

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΞΑΝΘΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Αν. Καθ. Γεώργιος Π. Παύλος
Δρ. Μιχαήλ Αθανασίου

Εισαγωγή στην Θεωρία της Πολυπλοκότητας
και
στα Πολύπλοκα Συστήματα

ΞΑΝΘΗ 2002

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

ΚΕΦ 1^ο : Η πολυπλοκότητα στη φύση

ΚΕΦ 2^ο : Μαθηματικά και πολυπλοκότητα

**ΚΕΦ 3^ο : Ντετερμινιστική περιγραφή της
πολυπλοκότητας**

**ΚΕΦ 4^ο : Στοχαστική περιγραφή της
πολυπλοκότητας**

Εισαγωγή

Η θεωρία πολυπλοκότητας αποτελεί την 3^η επανάσταση στον χώρο της σύγχρονης επιστήμης μετά την θεωρία της σχετικότητας και τη θεωρία των κβαντικών, με μεγάλες συνέπειες στην σύγχρονη τεχνολογία. Η ανθρώπινη τεχνολογία εξελίχθη αρχικά ως τεχνολογία ύλης (από την προϊστορία μέχρι σήμερα, ως τεχνολογία ενέργειας κυρίως από την αναγέννηση και τον διαφωτισμό μέχρι σήμερα), ενώ στον 20^ο αιώνα έχουμε αλματώδη εξέλιξη στην τεχνολογία της πληροφορίας. Η ύλη διακρίνεται σε στερεά κατάσταση σε υγρή, σε αέρια και σε πλάσμα (ιονισμένη ύλη). Οι τρεις πρώτες καταστάσεις παρατηρούνται σε σχετικά χαμηλές θερμοκρασίες (θερμοκρασίες πλανητών) ενώ το πλάσμα παρατηρείται σε υψηλές θερμοκρασίες (θερμοκρασίες αστέρων, σε πυρηνικούς αντιδραστήρες κλπ). Ακόμη η ύλη διακρίνεται σε άψυχη ή έμβιο (έμψυχη). Στην άψυχη ύλη απουσιάζουν οι λειτουργίες της ζωής όπως η αναπαραγωγή, η προσαρμογή, η κατανάλωση ύλης και ενέργειας, αυτοσυντήρηση (πρόσληψη τροφής, αναπνοή, κλπ.), επεξεργασία πληροφορίας (μνήμη, γνώση, πρόβλεψη κλπ.) και η συνείδηση-αυτοσυνείδηση. Η ενέργεια αρχικά διακρίνεται σε Μηχανική, Ηλεκτρική, Φωτεινή, Χημική κλπ. Ενώ σε μια ακριβέστερη περιγραφή διακρίνεται σε κινητική, ηλεκτρομαγνητική και πυρηνική, διότι κάθε άλλη μορφή ενέργειας ανάγεται σε αυτές. Η πληροφορία είναι αρνητική εντροπία και μετρά την ποσότητα τάξης που περιέχει μια κατάσταση ύλης ή ενέργειας.

Η φυσική θεωρία αποτελεί την βάση πάνω στην οποία στηρίζεται και αναπτύσσεται η τεχνολογία και επιλύονται τα τεχνικά προβλήματα. Η θεωρία της πολυπλοκότητας αποτελεί τη βάση πολλών σημαντικών τεχνολογικών εφαρμογών σε όλες τις περιοχές της σύγχρονης τεχνολογίας (ύλης, ενέργειας, πληροφορίας) ιδιαίτερα δε εκεί που η μοντελοποίηση της πραγματικότητας είναι δύσκολη ή αδύνατη μέσω της προηγούμενης φυσικής θεωρίας. Η μοντελοποίηση (modeling) αποτελεί βασική έκφραση και μέθοδος της επιστήμης και της τεχνολογίας διότι η επιστημονική ερμηνεία ή η Τεχνολογική εφαρμογή στηρίζονται στην δημιουργία μοντέλων κυρίως μαθηματικών και ποσοτικών. Ακόμη η θεωρία της πολυπλοκότητας (θεωρία πολύπλοκων συστημάτων προσπαθεί να κατανοήσει φαινόμενα ολιστικά όπως η αυτοοργάνωση και η αυθόρμητη δημιουργία τάξης, τα οποία αδυνατεί να κατανοήσει η κλασσική φυσική θεωρία.

Στο πρώτο κεφάλαιο περιγράφουμε φαινόμενα που αφορούν τα πολύπλοκα συστήματα. Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγουμε βασικές μαθηματικές εύνοιες που απαιτούνται για την ποσοτική περιγραφή-μοντελοποίηση των Πολύπλοκων Συστημάτων. Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγουμε την ντετερμινιστική περιγραφή των πολύπλοκων συστημάτων. Στο τέταρτο κεφάλαιο εισάγουμε την στοχαστική περιγραφή των πολύπλοκων συστημάτων. Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο εισάγουμε μεθόδους μη γραμμικής ανάλυσης σημάτων σε σχέση με τα πολύπλοκα συστήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΣΤΗ ΦΥΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαγάγουμε μερικά καίρια φαινόμενα πολυπλοκότητας τα οποία δείχνουν τα νέα χαρακτηριστικά των πολύπλοκων συστημάτων και της θεωρίας της πολυπλοκότητας.

1.1 Κοσμολογία και μικροφυσική

Σήμερα καταλαβαίνουμε ότι ολόκληρο το γνωστό σύμπαν είναι ένα πολύπλοκο σύστημα που περιλαμβάνει μία ατελείωτη αλληλουχία πολυπλόκων φαινομένων από το μικροσκοπικό έως το μακροσκοπικό επίπεδο. Αρχικά θεωρήσαμε ότι κάθε πολύπλοκο σύστημα αναλύεται σε απλά συστατικά (σωματίδια) και απλές μορφές δύναμης (βαρύτητα, πυρηνικές-ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις) και ότι κάθε φαινόμενο στον μικρόκοσμο ή τον μακρόκοσμο είναι αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης των στοιχειωδών σωματιδίων μέσω των θεμελιωδών δυνάμεων. Το βασικό χαρακτηριστικό της πολυπλοκότητας είναι το γεγονός ότι ένα πολύπλοκο σύστημα ενώ φαίνεται να αποτελείται από πολλά «ανεξάρτητα» υποσυστήματα ταυτόχρονα διατηρεί έναν ολιστικό χαρακτήρα και φανερώνει μια αδιάσπαστη ενότητα των μερών. Στη σύγχρονη φυσική ο χώρος όχι μόνο δεν είναι κενός αλλά είναι μία δυναμική πολύπλοκη πραγματικότητα ικανή να διαστέλλεται και ικανή να παράγει ή να απορροφά υλικά σωματίδια. Τα δε στοιχειώδη σωματίδια στο επίπεδο των κουάρκ και πιο κάτω φανερώνονται ως πολύπλοκα νημάτια (υπερχορδές) με εσωτερική δομή και κίνηση. Ακόμη δύο στοιχειώδη σωματίδια όπου προήλθαν από τη διάσπαση ενός αρχικού σωματίου όσο και αν απομακρυνθούν μεταξύ τους διατηρούν μία ατοπική επικοινωνία χωρίς την μεταφορά ύλης-ενέργειας. Επίσης σύμφωνα με την αρχή δυϊσμού τα στοιχειώδη σωματίδια δεν είναι καθόλου απλά αφού άλλοτε εμφανίζουν τοπικό-σωματιδιακό χαρακτήρα και άλλοτε μη τοπικο-κυματικό χαρακτήρα. Τέλος, καίριας σημασίας φαινόμενα είναι η μονόπλευρη ροή του χρόνου από το παρελθόν στο μέλλον όπως και η μονόπλευρη αύξηση της εντροπίας (μόνο αύξηση) ή η μονόπλευρη ροή θερμότητας από υψηλές σε χαμηλές θερμοκρασίες.

1.2 Ρευστά

Ένα ρευστό που θα βρεθεί μακριά από θερμοδυναμική ισορροπία με έντονες διαφορές (βαθμίδες) στην θερμοκρασία, στην ταχύτητα, κ.λ.π. εμφανίζει εντυπωσιακά φαινόμενα πολυπλοκότητας και αυτοοργάνωσης όπως είναι η τύρβη ή οι μακροσκοπικές αρμονικές ταλαντώσεις-περιοδικότητες. Στο ακόλουθο σχήμα δείχνουμε την περίπτωση ενός υγρού στρώματος με διαφορά θερμοκρασίας (θερμόμετρο κάτω). Όταν η διαφορά της θερμοκρασίας υπερβεί ένα κατώφλι τότε το αρχικό μικροσκοπικό χάος άτακτης και τυχαίας κίνησης των σωματιδίων του μετασχηματίζεται σε ομοιόμορφη μακροσκοπική κυκλική κίνηση, έτσι ώστε τα δισεκατομμύρια-δισεκατομμυρίων των σωματιδίων του αρχίζουν να περιστρέφονται ομοιόμορφα με την ίδια συχνότητα ως ένας αόρατος «μαέστρος» να τα συντονίζει ταυτόχρονα σε όλο τον χώρο. Άλλα αντίστοιχα φαινόμενα στα ρευστά παρατηρούνται στην κατάσταση τύρβης είτε σε περιπτώσεις διαφορικής περιστροφής ενός ρευστού.

