έχουμε

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -2c \\ x_1 + x_2 &= -2c \end{aligned}$$. Επομένως $x_1 = 0,\ x_2 = -2c$.

Άρα τα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_1 = 1$ είναι της μορφής $\vec{x} = c\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\end{pmatrix}'$ όπου $c \in R$. Παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}0 & -2 & 1\end{pmatrix}'.$$

Έστω τώρα $l_2 = 2$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A - 2I)\vec{y} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Εφόσον η $l_2 = 2$ είναι απλή ρίζα η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $l_1 = 2$ είναι 1. Θέτουμε $y_2 = c,\ c \in R$. Οπότε από την πρώτη και τρίτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος έχουμε

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_3 &= -c \\ 2y_1 + 3y_3 &= -2c \end{aligned}$$. Επομένως $y_1 = -c,\ y_3 = 0$.

Άρα τα ιδιοδιανύσματα $\vec{y}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_2 = 2$ είναι της μορφής $\vec{y} = c\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}'$ όπου $c \in R$. Παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{y} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}'.$$

Έστω τώρα $l_3 = 3$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A - 3I)\vec{z} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & -5 & -6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Εφόσον η $l_3 = 3$ είναι απλή ρίζα η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $l_3 = 3$ είναι 1. Θέτουμε $z_3 = c,\ c \in R$. Οπότε από την πρώτη και τρίτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος έχουμε

$$\begin{aligned} z_2 &= -2c \\ z_1 + z_2 &= -c \end{aligned}$$. Επομένως $z_1 = c,\ z_2 = -2c$.

Άρα τα ιδιοδιανύσματα $\vec{z}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_3 = 3$ είναι της μορφής $\vec{z} = c(1 \quad -2 \quad 1)'$ όπου $c \in R$. Παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα

$$\vec{z} = (1 \quad -2 \quad 1)'.$$

β) Συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας T διαμορφώνεται ως ακολούθως:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

γ) Θα βρούμε τον T^{-1}. Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(T \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{H_{13}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{H_{21}(2)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{H_{32}(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{H_{13}(-1)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$ Επομένως $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Άρα $B^m = T^{-1} A^m T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix}$ από όπου παίρνουμε

$$A^m = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix} T^{-1}, \ m \in N.$$

■

Παράδειγμα 2.39 Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.
β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $B=T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος.
γ) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^m.

Απάντηση α) Δημιουργούμε τον πίνακα

$$A-lI=\begin{pmatrix} 2-l & 1 & 2 \\ -2 & -1-l & -4 \\ 1 & 1 & 3-l \end{pmatrix}.$$

Τότε από την εξίσωση

$$|A-lI|=(2-l)(l-1)^2=0$$

βρίσκουμε τις ιδιοτιμές $l_1=2$, η οποία είναι απλή ρίζα, και $l_2=1$, η οποία είναι πολλαπλή ρίζα πολλαπλότητας 2.

Έστω, πρώτα, $l_1=2$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A-2I)\vec{x}=\vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Εφόσον η ιδιοτιμή $l_1=2$ είναι απλή ρίζα, η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή αυτή είναι ίση με 1. Επομένως, θέτοντας $x_3=c$, $c\in R$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} \quad\quad\quad\ x_2 - 2c = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - 4c = 0 \\ \quad x_1 + x_2 + c = 0 \end{cases}$$

από το οποίο βρίσκουμε τις λύσεις $x_1 = c$, $x_2 = -2c$, $x_3 = c$, $c \in \mathbb{R}$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_1 = 2$ θα είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} c & -2c & c \end{pmatrix}', \ c \in \mathbb{R}.$$

Παίρνουμε τον ιδιοδιάνυσμα

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}'.$$

Έστω, τώρα, $l_2 = 1$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A - I)\vec{x} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

το οποίο ανάγεται εν τέλει στην εξίσωση $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Επομένως, θέτοντας $x_2 = c$, $x_3 = d$, $c, d \in R$ βρίσκουμε τις λύσεις $x_1 = -c - 2d$, $x_2 = c$, $x_3 = d$, $c, d \in R$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_2 = 1$ θα είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} -c - 2d & c & d \end{pmatrix}', \ c, d \in R.$$

