ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ : Φυσικής και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Μάθημα : **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά**

Διδάσκων: Αν. καθηγητής Χρ. Σχοινάς

Προαιρετική Εργασία :

ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΤΟΥΣ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΥΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΦΟΙΤΗΤΗ

Επίθετο : Μαξιμίδης

Όνομα : Ρόνις

Εξάμηνο : 1

Α.Μ.: 369

Περιεχόμενα

1. Η εξαγωγή της εξίσωσης κύματος

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την εύρεση αναλυτικών εκφράσεων για τις κατανομές πεδίου μέσα στους κυματοδηγούς διαφορετικών διατομών. Για την εύρεση των κατανομών αυτών θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση κύματος για κάθε μια από τις περιπτώσεις. Άρα το πρώτο βήμα είναι η εξαγωγή της εξίσωσης κύματός της από τις εξισώσεις Maxwell.

Οι γενικοί διαφορική μορφή των χρονομεταβλητών εξισώσεων Maxwell είναι η εξής

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \boldsymbol{M} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \rho / \varepsilon \\ \nabla \cdot \boldsymbol{J} &= m / \mu \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ενώ επειδή για τα χρονικά αρμονικά πεδία (με εξάρτηση από τον χρόνο της μορφής $e^{j\omega t}$) ισχύει $\partial / \partial t = j\omega$ οι εξισώσεις Maxwell παίρνουν την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= -j\omega\mu \boldsymbol{H} - \boldsymbol{M} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= j\omega\varepsilon \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \rho / \varepsilon \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} &= m / \mu \end{aligned} \tag{1.2}$$

Στα ανώτερα $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{H}$ είναι τα διανύσματα της έντασης ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, $\boldsymbol{J}$ και $\boldsymbol{M}$ είναι πυκνότητες ηλεκτρικού και μαγνητικού ρεύματος, ρ και m είναι πυκνότητες ηλεκτρικού και μαγνητικού φορτίου, ε είναι η ηλεκτρική διαπερατότητα και μ είναι η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου. Σημειώνουμε ότι τα $\boldsymbol{M}$ και m αντιπροσωπεύουν "πλασματικά" μεγέθη, και δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα. Εντούτοις αντιπροσωπεύουν ισοδύναμα μεγέθη με πολύ βολικό και υπολογιστικά αποτελεσματικό τρόπο. Έτσι χρησιμοποιούνται κατά κόρον στις εξισώσεις Maxwell που με την προσθήκη τους αποτελούν ένα πλήρες μαθηματικό σύνολο εξισώσεων με ενδιαφέρουσες ιδιότητες όπως αυτή της Δυαδικότητας μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών μεγεθών.

Παίρνοντας την στροφή των δυο πρώτων εξισώσεων, καταλήγουμε στις παρακατω εξισώσεις :

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} - \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{E} &= -j\omega\mu \boldsymbol{J} - \nabla \times \boldsymbol{M} \\ \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} - \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{H} &= -j\omega\varepsilon \boldsymbol{M} + \nabla \times \boldsymbol{J} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Επειδή ο σκοπός μας είναι να δούμε τα διαδεδομένα μέσα στον κυματοδηγό πεδία θεωρούμε ότι είμαστε αρκετά μακριά από την πηγή, άρα $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{M} = 0$ και $\rho = m = 0$ όποτε θα έχουμε.

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} - \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{E} &= 0 \\ \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} - \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{H} &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να απλοποιηθεί με την διανυσματική ταυτότητα :

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{1.5}$$

Ορίζουμε επίσης μια σταθερά $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ που λέγεται κυματάριθμος ή σταθερά διάδοσης του μέσου και επειδή $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon = 0$ και $\nabla \cdot \boldsymbol{H} = m/\mu = 0$ για τις περιοχές χωρίς φορτία τελικά καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.6}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + k^2 \boldsymbol{H} = 0 \tag{1.7}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι η εξισώσεις κύματος ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα στην ελεύθερη φορτιών και ρευμάτων περιοχή.

2. Ορισμός ρυθμών κυματοδήγησης

Αν θεωρούμε ότι η διάδοση γίνεται στη διεύθυνση του άξονα z, τότε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται κατά τη διεύθυνση z εκθετικά με τη μορφή :

$$e^{-\gamma_m z} \tag{1.8}$$

Ο γ_{mn} ονομάζεται σταθερά διάδοσης για τον ρυθμό mn, και ένας μιγαδικός αριθμός $\gamma_{mn} = (\alpha_{mn} + j\beta_{mn})$ που εξαρτάται από την διατομή, την συχνότητα και το υλικό κατασκευής του κυματοδηγού. Εδώ α είναι ο συντελεστής απωλειών και β είναι η σταθερά διάδοσης. Έτσι για την περίπτωση που δεν έχουμε απώλειες $\alpha = 0$ και $\gamma_{mn} = j\beta$.

Γενικά ένας κυματοδηγός μπορεί να επιτρέπει την διάδοση ορισμένων 'μορφών' ηλεκτρομαγνητικών πεδίων γνωστών ως 'ρυθμοί'. Ένας ρυθμός εξαρτάται από την συχνότητα, τη θέση και το είδος της πηγής διέγερσης. Για μια συγκεκριμένη συχνότητα μόνο ορισμένα είδη ρυθμών είναι δυνατά.

Κωδικοποίηση των ρυθμών μπορεί να γίνει βάσει των συνιστωσών E_z και H_z του ηλεκτρικού πεδίου κατά την διεύθυνση διάδοσης.

TEM (Transverse Electromagnetic) όπου $E_z = 0$ και $H_z = 0$

TE (Transverse Electric) όπου $E_z = 0$ και $H_z \neq 0$

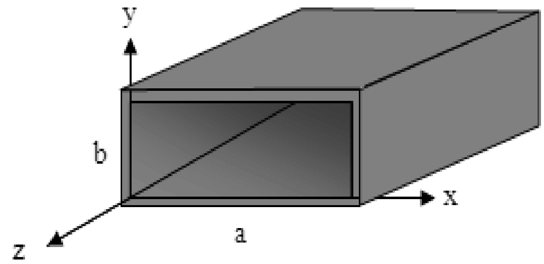
TM (Transverse Magnetic) όπου $E_z \neq 0$ και $H_z = 0$

HE και *EH* (Υβριδικοί Ρυθμοί) όπου $E_z \neq 0$ και $H_z \neq 0$

Συνήθως ένας κυματοδηγός μπορεί να έχει μόνο ορισμένα είδη ρυθμών κάτω από ορισμένες συνθήκες. Στις επόμενες ενότητες θα αναλύσουμε την κυματοδήγηση σε κυματοδηγούς διάφορων διατομών.

3. Ορθογωνικός Κυματοδηγός

Υποθέτουμε ότι ο κυματοδηγός έχει τις τρεις διαστάσεις τοποθετημένες κατά τους άξονες x, y, z (σχήμα 1)



Σχήμα 1. Κυματοδηγός ορθογωνικής διατομής.