1.3 Χημεία

Μέσα σε χημικούς αντιδραστήρες όπου μπορούν να λαμβάνουν χώρα πολύπλοκες χημικές αντιδράσεις παρατηρούνται φαινόμενα αυτοοργάνωσης αντίστοιχα με αυτά των ρευστών, αρκεί το σύστημα των χημικών ενώσεων να μένει μακριά από θερμοδυναμική ισορροπία, μέσω διαρκούς ροής χημικών ενώσεων και ανακίνησης του αντιδραστήρα. Σε μία απλοποιημένη μορφή τα φαινόμενα χημικής αυτοοργάνωσης παράγουν συντονισμούς ώστε την ίδια στιγμή σε όλο τον χώρο του αντιδραστήρα να λαμβάνει χώρα η ίδια χημική αντίδραση ενώ μετά από λίγο αλλάζουν τα πράγματα και λαμβάνει παντού χώρα μία άλλη χημική αντίδραση. Έτσι είναι δυνατόν να έχουν περιοδική αλλαγή του χρώματος π.χ. από μπλε σε κόκκινο πάλι μπλε μετά κόκκινο και ούτω καθεξής. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως χημικό ρολόι. Για να αντιληφθούμε τη σημασία του φαινομένου αυτού αρκεί να σκεφθούμε ότι μέσα στον αντιδραστήρα ο τρόπος αντίδρασης των χημικών μορίων της ύλης στο ένα σημείο του αντιδραστήρα κανονικά είναι ανεξάρτητος από τον τρόπο χημικής αντίδρασης στα άλλα σημεία του αντιδραστήρα, διότι μία χημική αντίδραση δύο μορίων για να συνθέσουν νέα μόρια είναι τυχαίο φαινόμενο των μικροσκοπικών συγκρούσεων. Πάλι εδώ έχουμε έναν ακατανόητο παράγοντα που

συντονίζει όλες αυτές τις χημικές αντιδράσεις μέσα σε όλο τον όγκο του αντιδραστήρα από τυχαία συμβάντα να αποκτούν καθολική τάξη έτσι ώστε παντού να έχουμε παραγωγή του ιδίου τύπου νέων μορίων και αυτό να γίνεται με συντονισμένο περιοδικό τρόπο ώστε η αλλαγή του προϊόντος της χημικής αντίδρασης να γίνεται ταυτόχρονα σε όλο τον αντιδραστήρα. Αντίθετα εάν το σύστημα δεν ευρίσκεται αρκετά μακριά από την κατάσταση της θερμοδυναμικής ισορροπίας τότε έχουμε τυχαίες χημικές αντιδράσεις παραγωγής διαφορετικών κάθε στιγμή προϊόντων μέσα στον όγκο του χημικού αντιδραστήρα. Μάλιστα πιο εξελιγμένα φαινόμενα χημικής αυτοοργάνωσης οδηγούν πέραν του χρονικού συντονισμού σε χωρικούς συντονισμούς έτσι ώστε να δημιουργούνται δομές τάξης στον χώρο γνωστές ως χημικά κύματα. Έτσι μπορούμε τώρα την ίδια χρονική στιγμή να παρατηρούμε περιοδική μεταβολή του χρώματος κατά μήκος του αντιδραστήρα ενώ συγχρόνως έχουμε και χρονικές μεταβολές. Η χημική λοιπόν αυτοοργάνωση των πολυπλόκων συστημάτων παράγει χημικές δομές στον χώρο και τον χρόνο ωσάν πάλι κάποιος αόρατος μαέστρος να συντονίζει κάθε στιγμή τον τρόπο αντίδρασης των πρακτικά άπειρων χημικών μορίων μέσα στον όγκο του χημικού αντιδραστήρα.

1.4. Βιολογία

Τα χημικά ρολόγια και τα χημικά κύματα που παράγει η χημική αυτοοργάνωση είναι η αρχή κατανόησης της βιολογικής αυτοοργάνωσης που παρατηρείται από τα απλά πρωτόζωα μέχρι τους ανεπτυγμένους πολύπλοκους βιολογικούς οργανισμούς. Ο βιολογικός κόσμος αποτελείται από πληθώρα ζώντων οργανισμών από το επίπεδο των απλών μονοκύτταρων οργανισμών μέχρι το επίπεδο των φυτών και των ζώων που είναι πλήρως ανεπτυγμένοι οργανισμοί. Το πιο απλό έμβιο ον είναι το κύτταρο. Ήδη εδώ μέσα στο κύτταρο συμβαίνουν χιλιάδες ή εκατομμύρια χημικές ή φυσικές λειτουργίες πλήρως συντονισμένες μεταξύ τους ώστε το κύτταρο να μπορεί να τρέφεται και να αναπαράγεται. Εκεί δε που κτυπά η καρδιά του κυττάρου είναι ο πυρήνας του που περιέχει το DNA δηλαδή τον γενετικό κώδικα της ζωής. Κάθε διαφορετικό είδος ζώντος οργανισμού περιέχει διαφορετική μορφή του DNA. Το DNA μπορεί να αντιγράφει τον εαυτό του και έτσι τα έμβια όντα αντιγράφουν-αναπαραγάγουν τον εαυτόν τους. Η πορεία της φύσης από απλά χημικά μόρια σε πολύπλοκα μακρομόρια (DNA, RNA, κ.λ.π.) και από εκεί σε πολύπλοκα κύτταρα και πολύπλοκους οργανισμούς αποτελεί ένα θαύμα αυτοοργάνωσης που δύσκολα

εξηγείται με όσα γνωρίζουμε μέχρι σήμερα. Το πλέον εντυπωσιακό φαινόμενο είναι να βλέπει κανείς μία ομοιόμορφη σφαίρα χιλιάδων ή εκατομμυρίων κυττάρων να αρχίζει βαθμιαία να διαφοροποιείται έτσι ώστε άλλα κύτταρα να γίνονται δέρμα, άλλα νεύρα, άλλα οστά, άλλα καρδιά, χέρια, πόδια, κεφάλι, κ.ο.κ. Εδώ έχουμε ένα ασύλληπτο φαινόμενο αυτοοργάνωσης και δημιουργίας τάξης μέσα από διαρκή σπασίματα της αρχικής συμμετρίας και ομοιομορφίας.

1.5 Οικοσυστήματα

Το γήινο οικοσύστημα περιλαμβάνει το φυσικοχημικό περιβάλλον: ξηρά, θάλασσα, ατμόσφαιρα και όλο το βιολογικό περιβάλλον φυτά και ζώα που ζουν και αναπτύσσονται μέσα σε αυτό. Αν φέρουμε στο μυαλό μας την ιστορική αλληλουχία που οδήγησε μέσα σε τέσσερα (4) περίπου δισεκατομμύρια χρόνια την άμορφη θερμή μάζα της γης στην σημερινή πολύπλοκη μορφή του γήινου φυσικοχημικού και βιολογικού περιβάλλοντος τότε αντιλαμβανόμαστε τη λειτουργία της αυτοοργάνωσης σε επίπεδο πλανητικό. Μέσα σε αυτό το πλανητικό πολύπλοκο σύστημα εμφανίζονται όλο και πιο πολύπλοκες φυσικοχημικές και βιολογικές μορφές ενώ ταυτόχρονα όλο αυτό το περιβάλλον μοιάζει με ένα πλανητικό γήινο ζωντανό οργανισμό.

1.6 Άνθρωπος

Στο επίπεδο του ανθρώπου η φυσική πολυπλοκότητα και η λειτουργία της αυτοοργάνωσης αποκτά τελείως άλλο βάθος και ύψος και οδηγεί στην εμφάνιση όλων των ανθρώπινων λειτουργιών: γλώσσα, λογική (λόγος), συνείδηση και αυτοσυνείδηση. Εδώ έχουμε την εμφάνιση του ανθρώπινου εγκεφάλου του πλέον πολύπλοκου συστήματος μέσα στο σύμπαν. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος μπορεί να παίρνει πληροφορία από το περιβάλλον και να γεννά νέα πληροφορία μέσα στον κόσμο. Στο επίπεδο του ανθρώπου εμφανίζονται όλες εκείνες οι ψυχοσωματικές λειτουργίες που φαίνεται να υπερβαίνουν κάθε απλή επιστημονική εξήγηση. Ο ανθρώπινος νους περιγράφει όλο τον κόσμο που βλέπει αλλά αδυνατεί να κατανοήσει τον εαυτόν του. Η ανθρώπινη δηλαδή σκέψη περιγράφει όλα τα άλλα αλλά στέκεται ανίκανη να κατανοήσει τον εαυτόν της. Ο άνθρωπος ζει μέσα στον κόσμο, τον περιγράφει, αλλά συγχρόνως αναζητά το πέραν του κόσμου, αναζητά το νόημα του

κόσμου, τον λόγο ύπαρξης του κόσμου. Ο άνθρωπος χαίρεται ή λυπάται και αναζητά τα αίτια της λύπης ή της χαράς. Τέλος ο άνθρωπος αναζητά τα αίτια της τάξης και της αυτοοργάνωσης του κόσμου σε όλα τα επίπεδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Τα μαθηματικά που θα χρησιμοποιήσουμε για την μελέτη των πολύπλοκων συστημάτων διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- ντετερμινιστικές περιγραφές
- στοχαστικές περιγραφές.

Στις πρώτες μιλάμε για βεβαιότητες ενώ στις δεύτερες για πιθανότητες.

2.1. Μαθηματική περιγραφή των δυναμικών συστημάτων

Ένα φυσικό σύστημα περιγράφεται από ένα σύνολο μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_N, \dots$ τα οποία για κάθε χρονική στιγμή έχουν ορισμένη τιμή. Ένα φυσικό μέγεθος μπορεί να μεταβάλλεται στον χρόνο όπως η ταχύτητα, η θερμοκρασία κλπ. ή και να μείνει σταθερό όπως π.χ. η διατήρηση της ολικής ενέργειας, της ολικής ορμής, φορτίου κλπ. Εν γένει τα φυσικά μεγέθη είναι συναρτήσεις του χρόνου :

$$x \equiv x(t) \text{ ή } x = f(t)$$

όπου X φυσικό μέγεθος, και t χρόνος.

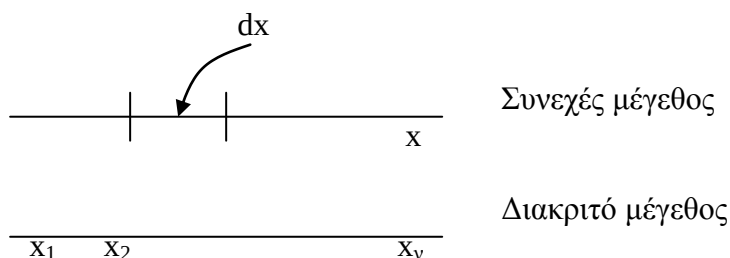
Ένα φυσικό μέγεθος μπορεί να παίρνει συνεχείς τιμές ή διακριτές.

Συνεχές μέγεθος : $x \in \mathbb{R}$, όπου x οι αριθμητικές τιμές του μεγέθους x και $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Διακριτό μέγεθος : $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ όπου x_i οι τιμές ενός διακριτού μεγέθους και i υποσύνολο των φυσικών αριθμών.

Παράδειγμα συνεχούς μεγέθους: η θέση και η ταχύτητα ενός σώματος στο χώρο, θερμοκρασία ενός σώματος, κλπ.

Παράδειγμα διακριτού μεγέθους: ηλεκτρικό φορτίο, η ενέργεια ενός κβαντικού συστήματος, κλπ.