Οπότε η διάσταση του διανυσματικού χώρου των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_2 = 1$ είναι 2 δηλαδή ίση με την πολλαπλότητα της ιδιοτιμής αυτής. Θέτοντας $c = 1$, $d = 0$ και $c = 0$, $d = 1$προκύπτουν αντιστοίχως τα ιδιοδιανύσματα

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}' \quad \text{και} \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}'.$$

β) Συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας T διαμορφώνεται ως εξής:

$$T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

γ) Αρχικά υπολογίζουμε τον T^{-1} σχηματίζοντας τον επαυξημένο πίνακα

$$(T \mid I)=\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} H_{21}(2) \\ \sim \\ H_{31}(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} H_{2}(-1) \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} H_{12}(1) \\ \sim \\ H_{32}(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} H_{3}(-1) \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} H_{13}(-2) \\ \sim \\ H_{23}(-4) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Οπότε

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$B^n = T^{-1}A^nT$$

ή ισοδύναμα

$$A^n = TB^nT^{-1} = T\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}T^{-1}.$$

■

2.8 Κανονική Μορφή του Jordan

Έστω ένας πίνακας A ο οποίος έχει αφενός μεν ιδιοτιμές τέτοιες ώστε οι διαστάσεις των διανυσματικών χώρων που παράγονται από τα ιδιοδιανύσματα τους να είναι ίσες με την πολλαπλότητα των ιδιοτιμών, αφετέρου δε ιδιοτιμές τέτοιες ώστε οι διαστάσεις των διανυσματικών χώρων των ιδιοδιανυσμάτων τους να είναι μικρότερες από την πολλαπλότητα των ιδιοτιμών. Τότε, σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση, υπάρχει πίνακας T τέτοιος ώστε

$$B = T^{-1}AT = diag(J_1, J_2, ..., J_s),$$

όπου

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & e_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & e_i & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, ..., s,\ e_i \in \{0,1\}$$

και λ_i ιδιοτιμή του πίνακα *A*. Πιο συγκεκριμένα ισχύει η παρακάτω πρόταση.

<u>Πρόταση 2.17</u> Έστω ένας $n \times n$ πίνακας *A* ο οποίος έχει ιδιοτιμές λ_i, $i = 1, 2, ..., s$ πολλαπλότητας $m_i > 1$, $i = 1, 2, ..., s$. Υποθέτουμε ότι για $i = 1, 2, ..., s$ η διάσταση του διανυσματικού χώρου των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στη λ_i είναι ίση με $q_i < m_i$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας *T* τέτοιος ώστε

$$B = T^{-1}AT = diag(J_1, J_2, ..., J_t),$$

όπου

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, ..., t \ .$$

<u>Ορισμός 2.20</u> *Ο πίνακας B καλείται **κανονική μορφή του Jordan***.

Οι στήλες του *T* είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i, $i = 1, 2, ..., s$ και κατασκευάζονται ως εξής: Θεωρούμε τα γραμμικώς ανεξάρτητα $x_1, x_2, ..., x_{q_i}$ διανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i. Τα υπόλοιπα $m_i - q_i$ διανύσματα τα παίρνουμε σύμφωνα με τη «μέθοδο της αλυσίδας» ή «κανόνα της αλυσίδας» ως ακολούθως:

$$(A - \lambda_i I)\bar{y}_1 = 0, \quad (A - \lambda_i I)\bar{y}_2 = \bar{y}_1, \quad \ldots \quad (A - \lambda_i I)\bar{y}_{m_i - q_i} = \bar{y}_{m_i - q_i - 1}$$

έτσι ώστε τα $x_1, x_2, ..., x_{q_i}, y_1, y_2, ..., y_{m_i - q_i}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>Παράδειγμα 2.40</u> Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $B = T^{-1}AT$ να είναι η κανονική μορφή του Jordan.

<u>Απάντηση</u> Δημιουργούμε τον πίνακα

$$A - lI = \begin{pmatrix} 2-l & 1 & 1 \\ -1 & 1-l & -1 \\ -1 & -1 & -l \end{pmatrix}.$$

Τότε από την εξίσωση

$$|A - lI| = -(l-1)^3 = 0$$

βρίσκουμε την ιδιοτιμή $l = 1$, η οποία είναι πολλαπλή ρίζα πολλαπλότητας 3.

Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A - I)\vec{x} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

από όπου παίρνουμε

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 0 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} x_1 & & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & & = & 0 \end{cases}.$$

Θέτουμε $x_3 = c$ και έχουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l = 1$ είναι της μορφής

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -c & 0 & c \end{pmatrix}', \quad c \in \mathbb{R}.$$

Η πολλαπλότητα, όμως, της ιδιοτιμής $l = 1$ είναι 3, επομένως πρέπει να αναζητήσουμε δύο διανύσματα $\overline{y}$, $\overline{z}$ έτσι ώστε τα $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Οπότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε

$$(A - lI)\overline{y} = \overline{x}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

από όπου παίρνουμε

$$\begin{cases} y_1 & +y_2 & +y_3 & = & -c \\ -y_1 & & -y_3 & = & 0 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & = & c \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} y_1 & +y_2 & +y_3 & = & -c \\ -y_1 & & -y_3 & = & 0 \end{cases}$$

και τελικά

$$\begin{cases} & y_2 & & = & -c \\ y_1 & & +y_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Θέτουμε $y_2 = -c$, $y_1 = y_3 = 0$ και έτσι καταλήγουμε

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \end{pmatrix}', \quad c \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμόζοντας εκ νέου τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε

$$(A - lI)\overline{z} = \overline{y}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\begin{cases} z_1 & +z_2 & +z_3 & = & 0 \\ -z_1 & & -z_3 & = & -c \\ -z_1 & -z_2 & -z_3 & = & 0 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} z_1 & +z_2 & +z_3 & = & 0 \\ -z_1 & & -z_3 & = & -c \end{cases}$$

και τελικά

$$\begin{cases} & z_2 & & = & -c \\ z_1 & & +z_3 & = & c \end{cases}.$$

Θέτουμε $z_1 = 0$, $z_2 = -c$, $z_3 = c$ και έτσι καταλήγουμε

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} 0 & -c & c \end{pmatrix}', \quad c \in \mathbb{R}.$$

Αν θέσουμε $c = 1$ διαπιστώνουμε ότι πράγματι τα διανύσματα

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}',$$
$$\overline{y} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}',$$
$$\overline{z} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}',$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Οπότε ο πίνακας *T* διαμορφώνεται ως εξής:

$$T=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Εν συνεχεία υπολογίζουμε τον αντίστροφό του πίνακα T^{-1}.

$$\left(T \mid I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\sim}{H_1(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\sim}{H_{31}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\sim}{H_2(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\sim}{H_{23}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Επομένως

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Άρα

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

<u>Παράδειγμα 2.41</u> Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $B = T^{-1}AT$ να είναι η κανονική μορφή του Jordan.

<u>Απάντηση</u> Δημιουργούμε τον πίνακα

$$A - l\,I = \begin{pmatrix} 4-l & 4 & 0 \\ -1 & -l & 0 \\ 0 & 0 & 1-l \end{pmatrix}.$$

Τότε από την εξίσωση

$$|A - l\,I| = -(l-1)(l-2)^2 = 0$$

βρίσκουμε τις ιδιοτιμές $l_1 = 1$, η οποία είναι απλή ρίζα, και $l_2 = 2$, η οποία είναι πολλαπλή ρίζα πολλαπλότητας 2.

Έστω, πρώτα, $l_1 = 1$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A - I)\vec{x} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Εφόσον η ιδιοτιμή $l_1 = 1$είναι απλή ρίζα, η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή αυτή είναι ίση με 1. Επομένως, από το σύστημα

$$\begin{cases} 3x_1 & +4x_2 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & = & 0 \end{cases}$$

βρίσκουμε $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Οπότε αν θέσουμε $x_3 = c$, $c \in R$, διαπιστώνουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_1 = 1$ είναι της μορφής

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \end{pmatrix}', \quad c \in ¡ .$$

Έστω τώρα $l_2 = 2$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

από όπου παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2y_1 & +4y_2 & & = & 0 \\ -y_1 & -2y_2 & & = & 0 \\ & & -y_3 & = & 0 \end{cases}$$

Συνεπώς, θέτοντας $y_2 = d$, $d \in R$ βρίσκουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_2 = 2$ θα είναι της μορφής

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} -2d & d & 0 \end{pmatrix}', \quad d \in R .$$