Θεωρείται ότι η διατομή του είναι ομοιόμορφη στα επίπεδα κάθετα στον άξονα z και ότι ο κυματοδηγός εκτείνεται απεριόριστα. Για να βρούμε τις εκφράσεις ηλεκτρομαγνητικού πεδίου πρέπει να λύσουμε την κυματική εξίσωση (1.6). Εάν το $\boldsymbol{E}$ θα αναλυθεί σε συνιστώσες (E_x, E_y, E_z) τότε η εξίσωση (1.6) για την E_z συνιστώσα γράφεται

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -k^2 E_z \tag{1.9}$$

Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, έτσι θέτουμε την E_z στην ακόλουθη μορφή :

$$E_z = X(x)Y(y)Z(z) \tag{1.10}$$

Εάν θα αντικαταστήσουμε την (1.10) στην (1.9) παίρνουμε :

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = -k^2 X(x)Y(y)Z(z) \tag{1.11}$$

Διαιρούμε τα δυο μελή του (1.11) με το γινόμενο $X(x)Y(y)Z(z)$ και έχουμε :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k^2 \tag{1.12}$$

φυσικά υποθέτουμε ότι $X(x)Y(y)Z(z) \neq 0$

Το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης αποτελείται από τρεις όρους, που ο καθένας είναι συνάρτηση και μιας από τις ανεξάρτητες μεταβλητές x, y, z. Για να ισχύει η (1.12) θα πρέπει ο κάθε όρος να είναι ίσος με μια σταθερή ποσότητα.

Ορίζουμε :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2, \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k_z^2 \tag{1.13}$$

όπου τα k_x, k_y, k_z είναι σταθεροί μιγαδικοί αριθμοί που υπακούουν στη σχέση :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = -k^2 \tag{1.14}$$

Επειδή όπως έχουμε αναφέρει η μεταβολή του πεδίου κατά τον άξονα διάδοσης z δίνεται από $e^{\gamma_{mn} z}$ για το k_z παίρνουμε :

$$\frac{Z''(z)}{Z} = \frac{(e^{\gamma_{mn} z})''}{e^{\gamma_{mn} z}} = \gamma_{mn}^2 = -k_z^2 \tag{1.15}$$

Αντικαθιστώντας το k_z από την (1.15) στην (1.14) παίρνουμε

$$k_x^2 + k_y^2 = -k^2 - \gamma_{mn}^2 \tag{1.16}$$

Στην περίπτωση της διάδοσης στο χωρίς απώλειες $\gamma_{mn} = j\beta$ άρα η (1.16) γίνεται :

$$k_x^2 + k_y^2 = \beta^2 - k^2 \tag{1.17}$$

Ορίζουμε τώρα $k_c^2 = k^2 - \beta^2$, και έτσι τελικά καταλήγουμε στην :

$$k_x^2 + k_y^2 = -k_c^2 \tag{1.18}$$

3.1 Λύση της εξίσωσης κύματος.

Οι λύση της εξίσωσης (1.13) για τις συναρτήσεις $X(x)$ και $Y(y)$ θα πάρουμε τις εκφράσεις της μορφής :

$$X(x) = A\sin(jk_x x) + B\cos(jk_x x) \tag{1.19}$$

$$Y(y) = C\sin(jk_y y) + D\cos(jk_y y) \tag{1.20}$$

Όπου A, B, C, D είναι τυχαίες σταθερές.

Για τον υπολογισμό των k_x και k_y χρησιμοποιούμε οριακή συνθήκη για τη εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου. Θεωρώντας ότι τα τοιχώματα του κυματοδηγού είναι ιδανικοί ηλεκτρική αγωγοί τότε για τη εφαπτομένη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου ισχύει :

$$\hat{n} \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.21}$$

Άρα επειδή E_z είναι παράλληλη στα τοιχώματα του κυματοδηγού πρέπει :

$$X(x) = 0 \quad \gamma\iota\alpha\ x = 0, a \tag{1.22}$$

$$Y(y) = 0 \quad \gamma\iota\alpha\ y = 0, b \tag{1.23}$$

Όπου a και b είναι διαστάσεις του κυματοδηγού στον x και στον y άξονα αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη (1.22) στην (1.19) παίρνουμε :

$$\left.\begin{aligned} X(0) &= A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0 \Rightarrow B = 0 \\ X(a) &= A\sin(jk_x a) + B\cos(jk_x a) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{1.24}$$

$$A\sin(jk_x a) = 0 \tag{1.25}$$

Για να έχουμε μη-τετριμμένη λύση $A \neq 0$ άρα

$$\sin(jk_x a)=0 => jk_x a = n\pi => jk_x = n\pi / a \tag{1.26}$$

Άρα η σχέση που ισχύει για το $X(x)$ είναι

$$X(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{1.27}$$

Τώρα εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη (1.23) στην (1.20) παίρνουμε :

$$\left.\begin{aligned} Y(0) &= C\cdot 0 + D\cdot 1 = 0 => D = 0 \\ Y(b) &= C\sin(jk_y b) + D\cos(jk_y b) = 0 \end{aligned}\right\} => \tag{1.28}$$

$$C\sin(jk_y b) = 0 \tag{1.29}$$

Για να έχουμε μη-τετριμμένη λύση $C \neq 0$ άρα

$$\sin(jk_y b)=0 => jk_y b = m\pi => jk_y = m\pi / b \tag{1.30}$$

Άρα η σχέση που ισχύει για το $Y(y)$ είναι

$$Y(y) = C\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \tag{1.31}$$

Οι γενική λύση για την E_z μετά από όσα αναφέρθηκαν θα είναι :

$$E_z = X(x)Y(y)Z(z)\cdot e^{\omega t} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \tag{1.32}$$

όπου $E_0 = A\cdot C$

Τα m και n είναι ακέραιοι αριθμοί και μπορούν να πάρουν όλες τις δυνατές τιμές. Κάθε συνδυασμός m και n δίνει και μια λύση στις εξισώσεις του Maxwell, ενώ κάθε λύση δίνει και έναν διαφορετικό ρυθμό κυματοδήγησης. Τα m και n είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος, ενώ η λύση (1.32) είναι η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση.

