Χρήστος Ι. Σχοινάς
Αν. Καθηγητής ΔΠΘ

Συμπληρωματικές σημειώσεις για το μάθημα: « Επιχειρησιακή Έρευνα ΙΙ »

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Προβλήματα ελάχιστης συνεκτικότητας δικτύου

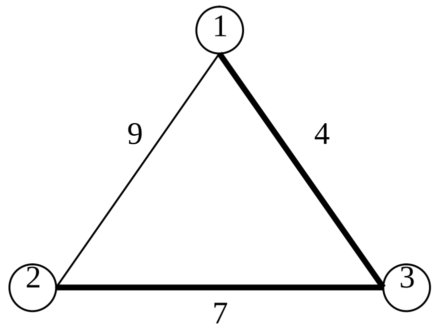
Το *πρόβλημα της ελάχιστης συνεκτικότητας δικτύου* ή του *ελάχιστα εκτεταμένου δέντρου* (minimum spanning tree) είναι ένα πρόβλημα που εφαρμόζεται σε διαφόρων μορφών δίκτυα όπως δίκτυα υπολογιστών, δίκτυα τηλεπικοινωνιών, δίκτυα διανομής προϊόντων, δίκτυα ηλεκτροδότησης, δίκτυα ύδρευσης, δίκτυα αποχέτευσης, ενεργειακά δίκτυα, δίκτυα φυσικού αερίου κ.ά.).

Σκοπός του είναι ο προσδιορισμός ενός ελάχιστα εκτεταμένου δέντρου, δηλαδή ενός δέντρου το οποίο να έχει το ελάχιστο δυνατό μήκος ικανοποιώντας συγχρόνως τους ακόλουθους περιορισμούς :

1) Να είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους όλοι οι κόμβοι του δικτύου.
2) Να μην υπάρχουν «κύκλοι».

Δηλαδή αναζητούμε το σύνολο των τόξων, οι οποίοι ενώνουν τους κόμβους ενός δικτύου, έτσι ώστε το άθροισμα του μήκους των τόξων να είναι το ελάχιστο.

<u>Παράδειγμα</u> Στο παρακάτω δίκτυο μπορεί εύκολα κανείς να παρατηρήσει ότι το σύνολο των τόξων (1,3), (3,2) είναι το ελάχιστα εκτεταμένο δέντρο (4 + 7 = 11).



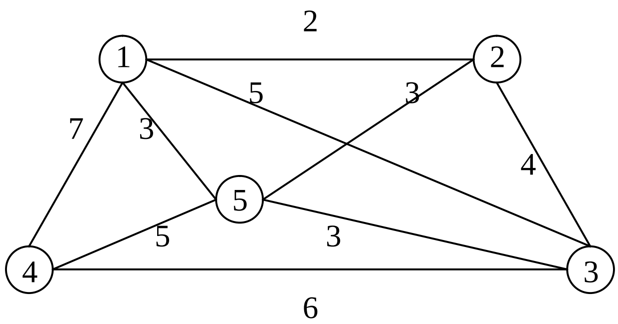
□

Για τον προσδιορισμό του ελάχιστα εκτεταμένου δέντρου επιλέγουμε τυχαία τον 1^o κόμβο και συνδέουμε με αυτόν τον κόμβο j του δικτύου που είναι πλησιέστερα στον 1^o. Οι δύο αυτοί κόμβοι αποτελούν πλέον το αρχικό ελάχιστα εκτεταμένο δέντρο. Ακολούθως συνδέουμε, από τους υπόλοιπους κόμβους, εκείνον ο οποίος είναι εγγύτερα του αρχικού εκτεταμένου δέντρου. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι να εξαντληθούν όλοι οι υπόλοιποι κόμβοι.

Παράδειγμα Το υπολογιστικό κέντρο του Πανεπιστημίου έχει 5 Η/Υ (ηλεκτρονικούς υπολογιστές) σε διαφορετικά κτίρια. Οι αποστάσεις ανάμεσα σε κάθε ζεύγος Η/Υ (σε οικοδομικά τετράγωνα) δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	1	2	3	4	5
1	-	2	5	7	3
2	2	-	4	9	3
3	5	4	-	6	3
4	7	9	6	-	5
5	3	3	3	5	-

Το δίκτυο που δημιουργείται απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Το Υπολογιστικό Κέντρο θέλει να συνδέσει τους Η/Υ χρησιμοποιώντας το ελάχιστο μήκος καλωδίων. Το πρόβλημα ισοδυναμεί με τον προσδιορισμό του ελάχιστα εκτεταμένου δέντρου για τους πέντε κόμβους-κτίρια.