Η πολλαπλότητα, όμως, της ιδιοτιμής $l_2 = 2$ είναι 2, επομένως πρέπει να αναζητήσουμε ένα διάνυσμα $\overline{z}$ έτσι ώστε τα $\overline{y}$, $\overline{z}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Οπότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε

$$(A - l\,I)\overline{z} = \overline{y}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2d \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$$

από όπου παίρνουμε

$$\begin{cases} 2z_1 & +4z_2 & & = & -2d \\ -z_1 & -2z_2 & & = & d \\ & & -z_3 & = & 0 \end{cases}$$

και τελικά

$$\begin{cases} z_1 & & & = & -d-2h \\ & z_2 & & = & h \\ & & z_3 & = & 0 \end{cases}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $l_2 = 2$ είναι της μορφής

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} -2d & d & 0 \end{pmatrix}', \quad d \in R.$$

και

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} -d-2h & h & 0 \end{pmatrix}', \quad d \in R.$$

Αν θέσουμε $c = 1,\ d = 1,\ f = 0$ διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}',$$
$$\overline{y} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}',$$
$$\overline{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}',$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Οπότε ο πίνακας T διαμορφώνεται ως εξής:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εν συνεχεία υπολογίζουμε τον αντίστροφό του πίνακα T^{-1}.

$$\left(T \mid I\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{H_{13}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{H_{32}(2)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{H_{3}(-1)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Επομένως

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

Ασκήσεις

Άσκηση 2.1
Να αποδειχτεί ότι οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$$

είναι αντιμεταθετικοί.

Άσκηση 2.2
Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

α) Να αποδειχτεί ότι

$$AB = -BA.$$

β) Να αποδειχτεί ότι

$$\left(A+B\right)^2 = A^2 + B^2.$$

Άσκηση 2.3
Να προσδιοριστούν τα α, β, γ και δ, ώστε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ g & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.4
Έστω M_{2x2} ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων.
α) Να δειχτεί ότι οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι.
β) Να εκφραστεί ο πίνακας

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ως γραμμικός συνδυασμός των πινάκων A, B, Γ και Δ.

Άσκηση 2.5
Να αποδειχτεί η ταυτότητα

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

Άσκηση 2.6
Να αποδειχτεί η ταυτότητα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+b & a+2b \\ a(a+b) & (a+b)(a+2b) & (a+2b)(a+3b) \end{vmatrix} = 2b^3.$$

Άσκηση 2.7
Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Να δειχθεί ότι η τάξη του πίνακα A είναι ίση με 3.

Άσκηση 2.8
Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

α) Να βρεθεί ο συναφής *adjA* του πίνακα A.
β) Να βρεθεί ο αντίστροφος A^{-1} του πίνακα A.
γ) Να βρεθεί η τάξη του πίνακα A.

Άσκηση 2.9

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

α) Να βρεθεί ο συναφής *adjA* του πίνακα *A*.
β) Να βρεθεί ο αντίστροφος A^{-1} του πίνακα *A*.
γ) Να βρεθεί η τάξη του πίνακα *A*.

Άσκηση 2.10

Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 4 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 5 \end{array}.$$

Άσκηση 2.11

Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 \end{array}.$$

Άσκηση 2.12

Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & +6x_3 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 0 \end{array}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ
3

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του n-διάστατου χώρου $\mathbb{R}^n$ και έστω μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών f η οποία ορίζεται στο U.

<u>Ορισμός</u> Ένα σημείο P του U λέγεται **απόλυτο ελάχιστο** (αντίστοιχα **απόλυτο μέγιστο**) της πραγματικής συνάρτησης f, αν $f(P) \leq f(X)$ (αντίστοιχα $f(P) \geq f(X)$), $\forall X \in U$.

<u>Ορισμός</u> Ένα σημείο P του U λέγεται **τοπικό** ή **σχετικό ελάχιστο** (αντίστοιχα **τοπικό** ή **σχετικό μέγιστο**) της πραγματικής συνάρτησης f, αν υπάρχει μία περιοχή $B(P,a) \subset U$ τέτοια ώστε $f(P) \leq f(X)$ (αντίστοιχα $f(P) \geq f(X)$), $\forall X \in B(P,a)$.