3.2 Εκφράσεις για τις συνιστώσες πεδίου

Για την περιοχή ελεύθερη πηγών οι δυο πρώτες εξισώσεις Maxwell γράφονται:

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{E} &= -j\omega\mu\boldsymbol{H} \\ \nabla\times\boldsymbol{H} &= j\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{1.33}$$

Εάν θα τις αναλύσουμε σε συνιστώσες παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu H_z \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=j\omega\varepsilon E_x\\&\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=j\omega\varepsilon E_y\\&\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=j\omega\varepsilon E_z\end{aligned}\tag{1.35}$$

Όμως ξέρουν ότι το πεδίο κατά τον z άξονα έχει την εξάρτηση της μορφής $e^{-j\beta z}$, έτσι η οι παραπάνω εξισώσεις ανάγονται στις :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial E_z}{\partial y}+j\beta E_y=-j\omega\mu H_x\\&-j\beta E_x-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-j\omega\mu H_y\\&\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-j\omega\mu H_z\\&\frac{\partial H_z}{\partial y}+j\beta H_y=j\omega\varepsilon E_x\\&-j\beta H_x-\frac{\partial H_z}{\partial x}=j\omega\varepsilon E_y\\&\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=j\omega\varepsilon E_z\end{aligned}\tag{1.36}$$

Από τις έξι αυτές εξισώσεις χρησιμοποιώντας την σχέση $k_c^2=k^2-\beta^2$ προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για τις τέσσερις εγκάρσιες συνιστώσες των πεδίων συναρτήσει των E_z και H_z :

$$\begin{aligned}&H_x=\frac{j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}-\beta\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\\&H_y=\frac{-j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}+\beta\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)\\&E_x=\frac{-j}{k_c^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial x}+\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)\\&E_y=\frac{j}{k_c^2}\left(-\beta\frac{\partial E_z}{\partial y}+\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\tag{1.37}$$

Οι συνιστώσες του πεδίου στο επίπεδο xy είναι συναρτήσεις των E_z και H_z που μπαίνουν στις παραπάνω εξισώσεις ως ανεξάρτητες συναρτήσεις. Οι δυο αυτές ανεξάρτητες συναρτήσεις δίνουν τις εξισώσεις ανεξαρτήτων πεδίων (1.37).

Ένα ερώτημα είναι αν μπορούν να είναι σύγχρονος τα E_z και H_z διάφορα του μηδενός και να δίνουν ένα ρυθμό. Τα δυο παραπάνω πεδία δίνουν εντελώς ανεξάρτητες λύσεις μη συνδεδεμένες μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να μη δίνουν κάποιο καινούργιο ρυθμό. Έτσι σε περίπτωση που υπάρχουν και τα δύο πρέπει να συνυπάρχουν περισσότεροι από ένας ρυθμοί. Ετσι ξεχωριζουμε τους *TM* και *TE* ρυθμούς, με $H_z = 0$ ή $E_z = 0$ αντίστοιχα.

3.3 Ρυθμοί TM (Ez≠0, Hz=0)

Αν αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις (1.37), $H_z = 0$ και E_z από την (1.32) παίρνουμε :

$$
\begin{aligned}
E_x &= -E_0 \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} e^{\omega t} \\
E_x &= -E_0 \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} e^{\omega t} \\
E_z &= E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} e^{\omega t} \\
H_x &= E_0 \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} e^{\omega t} \\
H_y &= -E_0 \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} e^{\omega t} \\
H_z &= 0
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

3.4 Ρυθμοί TE (Ez=0, Hz≠0)

Από τις εξισώσεις (1.37) για $E_z = 0$ παίρνουμε

$$
\frac{\partial H_z}{\partial x} = -j \frac{k_c^2}{\omega\mu} E_y, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} = j \frac{k_c^2}{\omega\mu} E_x \tag{1.39}
$$

Όμως οι συνοριακές συνθήκες δίνουν ότι :

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \quad \gamma\iota\alpha\ y = 0, b \\
E_y &= 0 \quad \gamma\iota\alpha\ x = 0, a
\end{aligned}
\tag{1.40}
$$

Εφαρμόζοντας αυτές τις οριακές συνθήκες στις (1.39) παίρνουμε :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad \gamma\iota\alpha\ x = 0, a \\
&\frac{\partial H_z}{\partial y} \qquad \gamma\iota\alpha\ y = 0, b
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

Επειδή η κυματική εξίσωση για την H_z συνιστώσα του πεδίου είναι ακριβώς ίδια με την κυματική εξίσωση για την E_z συνιστώσα, η ανάλυση για την συνιστώσα H_z θα είναι ίδια με την προηγούμενη ανάλυση για την E_z συνιστώσα

$$
X(x) = A\sin(jk_x x) + B\cos(jk_x x) \tag{1.42}
$$

$$
Y(y) = C\sin(jk_y y) + D\cos(jk_y y) \tag{1.43}
$$

Παραγωγίζοντας την λύση αυτή παίρνουμε :

$$X'(x) = A\cos(jk_x x) - B\sin(jk_x x) \tag{1.44}$$

$$Y'(y) = C\cos(jk_y y) - D\sin(jk_y y) \tag{1.45}$$

Όπου A, B, C, D είναι τυχαίες σταθερές.

Εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη (1.22) στην (1.19) παίρνουμε :

$$\left.\begin{aligned} X'(0) &= A\cdot 1 - B\cdot 0 = 0 \Rightarrow A = 0 \\ X(a) &= A\cos(jk_x a) - B\sin(jk_x a) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{1.46}$$

$$-B\sin(jk_x a) = 0 \tag{1.47}$$

Για να έχουμε μη-τετριμμένη λύση $B \neq 0$ άρα

$$\sin(jk_x a) = 0 \Rightarrow jk_x a = n\pi \Rightarrow jk_x = n\pi / a \tag{1.48}$$

Άρα η σχέση που ισχύει για το $X(x)$ είναι

$$X'(x) = -B\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Rightarrow X(x) = B\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{1.49}$$

Τώρα εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη (1.23) στην (1.20) παίρνουμε :

$$\left.\begin{aligned} Y(0) &= C\cdot 1 - D\cdot 0 = 0 \Rightarrow C = 0 \\ Y(b) &= C\cos(jk_y b) + D\sin(jk_y b) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{1.50}$$

$$-D\sin(jk_y b) = 0 \tag{1.51}$$

Για να έχουμε μη-τετριμμένη λύση $D \neq 0$ άρα

$$\sin(jk_y b) = 0 \Rightarrow jk_y b = m\pi \Rightarrow jk_y = m\pi / b \tag{1.52}$$

Άρα η σχέση που ισχύει για το $Y(y)$ είναι

$$Y'(y) = -D\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \Rightarrow Y(y) = D\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \tag{1.53}$$

Οι γενική λύση για την H_z μετά από όσα αναφέρθηκαν θα είναι :

$$H_z = X(x)Y(y)Z(z)\cdot e^{\omega t} = H_0\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \tag{1.54}$$