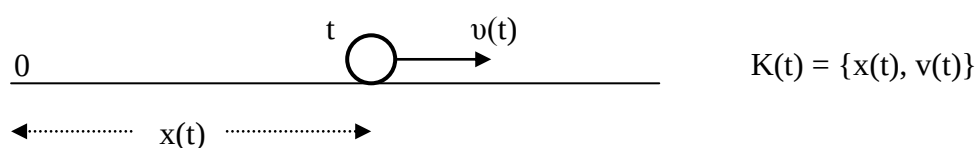


Σχήμα 2.1

Στο συνεχές μέγεθος οι μεταβολές dx μπορούν να είναι οσοδήποτε μικρές. Το διακριτό μέγεθος παίρνει διακριτές τιμές και οι μεταβολές είναι πεπερασμένες.

Η κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος περιγράφεται από πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών : $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ ή από άπειρο πλήθος μεταβλητών : $\varphi_\chi \equiv \varphi(\chi)$ όπου φ το μέγεθος και χ ένας δείκτης που παίρνει άπειρες τιμές συνεχείς ή διακριτές.

Παράδειγμα για την πρώτη περίπτωση είναι η κατάσταση ενός σωματιδίου που κινείται σε ευθεία γραμμή: Η περίπτωση πεδίου (άπειρο πλήθος μεγεθών) περιγράφεται στα επόμενα.

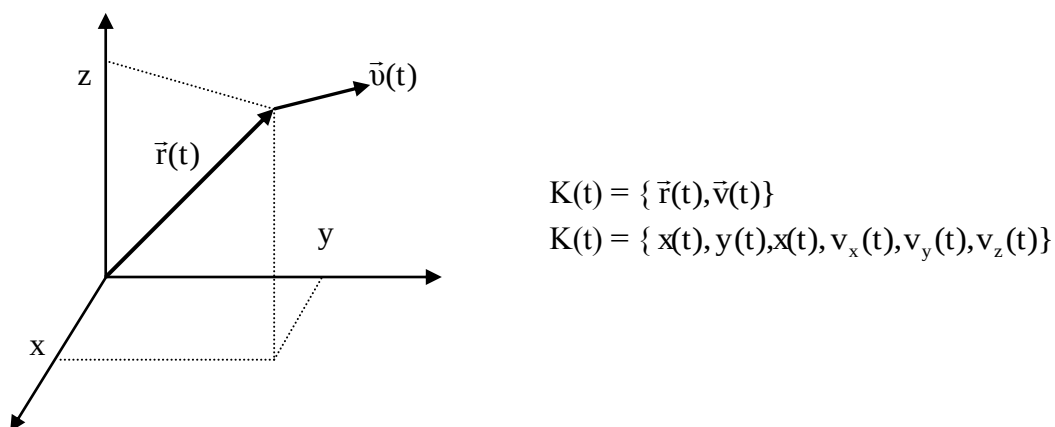


Σχήμα 2.2

Στην περίπτωση αυτή η κατάσταση του σώματος περιγράφεται κάθε στιγμή από τη θέση x και τη στιγμιαία ταχύτητα v του σωματιδίου. Ως γνωστόν η ταχύτητα ορίζεται ως η παράγωγος της θέσης:

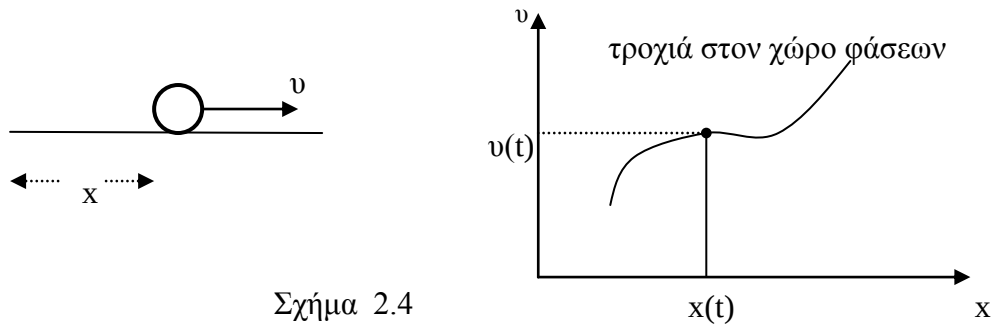
$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Αντίστοιχα για ένα σωματίδιο στο χώρο η κατάστασή του περιγράφεται από 6 μεταβλητές: 3 μεταβλητές θέσης ή συντεταγμένες θέσης και 3 συνιστώσες ταχύτητας.



Σχήμα 2.3

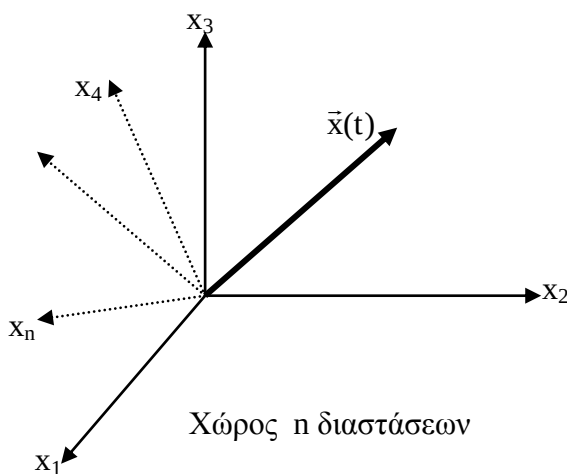
Εν γένει το σύνολο των επαρκών φυσικών μεταβλητών που περιγράφουν ένα δυναμικό σύστημα αποτελούν τον φασικό χώρο του συστήματος ή χώρο κατάστασης. Έτσι για την περίπτωση ενός σωματιδίου που κινείται σε ευθεία (σχήμα 2) ο φασικός χώρος είναι το επίπεδο (x, v) θέσης - ταχύτητας του σωματιδίου.



Σχήμα 2.4

Η χρονική εξέλιξη της κατάστασης αντιστοιχεί σε μια συνεχή τροχιά στο φασικό ή καταστατικό χώρο

Το πλήθος των επαρκών ανεξάρτητων φυσικών μεταβλητών που περιγράφουν το δυναμικό σύστημα αποτελεί τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος. Έτσι για ένα σωματίδιο που κινείται στην ευθεία έχουμε δυο βαθμούς ελευθερίας (θέση, ταχύτητα) ενώ για ένα σωματίδιο που κινείται στον χώρο έχουμε 6 βαθμούς ελευθερίας, τρεις συνιστώσες θέσης και 3 συνιστώσες ταχύτητας ή ορμής. Έτσι, δυο σωματίδια περιγράφονται από $2 \cdot 6 = 12$ βαθμούς ελευθερίας και N σωματίδια από $6 \cdot N = n$ βαθμούς ελευθερίας. Μαθηματικά ένας καταστατικός χώρος n -βαθμών ελευθερίας περιγράφεται από n κάθετους άξονες.



Σχήμα 2.5

$$K(t) = \{x_1(t), x_1(t), \dots, x_n(t)\}$$

$$\vec{X} \equiv K(t)$$

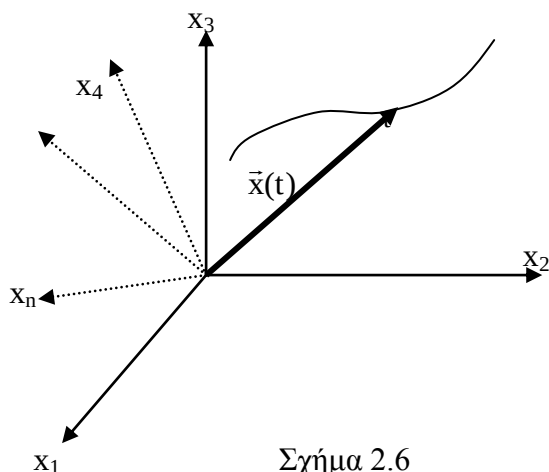
$$\vec{X} = \text{καταστατικό διάνυσμα}$$

Οι συνιστώσες x_i στις συνιστώσες θέσης και στις συνιστώσες ταχύτητας

Τα ανεξάρτητα φυσικά μεγέθη που περιγράφουν την κατάσταση του δυναμικού συστήματος ορίζουν ένα n-διάστατο καταστατικό διάνυσμα

$$K(t) \cong \bar{X} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$$

όπου $x_1(t), x_1(t), \dots, x_n(t)$ οι προβολές του καταστατικού διανύσματος στους n-κάθετους άξονες που περιγράφουν τον φασικό ή καταστατικό χώρο. Αντίστοιχα η χρονική εξέλιξη της κατάστασης του δυναμικού συστήματος περιγράφεται από μια συνεχή καμπύλη γραμμής στον n-διάστατο φασικό χώρο που αποτελεί την τροχιά της δυναμικής του συστήματος.

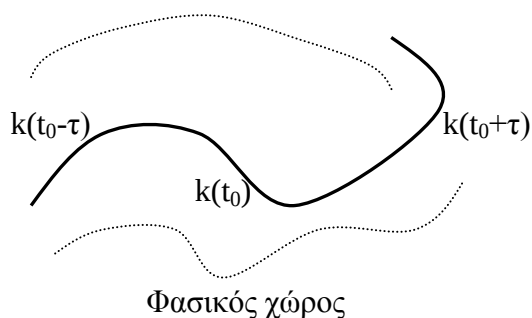


Τροχιά στο χώρο φάσεων

Σχήμα 2.6

Η τροχιά στον φασικό χώρο ενώνει όλες τις διαδοχικές καταστάσεις από τις οποίες διέρχεται το σύστημα εξελισσόμενο στον χρόνο.

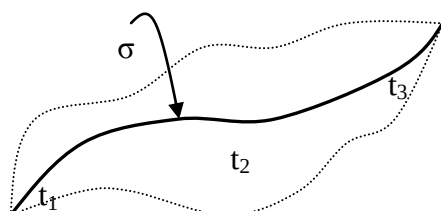
Εάν το σύστημα περιγράφεται από ντετερμινιστική δυναμική τότε γνωρίζοντας την αρχική κατάσταση του συστήματος μπορούμε να γνωρίζουμε όλες τις επόμενες ή προηγούμενες καταστάσεις του.