Για τη λύση του επιλέγουμε αυθαίρετα τον πρώτο κόμβο 1. Ο κοντινότερος κόμβος του 1 είναι ο κόμβος 2. Άρα το τόξο (1,2) θα είναι το αρχικό ελάχιστα εκτεταμένο δέντρο. Στη συνέχεια από τους υπόλοιπους κόμβους παρατηρούμε ότι ο κόμβος 5 απέχει μόλις 3 οικοδομικά τετράγωνα από τους κόμβους 1 και 2. Επιλέγουμε τον κόμβο 5 και τον συνδέουμε με το αρχικό ελάχιστα εκτεταμένο δέντρο. Αυθαίρετα επιλέγουμε το τόξο (2,5). Ο επόμενος κόμβος για είσοδο είναι ο 3 διότι έχει την ελάχιστη απόσταση από τους υπόλοιπους κόμβους του δικτύου. Το τόξο σύνδεσης είναι το (5,3). Ο τελευταίος κόμβος 4 συνδέεται με το δίκτυο μέσω του τόξου (4,5) που έχει το ελάχιστο μήκος των 5 οικοδομικών τετραγώνων.

Το ελάχιστα εκτεταμένο δέντρο αποτελείται από τα τόξα (1,2), (2,5), (5,3), (5,4) με μήκος 2 +3 +3 +5 = 13 οικοδομικά τετράγωνα.

□

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

1. Εισαγωγή

Ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι οι Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στους οποίους ανήκει ο *Μη Γραμμικός Προγραμματισμός* ή αλλιώς οι *Μη Γραμμικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης*. Η έννοια της βελτιστοποίησης μπορεί να οριστεί ως η διαδικασία η οποία με διάφορες μεθόδους εντοπίζει την καλύτερη λύση σε ένα πρόβλημα το οποίο επιδέχεται εναλλακτικών προτάσεων που συνδέονται με κάποιο κόστος. Μέχρι τα μέσα του περασμένου αιώνα οι Μέθοδοι Βελτιστοποίησης που αφορούσαν συναρτήσεις πολλών μεταβλητών βρίσκονταν σε εμβρυϊκή μορφή. Η εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών έδωσε την απαιτούμενη ώθηση για την ανάπτυξη αλγορίθμων οι οποίοι θα μπορούσαν γρήγορα και με μεγάλη ακρίβεια να υπολογίσουν πλέον προσεγγιστικές λύσεις σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Έτσι υπήρξε ραγδαία ανάπτυξη των μεθόδων του γραμμικού προγραμματισμού στη δεκαετία του ΄50 ενώ ακολούθησαν και οι άλλοι κλάδοι των Μεθόδων Βελτιστοποίησης όπως ο Δυναμικός Προγραμματισμός, ο Ακέραιος Προγραμματισμός, οι Μη Γραμμικός Προγραμματισμός κλπ. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η λέξη «προγραμματισμός» υποδηλώνει την έννοια «βελτιστοποίηση» και δεν έχει άμεση σχέση με αυτό που έχει επικρατήσει δηλαδή τον προγραμματισμό των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Στη γενική του μορφή το πρόβλημα είναι η εύρεση ενός τοπικού (σχετικού) ακρότατου (ελαχίστου ή μεγίστου) μιας μη γραμμικής ως προς τις μεταβλητές αντικειμενικής συνάρτησης με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται κάποιοι περιορισμοί που εκφράζονται ως εξισώσεις ή ανισώσεις μεταξύ των μεταβλητών και οι οποίες μπορεί να είναι γραμμικές ή μη γραμμικές. Έχει επικρατήσει όταν αναφερόμαστε στο μη γραμμικό πρόβλημα προγραμματισμού να μην περιέχονται ο ακέραιος μη γραμμικός προγραμματισμός (δηλαδή όταν οι μεταβλητές και η αντικειμενική συνάρτηση παίρνουν μόνο ακέραιες τιμές) καθώς επίσης και το πρόβλημα του δυναμικού προγραμματισμού.