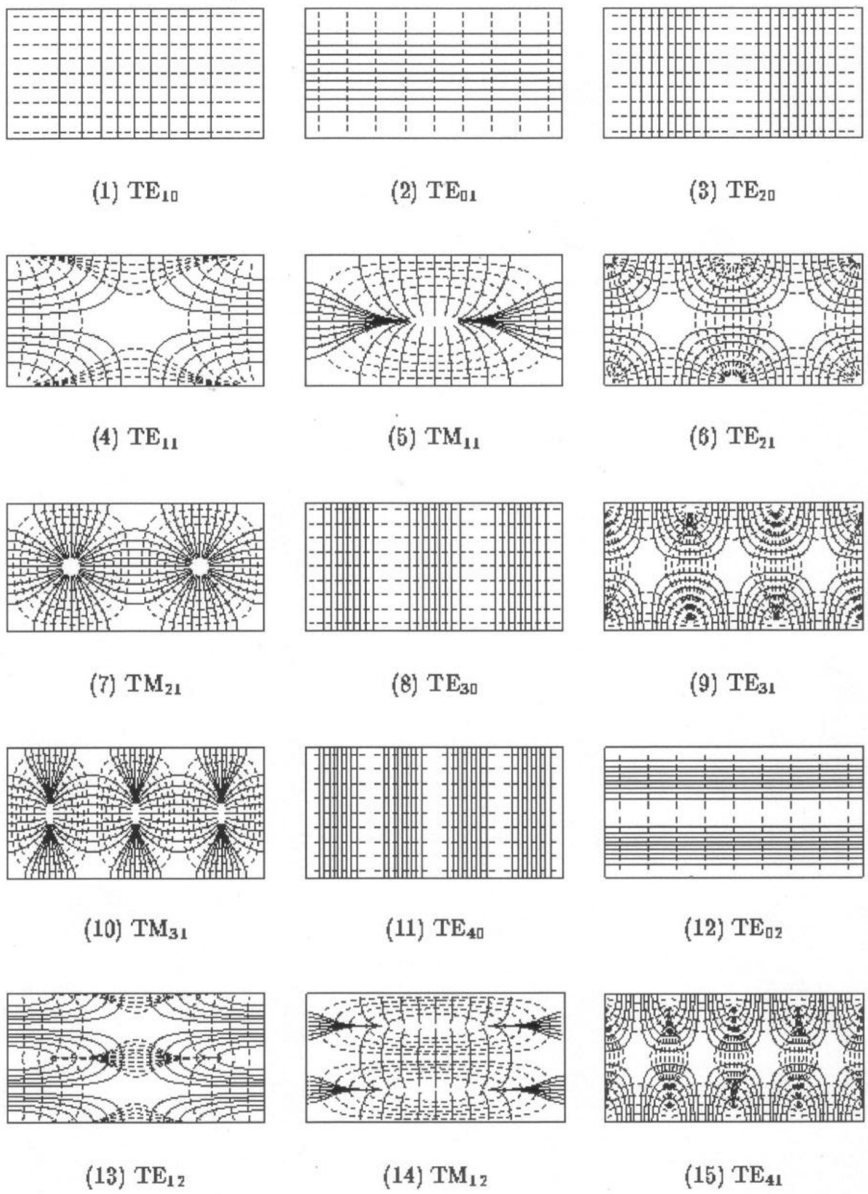
όπου $H_0 = B\cdot D$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (1.37) $E_z = 0$ και H_z από την (1.54) παίρνουμε :

$$\begin{aligned} E_x &= H_0\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{m\pi}{b}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \\ E_y &= -H_0\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{n\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \end{aligned} \tag{1.55}$$

$$
\begin{aligned}
H_x &= H_0 \frac{j\beta}{k_c^2}\frac{n\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \\
H_y &= E_0 \frac{j\beta}{k_c^2}\frac{m\pi}{b}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \\
H_z &= H_0 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}e^{\omega t}
\end{aligned}
\qquad (1.56)
$$

Στο παρακάτω σχήμα σχεδιαστήκαν κατανομές των πρώτων 15 ρυθμών του ορθογωνικού κυματοδηγού.



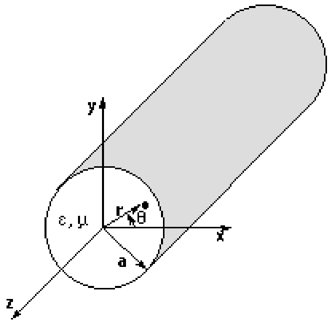
Σχήμα 2. Κατανομές των πρώτων 15 ρυθμών του ορθογωνικού κυματοδηγού

4. Κυματοδηγοί Κυκλικής Διατομής

4.1 Λύση της Εξίσωσης Κύματος

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε την έκφραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε κυματοδηγούς ορθογωνικής διατομής. Εδώ θα μελετήσουμε τι συμβαίνει σε κυματοδηγό κυκλικής διατομής. Οι ρυθμοί διάδοσης όπως θα δούμε, είναι αρκετά πολύπλοκοι και έχουν σε μερικές περιπτώσεις δυσκολία στον καθορισμό τους.

Οι κυματοδηγοί κυκλικής διατομής μας οδηγούν από τη γεωμετρία τους στη χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων r, θ, z, όπως φαίνονται στο σχήμα 3



Σχήμα 3. Κυματοδηγοί κυκλικής διατομής.

Όταν το πεδίο εκφράζεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες, είδαμε ότι E_z και H_z συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μπορούν να ορίσουν τις υπόλοιπες. Θα δείξουμε ότι το ίδιο συμβαίνει και στις κυλινδρικές συντεταγμένες. Εκφράζοντας την Λαπλασιανή σε κυλινδρικές συντεταγμένες οι (1.6) και (1.7) για τις E_z και H_z συνιστώσες αντίστοιχα γράφονται ως:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}=-k^2 E_z \qquad (1.57)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}=-k^2 H_z \qquad (1.58)$$

Οι επίλυση των παραπάνω εξισώσεων προκύπτει πάλι με την μέθοδο χωρισμού μεταβλητών

$$H_z(r,\theta,z), E_z(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z) \qquad (1.59)$$

Κάνουμε αντικατάσταση στην εξίσωση κύματος

$$\Theta(\theta)Z(z)\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\Theta(\theta)Z(z)\frac{1}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+R(r)Z(z)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+R(r)\Theta(\theta)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=-k^2R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

Διαιρώντας την παραπάνω εξίσωση με $R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ παίρνουμε :

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=-k^2 \qquad (1.60)$$

Επειδή η διάδοση γίνεται προς την διεύθυνση z, η εξάρτηση του πεδίου κατά την διεύθυνση αυτή θα είναι $e^{-\gamma z} = e^{-(a+j\beta)z}$. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν απώλειες η εξάρτηση θα είναι της μορφής $e^{-j\beta z}$. Έτσι :

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \frac{1}{e^{-j\beta z}}(-\beta^2)e^{-j\beta z} = -\beta^2 \tag{1.61}$$

Τώρα πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (1.60) με r^2 και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.61) και $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ καταλήγουμε στην :

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + r^2 k_c^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} \tag{1.62}$$

Το αριστερό μέρος της εξίσωσης αυτής εξαρτάται μόνο από την r, ενώ το δεξιό μέρος μόνο από την θ. Έτσι, το κάθε μέρος πρέπει αν εξισωθεί με μια σταθερά έστω k_θ^2, όποτε :

$$-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = k_\theta^2 \tag{1.63}$$

ή

$$\frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + \Theta(\theta)k_\theta^2 = 0 \tag{1.64}$$