Σχήμα 2.7

Ο καταστατικός (φασικός) χώρος περιλαμβάνει πολλές δυνατές ντετερμινιστικές τροχιές. Από κάθε κατάσταση διέρχεται μια τροχιά
 $\dots K(t_0 - \tau) \Rightarrow K(t_0) \Rightarrow K(t_0 + \tau)$

Εάν το σύστημα περιγράφεται στοχαστικά τότε μπορούμε να γνωρίσουμε μόνο την πιθανότητα να ακολουθήσει την μια ή την άλλη τροχιά. Στην στοχαστική περιγραφή η πραγματική τροχιά και η πραγματική κατάσταση επιλέγονται απρόβλεπτα (ελεύθερα) μέσα από ένα σύνολο πιθανών ή δυνατών καταστάσεων και τροχιών.



$$\sigma = \{K(t_1), K(t_2), \dots, K(t_n)\}$$

Στοχαστική δυναμική στον φασικό χώρο

Σχήμα 2.8

Στα στοχαστικά συστήματα η παρατηρούμενη τροχιά πραγματοποιείται πιθανοκρατικά επιλεγόμενη μέσα από το πλήθος πολλών δυνατών τροχιών

Η παρατηρούμενη τροχιά για μια χρονική περίοδο (t_a , t_r) και η παρατηρούμενη κατάσταση μια ορισμένη στιγμή (t) επιλέγονται από την στοχαστική δυναμική έτσι ώστε να συγκρίνουμε μόνον τη πιθανότητα να παρατηρηθούν η κατάσταση $K(t)$ ή ένα σύνολο διαδοχικών καταστάσεων που αποτελούν την τροχιά (σ).

$$\sigma_{t_a}^{t_b} \Rightarrow P(\sigma) = \text{Πιθανότητα για την τροχιά } \sigma$$

Για κάθε δυνατή τροχιά αντιστοιχεί μια ορισμένη πιθανότητα. Αντίστοιχα στις στοχαστικές διαδικασίες για κάθε κατάσταση $K(t)$ αντιστοιχεί ορισμένη πιθανότητα πραγματοποίησής της καταστάσεως

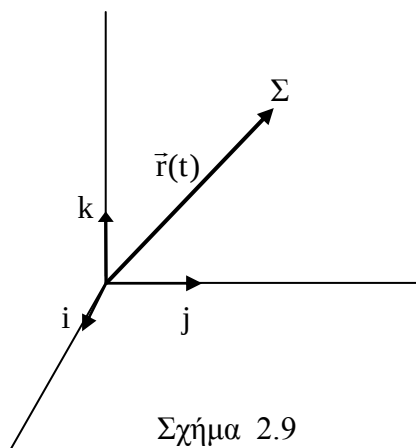
$$K(t) \Rightarrow P[K(t)]$$

Τα ίδια πράγματα ισχύουν για δυναμικά συστήματα που περιγράφονται από άπειρες δυναμικές (φυσικές) μεταβλητές, δηλαδή έχουμε άπειρους βαθμούς ελευθερίας, όπως συμβαίνει με τα πεδία, τα οποία περιγράφονται από μια ή περισσότερες μεταβλητές σε κάθε σημείο του χώρου και επειδή τα σημεία του χώρου είναι άπειρα έχουμε άπειρους βαθμούς ελευθερίας.

2.2 Φυσικός χώρος πεπερασμένης διάστασης

Όλοι γνωρίζουμε ότι ο φυσικός χώρος είναι 3-διάστατος

Τρισδιάστατος φυσικός χώρος



Σχήμα 2.9

$$\Sigma \Rightarrow \vec{X} = O\Sigma$$

$$\vec{X} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

$$\text{ή } \vec{X} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$$

$$\text{ή } \vec{X} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$$

$$\text{ή } \vec{X} = (x, y, z)$$

$$\text{ή } \vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$$

Κάθε σημείο του χώρου περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης το οποίο αναλύεται σε τρεις συνιστώσες (x, y, z)

$$\vec{X} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

Μοναδιαία διανύσματα στους τρεις κάθετους (καρτεσιανούς) άξονες του χώρου, είναι τα $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$.

Πράξεις διανυσμάτων

Οι βασικές πράξεις διανυσμάτων είναι η πρόσθεση δύο ή περισσότερων διανυσμάτων, ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό, το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

Πρόσθεση

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z$$

$$\vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}$$

Πολλαπλασιασμός

$$\lambda \vec{a} = \vec{b}$$

$$b_x = \lambda a_x, \quad b_y = \lambda a_y, \quad b_z = \lambda a_z$$

Εσωτερικό γινόμενο διανύσματος

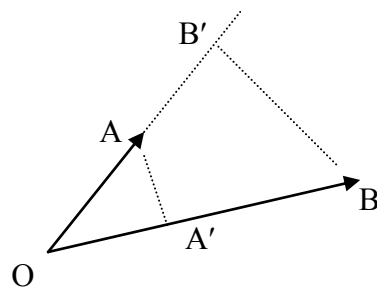
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

Όπου $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ είναι το σύμβολο της ορίζουσας

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$ δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό (αριθμός) και αντιστοιχεί στην προβολή ενός διανύσματος στο άλλο.



Σχήμα 2.10

$$OA = \vec{a}$$

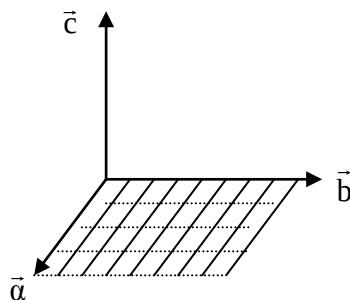
$$OB = \vec{b}$$

$$OA' = a \cos \theta$$

$$OB' = b \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cos \theta$$

Το εξωτερικό γινόμενο είναι διάνυσμα και αντιστοιχεί στο εμβαδόν του παραλληλόγραμμου που ορίζουν τα διανύσματα.

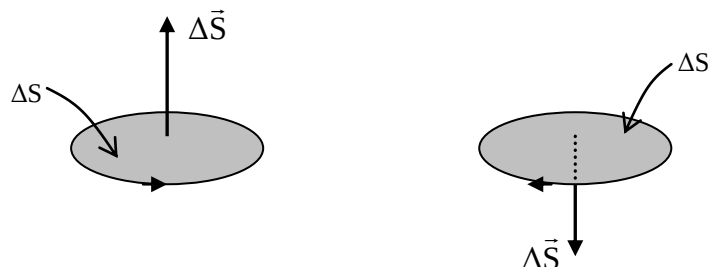


Σχήμα 2.11

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

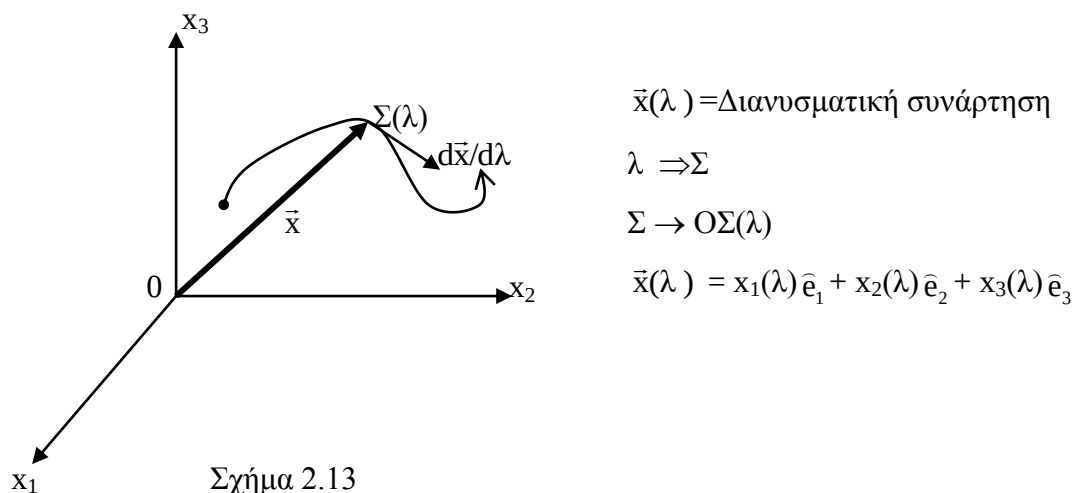
Το εμβαδόν επιφάνειας περιγράφεται με διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια μέτρο ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας και φοράς δεξιόστροφης ή αριστερόστροφης αναλόγως πως περιφερόμαστε στην επιφάνεια.



Σχήμα 2.12

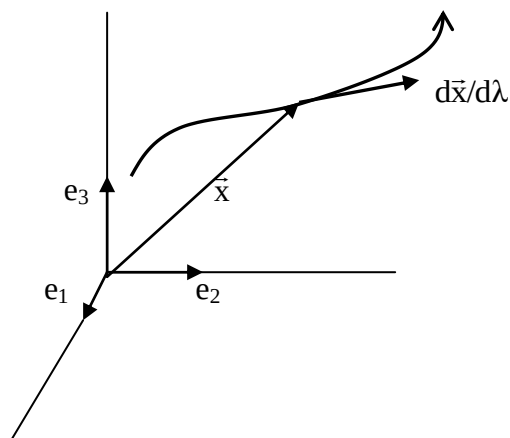
Καμπύλη – Εφαπτόμενη καμπύλης

Κάθε συνεχής γραμμή ορίζεται από ένα υποσύνολο σημείων μέσα στον φυσικό χώρο και περιγράφεται από μια διανυσματική συνάρτηση μιας βαθμωτής μεταβλητής (λ).