2. Μονοδιάστατα προβλήματα χωρίς περιορισμούς

Στην ενότητα αυτή αναπτύσσονται κάποιες μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να βρούμε το μέγιστο ή το ελάχιστο μίας αντικειμενικής συνάρτησης μιας μεταβλητής. Το γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης στην περίπτωση αυτή θα έχει την παρακάτω μορφή:

Μονοδιάστατο Γενικό Πρόβλημα

Ζητούμε το

$$\max f(x) \;\; \text{ή} \;\; \min f(x), \;\text{όπου}\;\; x \in [a,b] \subset \mathbb{R},$$

δοθέντος ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον «σημείο εκκίνησης» x_0 τέτοιο ώστε

$$f(x_0) < \min\{f(a), f(b)\}.$$

3. Η μέθοδος Newton

Η μέθοδος του Newton χρησιμοποιείται για τη εύρεση ακρότατου (μεγίστου ή ελαχίστου) μίας αντικειμενικής συνάρτησης δηλαδή για τη λύση του Μονοδιάστατου Γενικού Προβλήματος. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στο γνωστό θεώρημα της Μαθηματικής Ανάλυσης που ακολουθεί.

<u>Θεώρημα</u> *Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έστω επίσης $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο A. Μία αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα σημείο $x_c \in A$ τοπικό (σχετικό) ακρότατο είναι να ισχύει η σχέση*

$$f'(x_c) = 0.$$

Ο αλγόριθμος της μεθόδου Newton έχει ως εξής:

Αλγόριθμος της Μεθόδου Newton

Έστω $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο. Τότε για την εύρεση τοπικού ακρότατου, επιλέγουμε ένα σημείο εκκίνησης x_0 (ως μία πρώτη προσέγγιση) για το x_c και δημιουργούμε μία ακολουθία σημείων $\{x_k\}$ με την επαναληπτική σχέση:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \quad k = 0,1,\ldots .$$

Ενδεικτικό κριτήριο σύγκλισης: $\left|x_{k+1} - x_k\right| \le e$, όπου ε είναι η ζητούμενη ακρίβεια.
Η ακολουθία συγκλίνει σε ένα σημείο x_c που είναι ένα πιθανό τοπικό ακρότατο για τη συνάρτηση *f*.

<u>Παράδειγμα</u> Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 .$$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 - 10x$$

και τη δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = 24x^2 - 18x - 10$$

της συνάρτησης αυτής.

Ζητάμε τα πιθανά τοπικά ακρότατα της συνάρτησης *f*. Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Newton τον οποίο εφαρμόζουμε με ακρίβεια $e = 10^{-4}$ ως ακολούθως.

Αν ξεκινήσουμε από μία αρχική προσέγγιση $x_0=2$ και χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση του αλγορίθμου Newton προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Επανάληψη **k**	Προσέγγιση $\mathbf{x_k}$	Παράγωγος $\mathbf{f'(x_k)}$
0	2	8
1	1.84	0.96563
2	1.81468	0.02241
3	1.81406	0.00001
4	1.81406	0.00000

Αν ξεκινήσουμε από μία αρχική προσέγγιση $x_0=1$ και χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση του αλγορίθμου Newton προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Επανάληψη **k**	Προσέγγιση $\mathbf{x_k}$	Παράγωγος $\mathbf{f'(x_k)}$
0	1	-11
1	-1.75	-52.93750
2	-1.19276	-14.45192
3	-0.87593	-3.52254
4	-0.73026	-0.61237
5	-0.69185	-0.03868
6	-0.68908	-0.00020
7	-0.68906	-0.00000

Αν ξεκινήσουμε από μία αρχική προσέγγιση $x_0=0.5$ και χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση του αλγορίθμου Newton προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Επανάληψη **k**	Προσέγγιση $\mathbf{x_k}$	Παράγωγος $\mathbf{f'(x_k)}$
0	0.5	-6.25
1	0.019230	-0.19558
2	0.00031	-0.00311
3	0.00000	-0.00000
4	0.00000	-0.00000

Άρα τα σημεία $z_1=1.81406$, $z_2=-0.68906$ και $z_3=0$ είναι τα σημεία στα οποία έχουμε πιθανά τοπικά ακρότατα.