και επίσης

$$r^2\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r\frac{\partial R(r)}{\partial r} + (r^2 k_c^2 - k_\theta^2)R(r) = 0 \tag{1.65}$$

Η η γενική λύση της εξίσωσης (1.64) είναι :

$$\Theta(\theta) = A\sin k_\theta \theta + B\cos k_\theta \theta \tag{1.66}$$

Επειδή δεν υπάρχουν ασυνέχειες στον κυματοδηγό το πεδίο μέσα στον κυκλικό κυματοδηγό πρέπει να είναι επαναλαμβάνεται κάθε $\theta = 2\pi$. Επειδή η λύση είναι περιοδική στο θ το k_θ πρέπει να είναι ένας ακέραιος αριθμός n, όποτε (1.66) γίνεται :

$$\Theta(\theta) = A\sin n\theta + B\cos n\theta \tag{1.67}$$

ενώ η (1.65)

$$r^2\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r\frac{\partial R(r)}{\partial r} + (r^2 k_c^2 - n^2)R(r) = 0 \tag{1.68}$$

που είναι η διαφορική εξίσωση Bessel, με λύση

$$R(r) = CJ_n(k_c r) + DY_n(k_c r) \tag{1.69}$$

όπου $J_n(x)$ και $Y_n(x)$ είναι οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδος αντίστοιχα. Επειδή το $Y_n(k_c r)$ γίνεται άπειρο στο $r = 0$, ο όρος αυτός είναι απαράδεκτος, γιατί δεν έχει φυσική έννοια στον κυκλικό κυματοδηγό, επομένως $D=0$. Η λύση της κυματικής εξίσωσης γίνεται τότε :

$$E_z, H_z = (A\sin n\theta + B\cos n\theta)\cdot J_n(k_c r)\cdot e^{-j\beta z}e^{j\omega t} \tag{1.70}$$

Τα τοιχώματα του κυματοδηγού , όπως φαίνεται στο σχήμα 3 βρίσκονται σε ακτίνα $r=a$. Επειδή $E_z=0$ πάνω στα τοιχώματα πρέπει

$$J_n(k_c a)=0 \tag{1.71}$$

Η έκφραση (1.71) δείχνει τις δυνατές τιμές του $k_c a$ για διαφορές τάξεις συνάρτησης Bessel. Η πρώτη τιμή μηδενισμού καθορίζεται από τον αριθμό 1, ενώ η m-οστή από τον m. Οι ρυθμοί χαρακτηρίζονται πάλι ως *TE* και *TM* και είναι εξαρτημένοι από τα m και n.

4.2 Οι συνιστώσες πεδίου

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Maxwell σε κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta}-\frac{\partial H_\theta}{\partial z}=j\omega\varepsilon E_r\\
&\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}=j\omega\varepsilon E_\theta\\
&\frac{1}{r}H_\theta+\frac{\partial H_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta}=j\omega\varepsilon E_z
\end{aligned} \tag{1.72}$$

και

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta}-\frac{\partial E_\theta}{\partial z}=-j\omega\mu H_r\\
&\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}=j\omega\mu H_\theta\\
&\frac{1}{r}E_\theta+\frac{\partial E_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta}=j\omega\mu H_z
\end{aligned} \tag{1.73}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε εκφράσεις για τις εγκάρσιες συνιστώσες συνάρτηση E_z και H_z :

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{-j}{k_c^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial r}+\frac{\omega\mu}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta}\right)\\
E_\theta &= \frac{-j}{k_c^2}\left(\frac{\beta}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta}-\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\\
H_r &= \frac{j}{k_c^2}\left(\frac{\omega\varepsilon}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta}-\beta\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\\
H_\theta &= \frac{-j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial r}+\frac{\beta}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta}\right)
\end{aligned} \tag{1.74}$$

4.3 Ρυθμοί TE (E_z=0, H_z≠0)

Αντικαθιστώντας στην (1.74) $E_z = 0$ και την H_z από την (1.70) παίρνουμε :

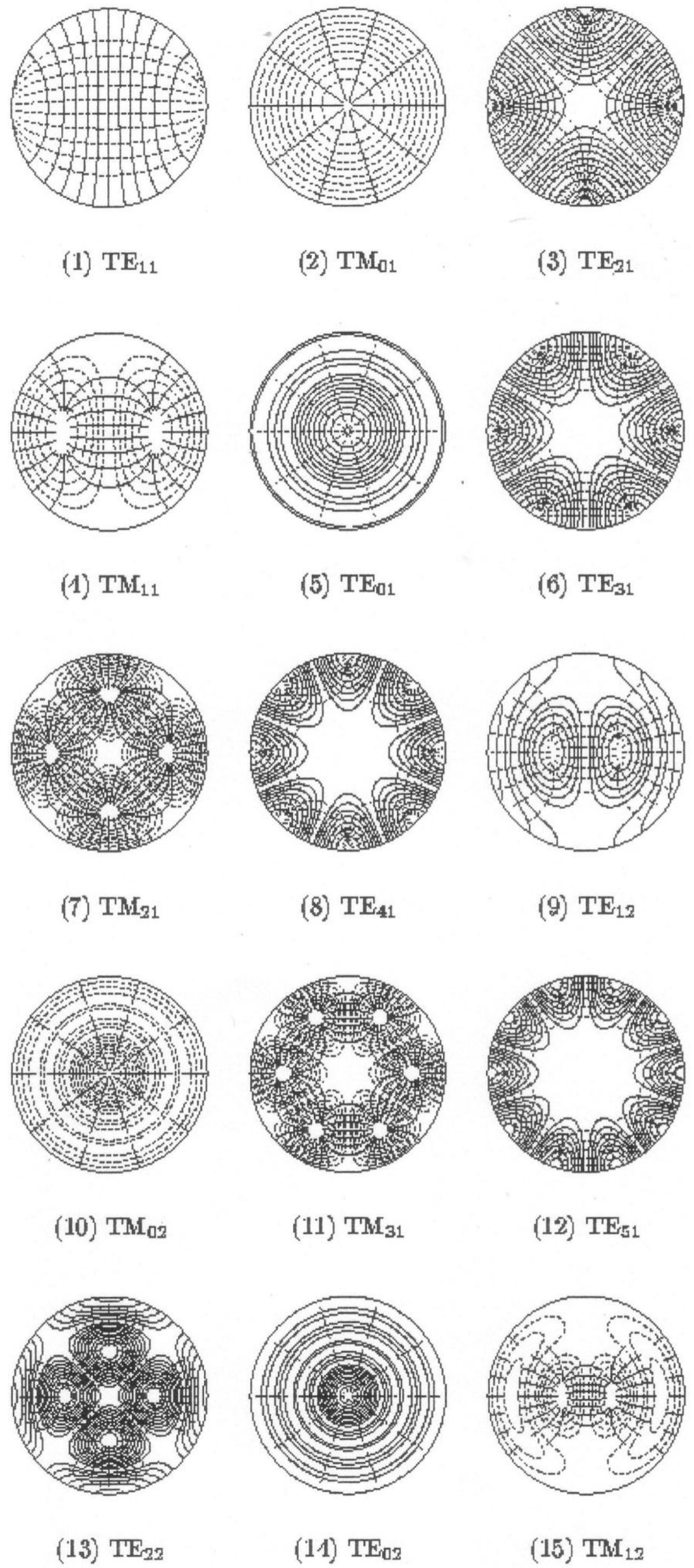
$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{-j\omega\mu n}{k_c^2 r}(A\cos n\theta - B\sin n\theta)J_n(k_c r)e^{-j\beta z}e^{j\omega t} \\
E_\theta &= \frac{j\omega\mu}{k_c}(A\sin n\theta + B\cos n\theta)J_n'(k_c r)e^{-j\beta z}e^{j\omega t} \\
E_z &= 0 \\
H_r &= \frac{-j\beta}{k_c}(A\sin n\theta + B\cos n\theta)J_n'(k_c r)e^{-j\beta z}e^{j\omega t} \\
H_\theta &= \frac{-j\beta n}{k_c^2 r}(A\cos n\theta - B\sin n\theta)J_n(k_c r)e^{-j\beta z}e^{j\omega t} \\
H_z &= (A\sin n\theta + B\cos n\theta)J_n(k_c r)\cdot e^{-j\beta z}e^{j\omega t}
\end{aligned}
\tag{1.75}
$$