Σχήμα 2.13

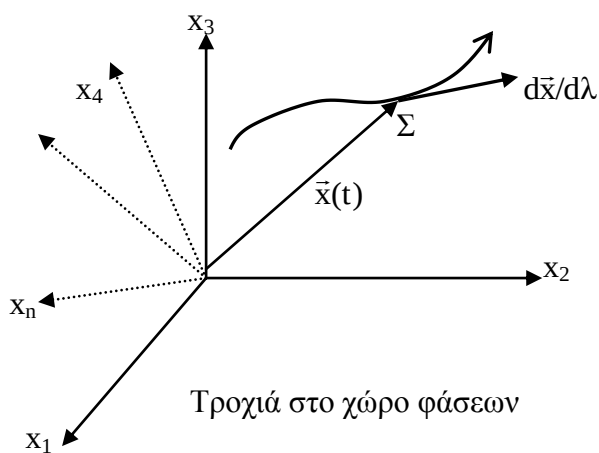
Σε κάθε σημείο Σ μιας γραμμής αντιστοιχούμε τον αριθμό (παράμετροι, καμπύλης), π.χ. το μήκος της καμπύλης $O\Sigma$ από ένα σημείο αναφοράς. Στην περίπτωση που η καμπύλη αντιστοιχεί στην τροχιά ενός σώματος στο χώρο η παράμετρος λ ταυτίζεται με τον χρόνο. Η εφαπτομένη της καμπύλης σε κάθε της σημείο ορίζεται από την παράγωγο της διανυσματικής συνάρτησης:



$$\frac{d\vec{x}}{d\lambda} = \frac{dx_1}{d\lambda} \hat{e}_1 + \frac{dx_2}{d\lambda} \hat{e}_2 + \frac{dx_3}{d\lambda} \hat{e}_3$$

Σχήμα 2.14

Σ' ένα χώρο n-διαστάσεων έχουμε γενίκευση όλων των ανωτέρων εννοιών :



$$\Lambda \Rightarrow O\Sigma = \vec{X}(\lambda)$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\lambda} = \frac{dx_1}{d\lambda} \hat{e}_1 + \frac{dx_2}{d\lambda} \hat{e}_2 + \dots + \frac{dx_n}{d\lambda} \hat{e}_n$$

$$\text{όπου } \vec{X} = x_1(\lambda) \hat{e}_1 + x_2(\lambda) \hat{e}_2 + \dots + x_n(\lambda) \hat{e}_n$$

$$\vec{X} + \vec{Y} = (x_1+y_1) \hat{e}_1 + (x_2+y_2) \hat{e}_2 + \dots + (x_n+y_n) \hat{e}_n$$

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = x_1 \cdot y_1 \hat{e}_1 + x_2 \cdot y_2 \hat{e}_2 + \dots + x_n \cdot y_n \hat{e}_n$$

Σχήμα 2.15

Συναρτήσεις μιας ή πολλών μεταβλητών

Στην περιγραφή της φυσικής πραγματικότητας χρησιμοποιούμε την έννοια της συνάρτησης όταν οι τιμές ενός μεγέθους εξαρτώνται από τις τιμές ενός άλλου μεγέθους.

Συνάρτηση μιας μεταβλητής έχουμε όταν ένα μέγεθος εξαρτάται από ένα άλλο βαθμωτό μέγεθος

$$X \Rightarrow Y = f(X)$$

Το μέγεθος παίρνει τιμές στο πεδίο των πραγματικών. Το μέγεθος μπορεί να είναι βαθμωτό ή διανυσματικό μέγεθος.

Συνάρτηση πολλών μεταβλητών έχουμε όταν οι τιμές ενός μεγέθους y (βαθμωτού ή διανυσματικού) εξαρτώνται από τις τιμές πολλών άλλων βαθμωτών μεγεθών $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Για συνάρτηση μιας ή πολλών μεταβλητών ορίζουμε την παράγωγο ως τον ρυθμό μεταβολής του y ως προς την μεταβολή της μιας μεταβλητής όταν οι άλλες μένουν σταθερές.

$$y = f(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \text{or} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \text{or} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{or} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = \text{or} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Αντίστοιχα ορίζουμε το ολοκλήρωμα για συνάρτηση μιας μεταβλητής

Ορισμένο ολοκλήρωμα

$$y = f(x) \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \text{or} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i$$

Αόριστο ολοκλήρωμα

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx$$

$F(x)$ = αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)$

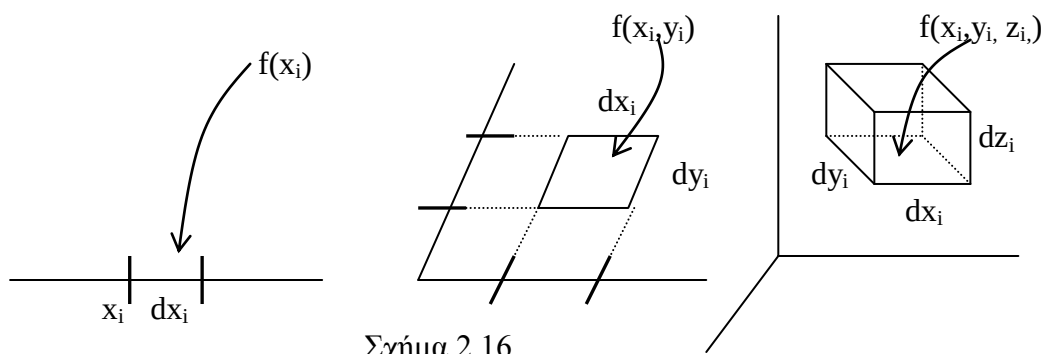
Για συνάρτηση μιας μεταβλητής, ή για συνάρτηση πολλών μεταβλητών, γενικεύοντας έχουμε

$$\iint f(x, y) dx dy = \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta(x_i) \Delta(y_j) \text{ διπλό ολοκλήρωμα}$$

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k) \Delta(x_i) \Delta(y_j) \Delta(z_k) \text{ τριπλό ολοκλήρωμα}$$

$$\int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2, \dots, dx_n = \sum_i \sum_j \dots \sum_k f(x_i^1, x_j^2, \dots, x_k^n) \Delta(x_i^1) \Delta(x_j^2) \Delta(x_k^n) \text{ n}^{\circ} \text{ ολοκλήρωμα}$$

Το απλό, διπλό και τριπλό ολοκλήρωμα περιγράφεται στις ακόλουθες εικόνες:



Σχήμα 2.16

Απλό ολοκλήρωμα

$f(x_i)$ = τιμή της f

στο σημείο x_i

Διπλό ολοκλήρωμα

$f(x_i, y_j)$ = τιμή της f

στο σημείο (x_i, y_j)

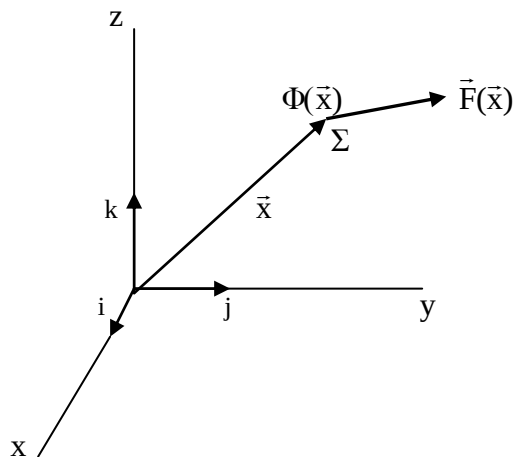
Τριπλό ολοκλήρωμα

$f(x_i, y_j, z_k)$ = τιμή της f

στο σημείο (x_i, y_j, z_k)

2.3. Βαθμωτά – Διανυσματικά πεδία

Ένα πεδίο ορίζεται σε κάθε σημείο μιας περιοχής του φυσικού χώρου ή σε όλο τον χώρο μέσω ενός βαθμωτού μεγέθους (βαθμωτό πεδίο) ή διανυσματικού μεγέθους (διανυσματικό πεδίο).



Σχήμα 2.17

Βαθμωτό πεδίο: $\Sigma \Rightarrow \Phi(\Sigma) = \Phi(\vec{x})$

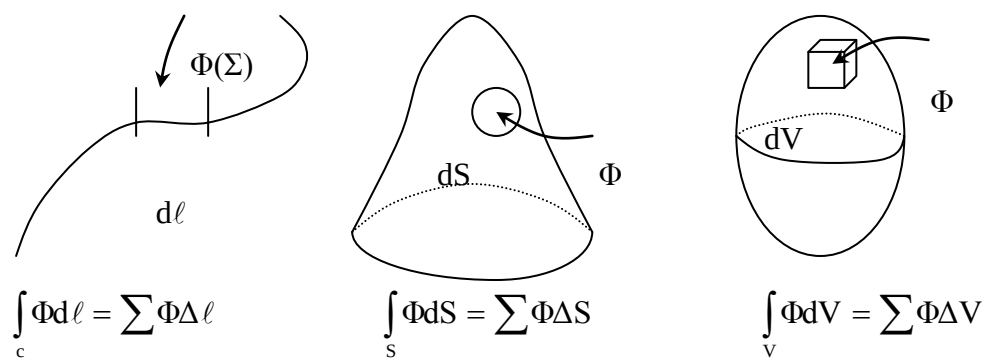
$\Phi(\Sigma) = \Phi(x, y, z)$

Διανυσματικό πεδίο: $\Sigma \Rightarrow \vec{F}(\Sigma) = \vec{F}(\vec{x})$

$\vec{F}(\vec{x}) = F_1(\vec{x})\hat{i} + F_2(\vec{x})\hat{j} + F_3(\vec{x})\hat{k}$

F_1, F_2, F_3 = συνιστώσες του διανύσματος $\vec{F}(\vec{x})$

Για το βαθμωτό πεδίο Φ ορίζουμε επικαμπύλιο επιφανειακό ή κυβικό ολοκλήρωμα αθροίζοντας τα γινόμενα του επί το στοιχειώδες μήκος (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα), επί το εμβαδόν (επιφανειακό ολοκλήρωμα), επί τον όγκο (κυβικό ολοκλήρωμα) πάνω σε μια καμπύλη, σε μια επιφάνεια και σε έναν όγκο αντιστοίχως :

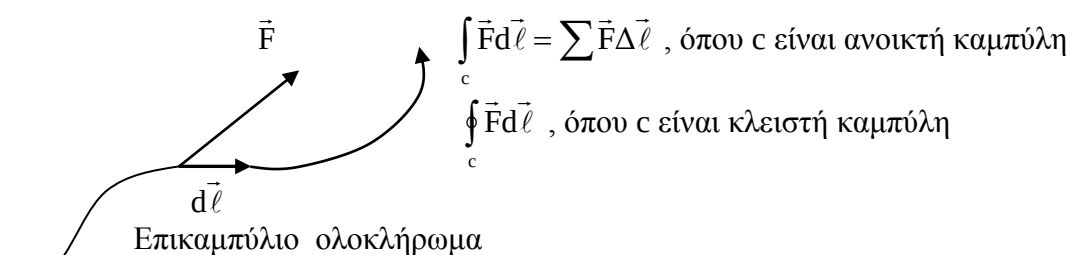


Σχήμα 2.18

Τα ολοκληρώματα αυτά αποκτούν φυσικό νόημα αν θεωρήσουμε την συνάρτηση Φ να ισούται με κάποια φυσική ποσότητα (φορτίο, μάζα κλπ.) κατανεμημένη πάνω σε μια καμπύλη επιφάνεια ή μέσα σε όγκο.

