<u>Θεώρημα</u> (*Κριτήριο του Sylvester*) Έστω ότι η πραγματική συνάρτηση f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης και έστω ακόμη ότι το P είναι κρίσιμο σημείο της f. Για συντομία χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

και τις ορίζουσες

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

οι οποίες ονομάζονται ορίζουσες Εσσιανών πινάκων. Τότε:

(i) Αν $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, …, $\Delta_n>0$,
τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο P.

(ii) Αν $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, …, $(-1)^n\Delta_n>0$,
τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο P.

(iii) Αν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii) και $\Delta_k \neq 0$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο P.

(iv) Αν $\Delta_k=0$, για κάποιο $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P.

Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών

$$P(x)dx = Q(y)dy \Rightarrow \int P(x)dx = \int Q(y)dy + c.$$

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις $1^{ης}$ τάξης

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx\right].$$

Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις $1^{ης}$ τάξης

$y' = f(x, y)$. Αν $f(ax, ay) = f(x, y)$ τότε $y = xv$ και $y' = v + xv'$.

Γραμμικές Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις $2^{ης}$ τάξης με σταθ. συντελεστές

$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$. Έστω $l^2 + a_1 l + a_0 = 0$. Τότε:

(i) $l_1 \neq l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = c_1 e^{l_1 x} + c_2 e^{l_2 x}$

(ii) $l_1 = l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = c_1 e^{l_1 x} + c_2 x e^{l_1 x}$

(iii) $l_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C} \Rightarrow y = e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right)$