4.4 Ρυθμοί TM (E_z≠0, H_z=0)

Αντικαθιστώντας στην (1.74) $H_z = 0$ και την E_z από την (1.70) παίρνουμε :

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{-j\beta}{k_c}(A\sin n\theta + B\cos n\theta)J_n'(k_c r)e^{-j\beta z}e^{j\omega t} \\
E_\theta &= \frac{-j\beta n}{k_c^2 r}(A\cos n\theta - B\sin n\theta)J_n(k_c r)e^{-j\beta z}e^{j\omega t} \\
E_z &= (A\sin n\theta + B\cos n\theta)J_n(k_c r)\cdot e^{-j\beta z}e^{j\omega t} \\
H_r &= \frac{j\omega\varepsilon n}{k_c^2 r}(A\cos n\theta - B\sin n\theta)J_n(k_c r)e^{-j\beta z}e^{j\omega t} \\
H_\theta &= \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c}(A\sin n\theta + B\cos n\theta)J_n'(k_c r)e^{-j\beta z}e^{j\omega t} \\
H_z &= 0
\end{aligned}
\tag{1.76}
$$

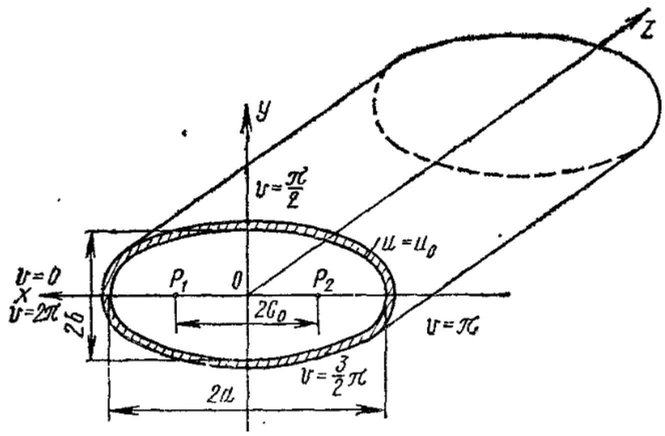
Στο επόμενο σχήμα φαίνονται κατανομές των πρώτων 15 ρυθμών του κυκλικού κυματοδηγού.



Σχήμα 4. Κατανομές των πρώτων 15 ρυθμών του κυκλικού κυματοδηγού

5. Κυματοδηγός Ελλειπτικής Διατομής

Στο σχήμα 5 έχουμε έναν κυματοδηγό ελλειπτικής διατομής.

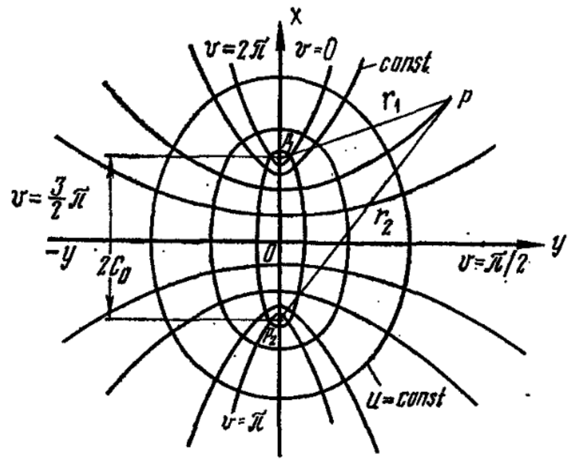


Σχήμα 5. Κυματοδηγός ελλειπτικής διατομής.

Για την επίλυση του εισάγουμε αντί των καρτεσιανών x, y, z ένας σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων u, v, z και τις σχέσεις συσχέτισης :

$$x = C_0 \cosh u \cos v, \qquad y = C_0 \sinh u \sin v \qquad (1.77)$$

Στο επίπεδο $z = const$ οι καμπύλες $u = u_0$ $(u_0 = const)$ σχηματίζουν μια οικογένεια συνεστιακών ελλείψεων με τις απόσταση μεταξύ των εστιών (σημεία P_1 και P_2 στο σχήμα 6), να ισούται $2C_0$.



Σχήμα 6. Ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων

Ο μεγάλος και ο μικρός άξονας της έλλειψης $(u_0 = const)$ ισούται αντίστοιχα με :

$$a = C_0 \cosh u_0, \qquad b = C_0 \sinh u_0 \qquad (1.78)$$

Εάν είναι γνώστες οι διαστάσεις του μικρού και του μεγάλου άξονα της έλλειψης είναι γνωστές, τότε :

$$C_0 = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \sqrt{1 - (b/a)^2} \qquad (1.79)$$

όπου e είναι η εκκεντρότητα της έλλειψης.

Καμπύλες $v = v_0$ $(v_0 = const)$ πάνω στο επίπεδο $z = const$ σχηματίζουν μια οικογένεια συνεστιακών υπερβολών (σχήμα 6). Για το πλήρες επίπεδο $(z = const)$ ισχύουν $0 \le u \le \infty$ και $0 \le v \le 2\pi$.