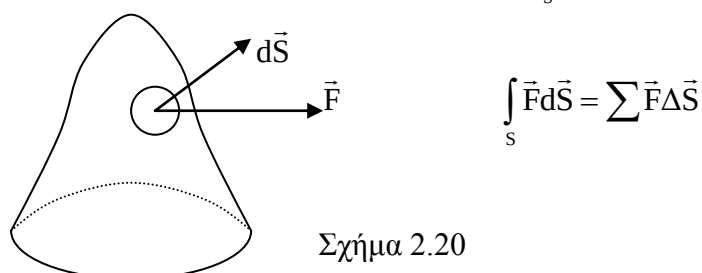
Για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ ορίζουμε επικαμπύλιο και επιφανειακό ολοκλήρωμα ως το άθροισμα των εσωτερικών γινομένων του πεδίου με τα στοιχειώδη μήκη $d\vec{\ell}$ ή εμβαδά $d\vec{S}$ επί της καμπύλης ή της επιφάνειας.

Η καμπύλη c διαμερίζεται σε άπειρα στοιχειώδη διανύσματα $\{d\vec{\ell}\}$. Για κλειστή καμπύλη το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συμβολίζεται με $\oint_c$.



Σχήμα 2.19

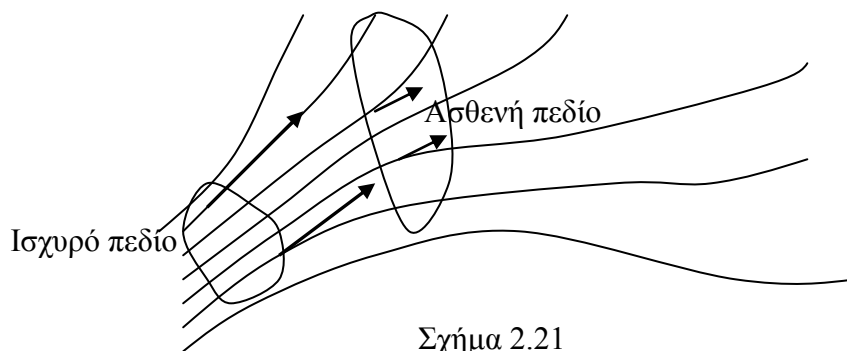
Η επιφάνεια διαμερίζεται σε άπειρα στοιχειώδη εμβαδά $d\vec{S}$. Για κλειστή επιφάνεια το επιφανειακό ολοκλήρωμα συμβολίζεται με $\oint_s$



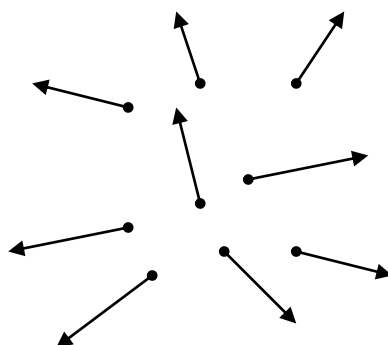
Σχήμα 2.20

Γεωμετρική απεικόνιση διανυσματικού πεδίου

Κάθε διανυσματικό πεδίο περιγράφεται με δυναμικές γραμμές στο χώρο. Από κάθε σημείο του χώρου διέρχεται μόνο μια δυναμική γραμμή. Το πεδίο εφάπτεται της δυναμικής γραμμής σε κάθε σημείο του χώρου, ενώ το πλήθος των δυναμικών γραμμών αντιστοιχεί στο μέτρο (ένταση) του διανυσματικού πεδίου.

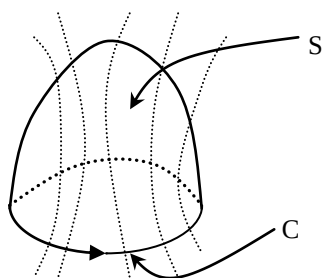


Άλλος τρόπος παράστασης του πεδίου είναι η απεικόνιση των διανυσμάτων σε κάθε σημείο του χώρου



Ροή διανυσματικού πεδίου

Ορίζουμε ροή διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ μέσα με επιφάνεια S που έχει όριο την καμπύλη C το πλήθος των δυναμικών γραμμών που διέρχονται από την C και την S .

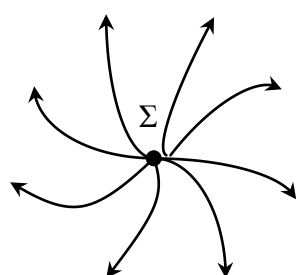


Σχήμα 2.23

$$\int_S \vec{F} d\vec{S} = \text{ροή από την επιφάνεια } S \text{ που έχει} \\ \text{όριο την καμπύλη } c$$

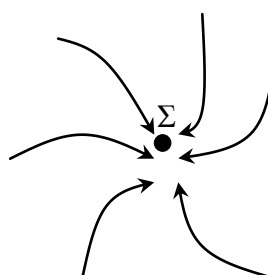
Για να υπολογίσουμε την ολική ροή αθροίζουμε τις στοιχειώδεις ροές από κάθε στοιχειώδη επιφάνεια $\Delta\vec{S}$ επί της S .

Σε ένα σημείο του χώρου είναι δυνατόν να γεννιούνται ή να χάνονται δυναμικές γραμμές. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε πηγές δυναμικών γραμμών και στην δεύτερη καταβόθρες δυναμικών γραμμών.



$$\oint \vec{F} d\vec{S} > 0$$

Πηγή δυναμικών γραμμών



$$\oint \vec{F} d\vec{S} < 0$$

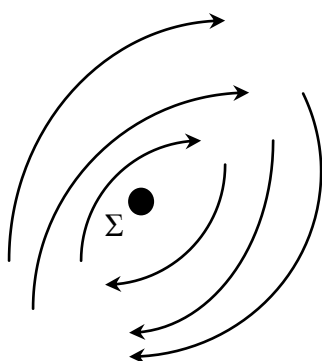
Καταβόθρα δυναμικών γραμμών

Σχήμα 2.24

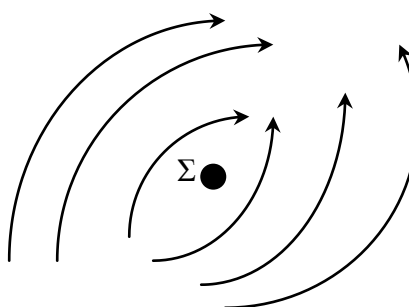
Για την περίπτωση πηγής δυναμικών γραμμών έχουμε θετική ροή του $\vec{F}$ πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια γύρω από το Σ . Ενώ στην περίπτωση καταβόθρα έχουμε αρνητική ροή.

Στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου

Γύρω από ένα σημείο είναι δυνατόν να έχουμε στροβιλισμό των δυναμικών γραμμών οπότε μιλάμε για διανυσματικές πηγές (πηγές στροβιλισμού).



Στροβιλισμός του $\vec{F}$ στο Σ



Απουσία στροβιλισμού του $\vec{F}$ στο Σ

Σχήμα 2.25

Τελεστές Πεδίων $\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \cdot, \vec{\nabla} \times, \vec{\nabla}^2$

Η βαθμίδα $\vec{\nabla}$ είναι ένας τελεστής που παραγωγίζει ένα βαθμωτό ή ένα διανυσματικό πεδίο, και ορίζεται ως ακολούθως

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

Ακολούθως θα κρατήσουμε μόνο τον συμβολισμό x, y, z για τους άξονες του χώρου και i, j, k για τα μοναδιαία τους διανύσματα.

Βαθμίδα $\vec{\nabla}$

Η βαθμίδα ενός βαθμωτού πεδίου ορίζεται ως ακολούθως

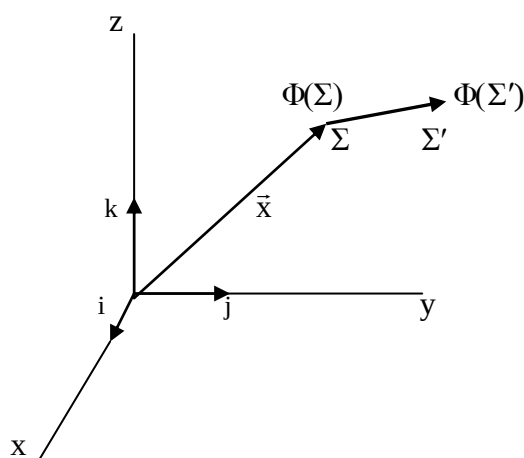
$$\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \hat{k}$$

όπου $\Phi(\vec{x}) = \Phi(x, y, z)$ το βαθμωτό πεδίο και $\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ οι μερικές παράγωγοι

Η βαθμίδα ενός βαθμωτού πεδίου ορίζεται σε κάθε σημείο του χώρου που υπάρχει το πεδίο και είναι διάνυσμα που δείχνει την κατεύθυνση μέγιστης μεταβολής της μεταβολής του πεδίου σύμφωνα με τη σχέση

$$d\Phi = \vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) \cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz$$

όπου $d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ μια στοιχειώδης μετατόπιση στο χώρο από το σημείο Σ στο γειτονικό σημείο Σ'



Σχήμα 2.26

$$d\Phi = \Phi(\Sigma') - \Phi(\Sigma)$$

$$d\Phi = \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{\ell}$$

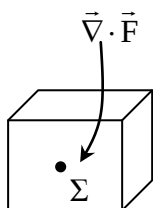
$$d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

Απόκλιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

Η απόκλιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ στο σημείο Σ ενός διανυσματικού πεδίου είναι βαθμωτό μέγεθος και ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} =$$

Η απόκλιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ ενός διανυσματικού πεδίου περιγράφει την ροή του πεδίου $\vec{F}$ από την επιφάνεια ενός στοιχειώδους όγκου σύμφωνα με το θεώρημα Gauss.



Σχήμα 2.27

$$\oint \vec{F} d\vec{S} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

Θεώρημα Gauss για απειροστή
επιφάνεια

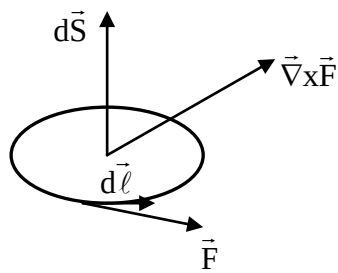
Η απόκλιση στο Σ αντιστοιχεί στο πλήθος των δυναμικών γραμμών που βγαίνουν από το Σ . Η απόκλιση στο σημείο αντιστοιχεί στην ύπαρξη πηγής ή καταβόθρας δυναμικών γραμμών αναλόγως αν η τιμή της είναι θετική ή αρνητική στο σημείο αυτό

Στροφή

Η στροφή $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ ενός διανυσματικού πεδίου είναι διάνυσμα σύμφωνα με την σχέση

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Η στροφή ενός διανυσματικού πεδίου αντιστοιχεί στην ύπαρξη διανυσματικών πηγών που προκαλούν στροβιλισμό των δυναμικών γραμμών σύμφωνα με το θεώρημα stokes.