Ορισμός Ένα σημείο *P* του ανοικτού συνόλου *U* ονομάζεται **κρίσιμο σημείο** της πραγματικής συνάρτησης *f*, αν

$$D_1 f(P) = D_2 f(P) = ... = D_n f(P) = 0.$$

Θεώρημα Αν $P \in U$ τοπικό ακρότατο της πραγματικής συνάρτησης *f*, τότε το *P* είναι κρίσιμο σημείο της *f*.

Θεώρημα (*Κριτήριο του Sylvester*) Έστω ότι η πραγματική συνάρτηση *f* έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης και έστω ακόμη ότι το *P* είναι κρίσιμο σημείο της *f*. Για συντομία χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

και τις ορίζουσες

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; \ldots, \; \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

οι οποίες ονομάζονται ορίζουσες Εσσιανών πινάκων. Τότε:

(i) Αν $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, …, $\Delta_n>0$,
τότε η *f* έχει τοπικό ελάχιστο στο *P*.

(ii) Αν $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, …, $(-1)^n\Delta_n>0$,
τότε η *f* έχει τοπικό μέγιστο στο *P*.

(iii) Αν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii) και $\Delta_k \neq 0$, $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, τότε η *f* δεν έχει τοπικό ακρότατο στο *P*.

(iv) Αν $\Delta_k=0$, για κάποιο $k \in \{1, 2, ..., n\}$,
τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο *P*.

Άσκηση Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f : R^3 \to R, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_1 - 2x_3 .$$

Απάντηση Λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \partial f / \partial x_1 = 0 \\ \partial f / \partial x_2 = 0 \\ \partial f / \partial x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ 2x_2 - x_1 = 0 \\ 2x_3 - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2/3 \\ x_2 = -1/3 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

Οπότε για το κρίσιμο σημείο $P\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ βρίσκουμε

$$\begin{array}{lll} a_{11} = D_1^2 f(P) = 2 & a_{12} = D_1 D_2 f(P) = -1 & a_{13} = D_1 D_3 f(P) = 0 \\ a_{21} = D_2 D_1 f(P) = -1 & a_{22} = D_2^2 f(P) = 2 & a_{23} = D_2 D_3 f(P) = 0 \\ a_{31} = D_3 D_1 f(P) = 0 & a_{32} = D_3 D_2 f(P) = 0 & a_{33} = D_3^2 f(P) = 2 \end{array}$$

Επομένως για τις ορίζουσες των Εσσιανών πινάκων προκύπτουν οι παρακάτω τιμές

$$\Delta_1 = a_{11} = 2 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0 .$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το κριτήριο του Sylvester, στο σημείο P έχουμε τοπικό ελάχιστο και $f_{\min} = f(P) = -\frac{4}{3}$.

■

Άσκηση Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=x^3+3xy^2-3x^2-3y^2+4.$$

Απάντηση Λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned}\partial f/\partial x=0\\ \partial f/\partial y=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\qquad \left.\begin{aligned}3x^2+3y^2-6x=0\\ 6xy-6y=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2-2x=0\\ xy-y=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\qquad \left.\begin{aligned}x^2+y^2-2x=0\\ y(x-1)=0\end{aligned}\right\}$$

συνεπώς

$$y=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=2\end{cases}\quad \text{ή}\quad x=1\Rightarrow\begin{cases}y=1\\ y=-1\end{cases}$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι τα κρίσιμα σημεία είναι:

$$P_1(0,0),\quad P_2(2,0),\quad P_3(1,1),\quad P_4(1,-1).$$

Υπολογίζουμε τις

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x-6,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x-6,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6y.$$

Οπότε

$$\Delta_2=[(6x-6)(6x-6)-(6y)^2]=36\left[(x-1)^2-y^2\right].$$

Στο $P_1(0,0)$ είναι $\Delta_1=-6<0$ και $\Delta_2=36>0$, άρα έχουμε τοπικό μέγιστο $f_{\max}=f(P_1)=4$.

Στο $P_2(2,0)$ είναι $\Delta_1=6>0$ και $\Delta_2=36>0$, άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο $f_{\min}=f(P_2)=0$.

Στο $P_3(1,1)$ είναι $\Delta_1=0$, άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P_3.

Στο $P_4(1,-1)$ είναι $\Delta_1=0$, άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P_4.

■