Οι εξισώσεις που μας δίνουν συσχέτιση των καθέτων στην διάδοση συνιστωσών πεδίου από τις E_z και H_z είναι η εξής :

$$
\begin{aligned}
E_u &= -\frac{j}{k_c^2}\frac{1}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial u} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial v}\right) \\
E_v &= -\frac{j}{k_c^2}\frac{1}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial v} - \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial u}\right) \\
H_u &= \frac{j}{k_c^2}\frac{1}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial v} - \beta\frac{\partial H_z}{\partial u}\right) \\
H_v &= -\frac{j}{k_c^2}\frac{1}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial u} + \beta\frac{\partial H_z}{\partial v}\right)
\end{aligned}
\tag{1.80}
$$

Η συνιστώσες E_z και H_z όπως και στα προηγούμενα βρίσκονται με την επίλυση αντιστοιχών κυματικών εξισώσεων οι οποίες στο ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων έχουν την παρακάτω μορφή :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial v^2} + 2h^2(\cosh 2u - \cos 2v)E_z = 0 \tag{1.81}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial v^2} + 2h^2(\cosh 2u - \cos 2v)H_z = 0 \tag{1.82}$$

όπου $2h^2 = k_c^2 C_0^2 / 2$.

5.1 Ρυθμοί TE (E_z=0, $H_z \neq 0$)

Για την ανάλυση θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (1.81), το όποιο λύνεται με την μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, δηλαδή :

$$E_z = U(u)V(v)Z(z) \tag{1.83}$$

Αντικαθιστώντας την (1.83) στην (1.81) παίρνουμε :

$$V(v)Z(z)\frac{\partial^2 U(u)}{\partial u^2} + U(u)Z(z)\frac{\partial^2 V(v)}{\partial v^2} + 2h^2(\cosh 2u - \cos 2v)U(u)V(v)Z(z) = 0$$

Διαιρώντας την παραπώ εξίσωση δια $U(u)V(v)Z(z)$ παίρνουμε :

$$\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)} + 2h^2(\cosh 2u - \cos 2v) = 0 \tag{1.84}$$

ή

$$\frac{U''(u)}{U(u)} + 2h^2\cosh 2u = -\frac{V''(v)}{V(v)} + 2h^2\cos 2v \tag{1.85}$$

Η ισότητα (1.85) πρέπει αν ικανοποιείται για οποιεσδήποτε τιμές u και v. Έτσι επειδή οι μεταβλητές u και v είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αυτό δυνατό μόνο εάν το αριστερό και το δεξί μέλος τις εξίσωσης (1.85) είναι ίσο με μια σταθερά. Ας συμβολίσουμε την σταθερά αυτή με χ. Έτσι καταλήγουμε στις δυο εξισώσεις :

$$V''(v) + (\chi - 2h^2 \cos 2v)V(v) = 0 \tag{1.86}$$

$$U''(u) + (\chi - 2h^2 \cosh 2u)U(u) = 0 \tag{1.87}$$

Η δυο παραπάνω εξισώσεις που προέκυψαν είναι έχουν την μορφή εξισώσεων Mathieu.

Η συνιστώσα E_z για να πάρει την αρχική της τιμή μετά από μια πλήρη περιστροφή πάνω στο περίγραμμα της έλλειψης στην τομή του κυματοδηγού (σχήμα 5), πρέπει να έχει περίοδο 2π στην συντεταγμένη v. Άρα πρέπει να βρούμε τέτοιες λύσεις για την εξίσωση (1.86) ώστε να έχουν περίοδο 2π. Οι λύσεις της (1.86) που ικανοποιούν αυτήν την συνθήκη λέγονται γωνιακές συναρτήσεις Mathieu πρώτης τάξης και συμβολίζονται με :

$$V = A \begin{cases} ce_m(v,h) \\ se_m(v,h) \end{cases} \tag{1.88}$$

όπου m ισούται με έναν ακέραιο αριθμό ή με το μηδέν. Η συνάρτηση $ce_m(v,h)$ αντιστοιχεί στους ρυθμούς κυμάτων του ελλειπτικού κυματοδηγού για τα οποία οι κατανομές είναι συμμετρικές ως προς μεγάλο άξονα της έλλειψης, ενώ $se_m(v,h)$ αντιστοιχεί στους ρυθμούς οι κατανομές των οποίων έχουν συμμετρία ως προς μικρό άξονα της έλλειψης.

Εύκολα παρατηρούμε ότι με την αλλαγή της μεταβλητής v με iu στην εξίσωση (1.86) καταλήγει στην (1.87). Άρα η εξίσωση (1.87) έχει λύσεις $ce_m(iu,h)$ και $se_m(iu,h)$. Οι συναρτήσεις αυτές πήραν όνομα συνδεδεμένων ακτινωτών συναρτήσεων Mathieu πρώτης τάξης και εισάγονται με την βοήθεια των ισοτήτων $Jc_m(u,h) = ce_m(iu,h)$ και $Js_m(u,h) = -ise_m(iu,h)$. Ο τρόπος μεταβολής αυτών των συναρτήσεων μοιάζει πολύ με τον τρόπο μεταβολής των συναρτήσεων Bessel $J_m(k_c r)$.

Αντίστοιχα η λύση της (1.87) θα είναι :

$$U = B \begin{cases} Jc_m(u,h) \\ Js_m(u,h) \end{cases} \tag{1.89}$$

Όπου u αλλάζει από 0 έως u_0, όπου u_0 ορίζει την επιφάνεια του κυματοδηγού.

Αντικαθιστώντας (1.88) και (1.89) στην (1.83) παίρνουμε :

$$E_z = E_0 \begin{cases} Jc_m(u,h)ce_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \\ Js_m(u,h)se_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \end{cases} \tag{1.90}$$

όπου $E_0 = AB$.

Για να βρούμε τις υπόλοιπες συνιστώσες πεδίου θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (1.80), όπου αντικαθιστούμε E_z από (1.90) και $H_z = 0$.

$$E_u = -\frac{j}{k_c^2}\frac{\beta E_0}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}}\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u} Jc_m(u,h)ce_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t}\\ \dfrac{\partial}{\partial u} Js_m(u,h)se_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t}\end{cases}$$

$$E_v = -\frac{j}{k_c^2}\frac{\beta E_0}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}}\begin{cases}Jc_m(u,h)\dfrac{\partial}{\partial v} ce_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t}\\ Js_m(u,h)\dfrac{\partial}{\partial v} se_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t}\end{cases}$$

$$H_u = \frac{j}{k_c^2}\frac{\omega\varepsilon E_0}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}}\begin{cases}Jc_m(u,h)\dfrac{\partial}{\partial v} ce_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t}\\ Js_m(u,h)\dfrac{\partial}{\partial v} se_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t}\end{cases}$$

$$H_v = -\frac{j}{k_c^2}\frac{\omega\varepsilon E_0}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}}\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u} Jc_m(u,h)ce_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t}\\ \dfrac{\partial}{\partial u} Js_m(u,h)se_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t}\end{cases} \quad (1.91)$$

Για τον υπολογισμό του k_c θα χρησιμοποιήσουμε την οριακή συνθήκη για το εφαπτομενικό στο τέλειο αγώγιμο σώμα ηλεκτρικό πεδίο. Έτσι η συνιστώσα $E_z = 0$ πάνω στα τοιχώματα του κυματοδηγού, και από την (1.90) προκύπτουν δυο ισότητες

$$Jc_m(u_0,h) = 0 \quad (1.92)$$

$$Js_m(u_0,h) = 0 \quad (1.93)$$

Υπάρχει άπειρος αριθμός τιμών του h για τις οποίες ισχύουν οι παραπάνω εξισώσεις η οποίες είναι ρίζες των ακτινωτών συναρτήσεων Mathieu πρώτης τάξης. Τα συμβολίζουμε αντίστοιχα h_{cmn} και h_{smn}, η n είναι ο αριθμός της ρίζας. Η κάθε ρίζα έχει τον αντίστοιχο k_c, το οποίο βρίσκομαι από τις ισότητες:

για τα TM_{cmn} κύματα $k_c = 2h_{cmn} / C_0$

για τα TM_{smn} κύματα $k_c = 2h_{smn} / C_0$

Στην κάθε τιμή m και n αντιστοιχεί μια συγκεκριμένη μορφή πεδίου στον κυματοδηγό.