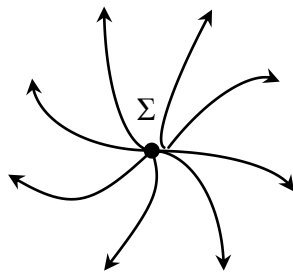


Σχήμα 2.28

$$\oint_c \vec{F} d\vec{\ell} = \vec{\nabla} \times \vec{F} d\vec{S}$$

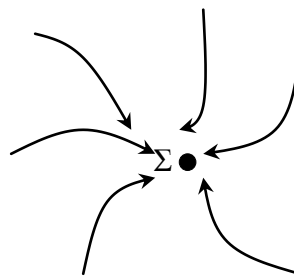
Θεώρημα Stokes για απειροστή επιφάνεια

Αν σε ένα σημείο Σ του χώρου η απόκλιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ του πεδίου $\vec{F}$ είναι θετική ή αρνητική τότε σε αυτό το σημείο υπάρχει πηγή ή καταβόθρα δυναμικών γραμμών, αν είναι μηδέν τότε δεν υπάρχει πηγή ή καταβόθρα δυναμικών γραμμών.



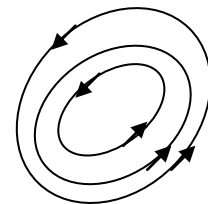
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} > 0$$

Πηγή
δυναμικών γραμμών



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$$

Καταβόθρα
δυναμικών γραμμών

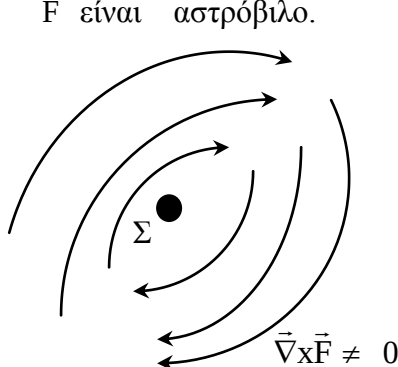


$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

Απουσία
Πηγής ή Καταβόθρας

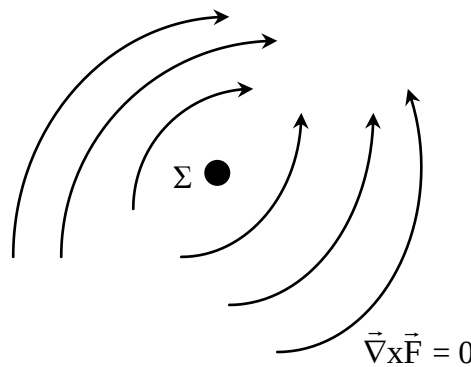
Σχήμα 2.29

Αν σε ένα σημείο του χώρου η στροφή $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ του πεδίου $\vec{F}$ είναι διάφορη του μηδενός τότε οι δυναμικές γραμμές στροβιλίζονται, ενώ αν είναι μηδέν τότε το πεδίο $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο.



$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$$

Στροβιλό πεδίο

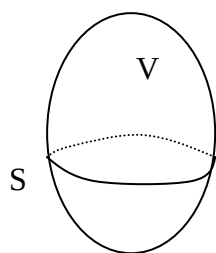


$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Αστρόβιλο πεδίο

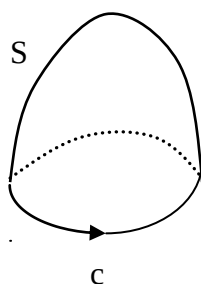
Σχήμα 2.30

Για πεπερασμένο όγκο και πεπερασμένη επιφάνεια τα θεωρήματα Gauss και Stokes παίρνουν τη μορφή



$$\oint_S \vec{F} d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

Θεώρημα Gauss για κλειστή επιφάνεια (S)



$$\oint_C \vec{F} d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} d\vec{S}$$

Θεώρημα Stokes για κλειστή καμπύλη (c)

Σχήμα 2.31

Με την βοήθεια των θεωρημάτων αυτών αποδεικνύονται οι ταυτότητες

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0 \quad (\text{η απόκλιση της στροφής είναι μηδέν})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = 0 \quad (\text{η στροφή της βαθμίδας είναι μηδέν})$$

Βάσει των ταυτοτήτων αυτών συμπεραίνουμε ότι εάν η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{B}$ είναι μηδέν παντού ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) τότε το $\vec{B}$ ισούται με την στροφή ενός άλλου διανυσματικού πεδίου

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

και αν η στροφή ενός πεδίου $\vec{F}$ είναι μηδέν σε κάθε σημείο του χώρου τότε αυτό ισούται με την βαθμίδα ενός διανυσματικού πεδίου

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} \Phi$$

Ο Τελεστής του Ντάλαμπερτ ∇^2 ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο της βαθμίδας με τον εαυτόν της και είναι βαθμωτός τελεστής που δρα σε βαθμωτά ή διανυσματικά πεδία.

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

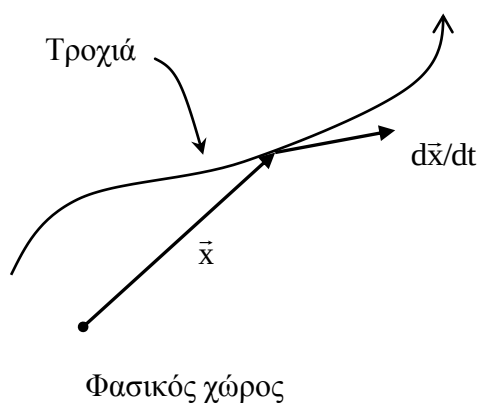
$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial z^2} = \nabla^2 F_x \hat{i} + \nabla^2 F_y \hat{j} + \nabla^2 F_z \hat{k}$$

2.4 Διαφορικές Εξισώσεις – Εξισώσεις Διαφορών

Η έννοια της διαφορικής εξίσωσης συνδέεται άμεσα με την περιγραφή των ντετερμινιστικών φυσικών φαινομένων και της φυσικής νομοτέλειας. Η δυναμική εξέλιξη της κατάστασης ενός δυναμικού συστήματος στον φασικό του χώρο περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών. Οι διαφορικές εξισώσεις είναι: Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) ή Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους (ΔΕΜΠ). Μία άλλη διάκριση είναι : Γραμμικές και Μη Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών. Το μεγάλο πλήθος των πολυπλόκων συστημάτων περιγράφεται μέσω μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ή εξισώσεων διαφορών. Οι μη γραμμικές εξισώσεις σχεδόν δεν επιλύονται αναλυτικά (δεν έχουν αναλυτικές λύσεις) παρά μόνο αριθμητικές. Επιλύονται δηλαδή αριθμητικά στον υπολογιστή.

Συνεχή στο χρόνο δυναμικά συστήματα



Σχήμα 2.32

Εάν έχουμε ένα δυναμικό σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας η κατάσταση του $K(t)$ κάθε στιγμή (t) περιγράφεται από το κατασταστικό διάνυσμα $\vec{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$

Η εφαπτόμενη στην τροχιά της δυναμικής δίδεται από την χρονική παράγωγο της κατάστασης $\vec{X}(t)$

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$$

Η παράγωγος $d\vec{X}/dt$ αντιστοιχεί στο ρυθμό μεταβολής της κατάστασης ως προς τον χρόνο. Ο ρυθμός αυτός ονομάζεται και ταχύτητα ροής της κατάστασης στον φασικό χώρο. Εάν για κάθε συγκεκριμένη κατάσταση μέσα στον φασικό χώρο γνωρίζουμε την ταχύτητα ροής $d\vec{X}/dt$ τότε η δυναμική του συστήματος είναι ντετερμινιστική, σύμφωνα με την εξίσωση

$$\vec{X}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}, \lambda)$$

όπου λ = παράμετρος της δυναμικής.

Η εξίσωση αυτή μας επιτρέπει να υπολογίζουμε όλες τις διαδοχικές καταστάσεις από τις οποίες διέρχεται το σύστημα αρκεί να γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση $\vec{X}(t_0)$ βάση των σχέσεων

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{F}(\vec{X}, \lambda) dt$$

Αφού ως γνωστόν

$$\vec{X}(t) - \vec{X}(t_0) = \int d\vec{X} = \int \vec{F} dt$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί την ολοκληρωτική λύση της εξίσωσης. Η εξίσωση αυτή αντιστοιχεί σε ένα σύστημα απλών διαφορικών εξισώσεων της μορφή

$$\frac{dX_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

.....

.....

.....

$$\frac{dX_n}{dt} = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

όπου $\vec{F}(\vec{X}, \lambda) = (F_1(\vec{X}, \lambda), F_2(\vec{X}, \lambda), \dots, F_n(\vec{X}, \lambda))$ και $F_i(\vec{X}, \lambda) = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Γραμμικές εξισώσεις έχουμε όταν ισχύει η συνθήκη

$$\vec{F}(a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2) = a\vec{F}(\vec{x}_1) + b\vec{F}(\vec{x}_2)$$

Αν δεν ισχύει η συνθήκη γραμμικότητας τότε έχουμε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Βάσει των προηγούμενων, εάν οι βαθμοί ελευθερίας είναι πεπερασμένοι τότε και οι μεταβλητές (δυναμικά μεγέθη) που περιγράφουν την φυσική κατάσταση είναι πεπερασμένες.

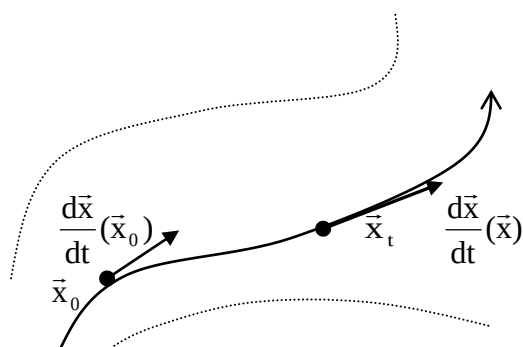
$$\begin{aligned} n\text{-βαθμοί ελευθερίας} &\Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{X} \\ &n\text{-δυναμικά μεγέθη} \end{aligned}$$

Οι δυναμικές μεταβλητές $X_i, i=1, 2, \dots, n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου (t)

$$X_i = X_i(t), i=1, 2, \dots, n$$

$$\vec{X} = \vec{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Η εξίσωση $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}, \lambda)$ αποτελεί τον φυσικό ή δυναμικό νόμο εξέλιξης της κατάστασης του συστήματος που περιγράφεται κάθε στιγμή t από το καταστατικό διάνυσμα $\vec{X}(t)$. Η δυναμική που περιγράφεται από την εξίσωση είναι ντετερμινιστική διότι δεδομένης της αρχικής κατάστασης $\vec{X}_0 = \vec{X}(t_0)$ είναι καθορισμένες όλες οι μελλοντικές καταστάσεις του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι από κάθε αρχικά κατάσταση διέρχεται μια μόνο δυναμική τροχιά.