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης f και της παραγώγου $f\,'$ από το οποίο διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα στα σημεία $z_1=1.81406$ και $z_2=-0.68906$ ενώ στο σημείο $z_3=0$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο.

3. Η μέθοδος της Τέμνουσας

Ένας εναλλακτικός τρόπος για τη εύρεση ακρότατου (μεγίστου ή ελαχίστου) μίας αντικειμενικής συνάρτησης είναι η μέθοδος της τέμνουσας.

Αλγόριθμος της Μεθόδου της Τέμνουσας

Έστω $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία έχει συνεχή πρώτη παράγωγο. Τότε για την εύρεση τοπικού ακρότατου, επιλέγουμε δύο πρώτες προσεγγίσεις x_0 και x_1 για το x_c και δημιουργούμε μία ακολουθία σημείων $\{x_k\}$ με την επαναληπτική σχέση:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f'(x_k) - x_k f'(x_{k-1})}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Ενδεικτικό κριτήριο σύγκλισης: $|x_{k+1} - x_k| \leq e$, όπου ε είναι η ζητούμενη ακρίβεια.
Η ακολουθία συγκλίνει σε ένα σημείο x_c που είναι ένα πιθανό τοπικό ακρότατο για τη συνάρτηση f.

<u>Παράδειγμα</u> Δίνεται η ίδια συνάρτηση (του προηγούμενου παραδείγματος)

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 .$$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 - 10x .$$

Για να βρούμε τα πιθανά τοπικά ακρότατα της συνάρτησης *f* αναζητούμε τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$ εφαρμόζοντας τη μέθοδο της τέμνουσας, με ακρίβεια $e = 10^{-5}$, όπως παρακάτω.

Αν ξεκινήσουμε από δύο πρώτες προσεγγίσεις $x_0 = 1$ και $x_1 = 2$ και χρησιμοποιήσουμε την επαναληπτική σχέση της μεθόδου της τέμνουσας προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Επανάληψη **K**	Προσέγγιση $\mathbf{x_k}$	Παράγωγος $\mathbf{f'(x_k)}$
0	1,000000000	-11,000000000
1	2,000000000	8,000000000
2	1,578947368	-6,735675754
3	1,771410480	-1,487158648
4	1,825944584	0,436560960
5	1,813568840	-0,017889140
6	1,814056004	-0,000200558
7	1,814061527	0,000000094

Αν ξεκινήσουμε από δύο πρώτες προσεγγίσεις x_0 = 0.5 και x_1 = 1 και χρησιμοποιήσουμε την επαναληπτική σχέση της μεθόδου της τέμνουσας προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Επανάληψη **k**	Προσέγγιση $\mathbf{x_k}$	Παράγωγος $\mathbf{f'(x_k)}$
0	0,500000000	-6,250000000
1	1,000000000	-11,000000000
2	-0,157894737	1,323079166
3	-0,033576262	0,325313513
4	0,006956782	-0,070000700
5	-0,000220651	0,002206075
6	-0,000001365	0,000013650
7	0,000000000	-0,000000003

Αν ξεκινήσουμε από δύο πρώτες προσεγγίσεις x_0 = -2 και x_1 = -1 και χρησιμοποιήσουμε την επαναληπτική σχέση της μεθόδου της τέμνουσας προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Επανάληψη **k**	Προσέγγιση $\mathbf{x_k}$	Παράγωγος $\mathbf{f'(x_k)}$
0	-2,000000000	-80,000000000
1	-1,000000000	-7,000000000
2	-0,904109589	-4,227887213
3	-0,757862350	-1,072832879
4	-0,708132985	-0,272500524
5	-0,691200922	-0,029637326
6	-0,689134652	-0,001009176
7	-0,689061813	-0,000003982
8	-0,689061525	-0,000000001

Συνεπώς οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$ είναι z_1 = 1.81406, z_2 = 0 και z_3 = -0.68906.