5.2 Ρυθμοί TM (Ez≠0, Hz=0)

Επειδή η κυματική εξίσωση για την H_z συνιστώσα του πεδίου είναι ακριβώς ίδια με την κυματική εξίσωση για την E_z συνιστώσα, η ανάλυση για την συνιστώσα H_z θα είναι ίδια με την προηγούμενη ανάλυση για την E_z συνιστώσα :

$$H_z = H_0 \begin{cases} Jc_m(u,h)ce_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \\ Js_m(u,h)se_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \end{cases} \tag{1.94}$$

Για να βρούμε τις υπόλοιπες συνιστώσες πεδίου θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (1.80), όπου αντικαθιστούμε H_z από (1.94) και $E_z = 0$.

$$H_u = -\frac{j}{k_c^2}\frac{\beta E_0}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} Jc_m(u,h)ce_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \\ \frac{\partial}{\partial u} Js_m(u,h)se_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \end{cases}$$

$$H_v = -\frac{j}{k_c^2}\frac{\beta E_0}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}} \begin{cases} Jc_m(u,h)\frac{\partial}{\partial v} ce_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \\ Js_m(u,h)\frac{\partial}{\partial v} se_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \end{cases}$$

$$E_u = \frac{j}{k_c^2}\frac{\omega\mu H_0}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}} \begin{cases} Jc_m(u,h)\frac{\partial}{\partial v} ce_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \\ Js_m(u,h)\frac{\partial}{\partial v} se_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \end{cases}$$

$$E_v = -\frac{j}{k_c^2}\frac{\omega\mu H_0}{C_0\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} Jc_m(u,h)ce_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \\ \frac{\partial}{\partial u} Js_m(u,h)se_m(v,h)e^{-j\beta z}e^{\omega t} \end{cases} \tag{1.95}$$

Για τον υπολογισμό του k_c θα χρησιμοποιήσουμε την οριακή συνθήκη για το εφαπτομενικό στο τέλειο αγώγιμο σώμα ηλεκτρικό πεδίο. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε $E_v = 0$ πάνω στα τοιχώματα του κυματοδηγού, και από την (1.95) προκύπτουν δυο ισότητες :

$$Jc_m'(u_0,h) = 0 \tag{1.96}$$

$$Js_m'(u_0,h) = 0 \tag{1.97}$$

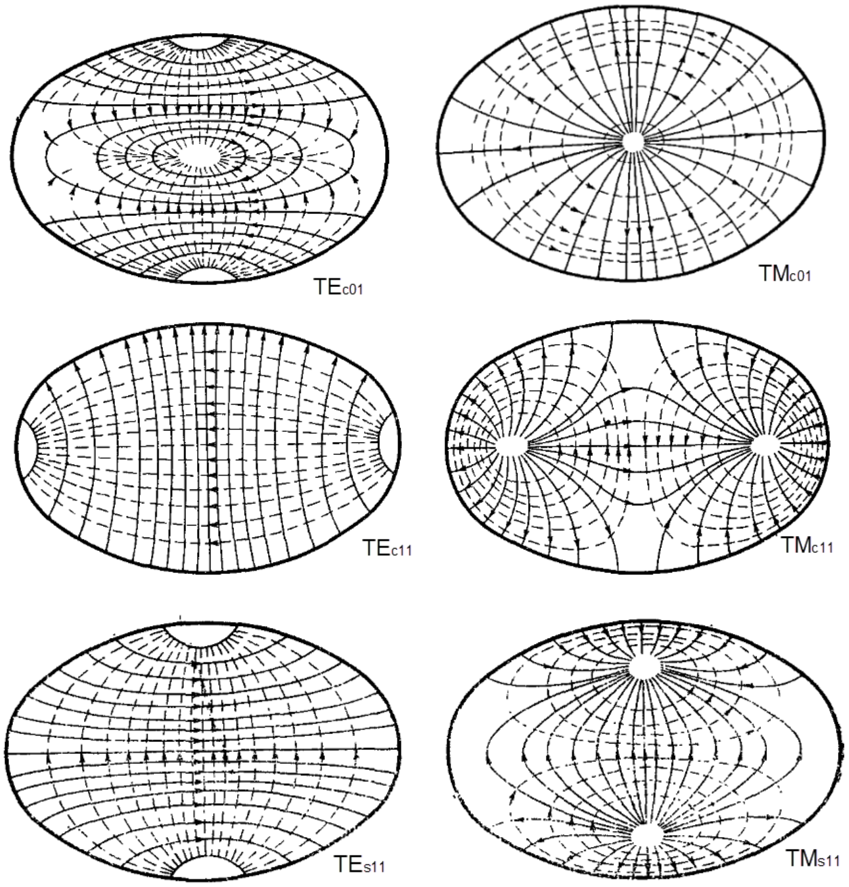
Υπάρχει άπειρος αριθμός τιμών του h για τις οποίες ισχύουν οι παραπάνω εξισώσεις η οποίες είναι ρίζες των ακτινωτών συναρτήσεων Mathieu πρώτης τάξης. Τα συμβολίζουμε αντίστοιχα h'_{cmn} και h'_{smn}, η n είναι ο αριθμός της ρίζας. Η κάθε ρίζα έχει τον αντίστοιχο k_c, το οποίο βρίσκομαι από τις ισότητες:

για τα TE_{cmn} κύματα $k_c = 2h'_{cmn}/C_0$

για τα TE_{smn} κύματα $k_c = 2h'_{smn}/C_0$

Στην κάθε τιμή m και n αντιστοιχεί μια συγκεκριμένη μορφή πεδίου στον κυματοδηγό.

Οι ρυθμοί $TM_{c01}, TE_{c01}, TM_{c11}, TE_{c11}$ και TM_{s11}, TE_{s11} ενός ελλειπτικού κυματοδηγού με εκκεντρότητα $e = 0.75$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 7. Η κατανομή ρυθμών στο ελλειπτικό κυματοδηγό.