Πεδίο ροής της δυναμικής

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}, \lambda)$$

Σχήμα 2.33

Διακριτά στο χώρο δυναμικά συστήματα.

Για πολλά δυναμικά συστήματα η κατάσταση $\vec{X}$ ορίζεται μόνο σε ορισμένες χρονικές στιγμές

$$t_0, t_0+\tau, t_0+2\tau, \dots, t_n=t_0+n\tau$$

όπου τ είναι βήμα του χρόνου.

Αυτά τα δυναμικά συστήματα περιγράφουν π.χ. την εξέλιξη ενός ή περισσότερων πληθυσμών οι οποίοι καταμετρούνται ανά μέρα, ανά μήνα, ανά χρόνο, δηλαδή σε διακριτές χρονικές στιγμές. Στην περίπτωση αυτή δυναμική εξέλιξη στον χώρο καταστάσεων περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών ή απεικονίσεις της μορφής

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{F}(\vec{X}_n, \lambda)$$

όπου $\vec{X}_n = \vec{X}(t_n)$, $t_n=t_0+n\tau$

$$\begin{array}{ccc} \vec{X}(t_{n-1}) & & \vec{X}(t_n) \\ & & \vec{X}(t_{n+1}) \\ & \bullet & \end{array}$$

Διακριτές καταστάσεις στο φασικό χώρο

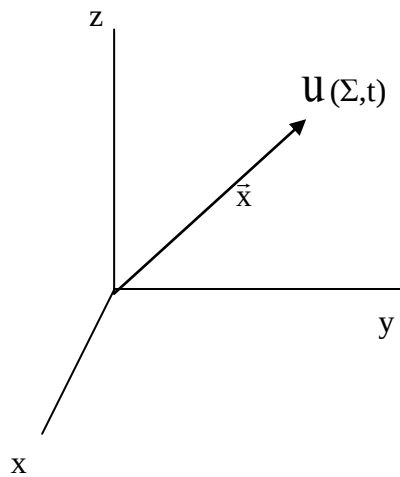
Σχήμα 2.34

Στην περίπτωση αυτή αντί συνεχών τροχιών έχουμε διακριτά σημεία στο χώρο καταστάσεων που περιγράφουν την δυναμική εξέλιξη του συστήματος.

Συνεχή καταναμεμημένα στον χώρο δυναμικά συστήματα.

Τα συνεχή καταναμεμημένα στον χώρο δυναμικά συστήματα είναι γνωστά ως πεδία υλικά ή ενεργειακά.

Τα πεδία όλων των ειδών περιγράφονται μέσω δυναμικών μεταβλητών, οι οποίες είναι συναρτήσεις του χρόνου και του χώρου άρα είναι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Έστω ένα πεδίο $\mathbf{U}(\Sigma, t)$ το οποίο για κάθε σημείο του χώρου Σ και για κάθε στιγμή t έχει την τιμή $\mathbf{U}$



Το πεδίο ορίζεται σε ευρεία περιοχή του χώρου

$$\mathbf{U}(\vec{X}, t) = \mathbf{U}(\Sigma, t)$$

$$\vec{X} = (x, y, z)$$

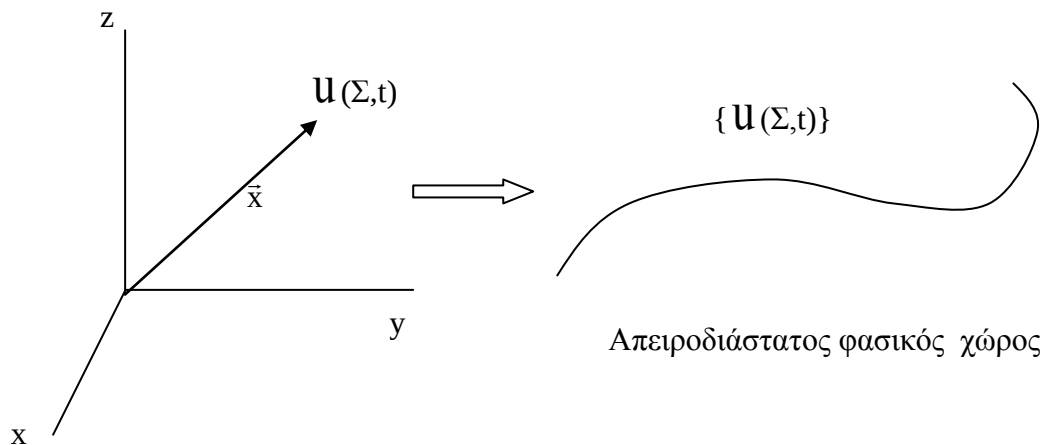
$$\mathbf{U}(\Sigma, t) = (x, y, z, t)$$

Σχήμα 2.35

Το πεδίο $\mathbf{U}(\Sigma, t)$ μπορεί να είναι βαθμωτό ή διανυσματικό. Το πεδίο κατανέμεται συνεχώς σε κάθε σημείο πεπερασμένου χώρου V . Για να γνωρίζουμε το πεδίο στον χώρο V πρέπει να το γνωρίζουμε κάθε χρονική στιγμή σε κάθε σημείο Σ του V και επειδή έχουμε άπειρα σημεία στον V θα έχουμε κάθε στιγμή άπειρο πλήθος μεγεθών.

$$(\Sigma, t) \Rightarrow (t, \vec{X}) \Rightarrow \mathbf{U}(\vec{X}, t)$$

Επομένως ο φυσικός χώρος ενός πεδίου που κατανέμεται συνεχώς στο χώρο είναι απειροδιάστατος αφού για κάθε σημείο του χώρου, έχουμε ένα δυναμικό μέγεθος έτσι ώστε οι βαθμοί ελευθερίας του πεδίου να είναι άπειροι. Σχηματικά η κατάσταση ενός πεδίου είναι



$$K_u(t) = \{u_\Sigma(t), u_{\Sigma'}(t), u_{\Sigma''}(t), \dots = u(\vec{x}, t) \forall \vec{x} \in \text{χώρο } V$$

Σχήμα 2.36

Η χρονική εξέλιξη της κατάστασης του πεδίου στον χώρο καταστάσεων περιγράφεται μέσω εξισώσεων της μορφής

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = F\left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \bar{x}^2}, \dots\right)$$

όπου τα $\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \bar{x}^2}, \dots$, συμβολίζουν τις μερικές παραγώγους του $\mathbf{u}$, ως προς τις μεταβλητές (x, y, z) . Συγκεκριμένες περιπτώσεις πεδίων θα περιγράψουμε στα επόμενα κεφάλαια.

2.5 Ανάλυση Fourier

Η ανάλυση Fourier είναι βασικό εργαλείο μελέτης των φυσικών φαινομένων καθόσον μας επιτρέπει να αναλύσουμε κάθε συνάρτηση σε άπειρο άθροισμα απλών περιοδικών συναρτήσεων. Συνοψίζοντας έχουμε τα ακόλουθα :

Κάθε συνάρτηση μιας μεταβλητής $f(x)$ που ορίζεται στο πεπερασμένο διάστημα $0 < x < L$ γράφεται

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{2\pi n x}{L} + B_n \eta \mu \frac{2\pi n x}{L}$$

Ή χρησιμοποιώντας το θεώρημα των μιγαδικών αριθμών:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \eta \mu \theta$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{i 2\pi n x}{L}}$$

$$\text{όπου } a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{i 2\pi n x}{L}} dx$$

Εάν το διάστημα $(0, L)$ επεκταθεί στο $(0, \infty)$, δηλαδή το $L \rightarrow \infty$ τότε το ανωτέρω θεώρημα παίρνει την μορφή:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy$$

Για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών το θεώρημα Fourier παίρνει την μορφή:

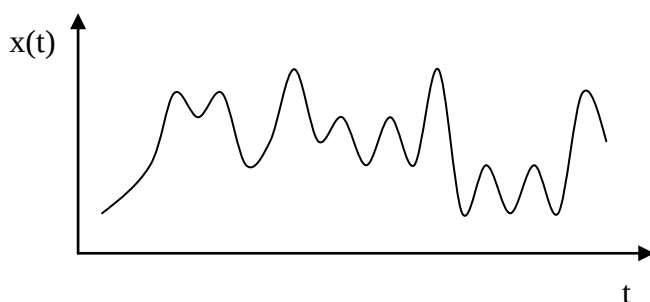
$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} d\vec{k}, \quad d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$$

$$\varphi(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d\vec{x}, \quad d\vec{x} = dx dy dz$$

όπου $f(\vec{x}) = f(x,y,z)$ η αρχική συνάρτηση, $\varphi(\vec{k}) = \varphi(k_x, k_y, k_z)$ ο μετασχηματισμός Fourier της $f(\vec{x})$ και $\vec{k}\vec{x} = k_x x + k_y y + k_z z$.

2.6 Χρονοσειρές

Χρονοσειρά ονομάζουμε κάθε χρονική αλληλουχία μετρήσεων ενός σήματος $x(t)$ που αντιστοιχεί σε κάποιο μετρούμενο φυσικό μέγεθος.



Σήμα από ένα μετρούμενο φυσικό μέγεθος υπό μορφή χρονοσειράς

Σχήμα 2.37

Βάσει του θεωρήματος Fourier εάν η χρονοσειρά $x(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με περίοδο T τότε το $x(t)$ γράφεται ως άθροισμα περιοδικών συναρτήσεων της μορφής:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{\omega_n} e^{\frac{i\omega_n t}{L}}$$

$$c_{\omega_n} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-\frac{i\omega_n t}{L}} dt = \text{πλάτη Fourier}$$

$$\text{όπου } x(t+T) = x(t) \text{ και } \omega_n = n\omega_0 = \frac{2\pi}{T} n, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Τα c_{ω_n} ονομάζονται πλάτη Fourier και τα ω_n συχνότητες Fourier.

Το τετράγωνο των πλατών Fourier c_{ω_n} ονομάζεται φάσμα ισχύος του σήματος $x(t)$.

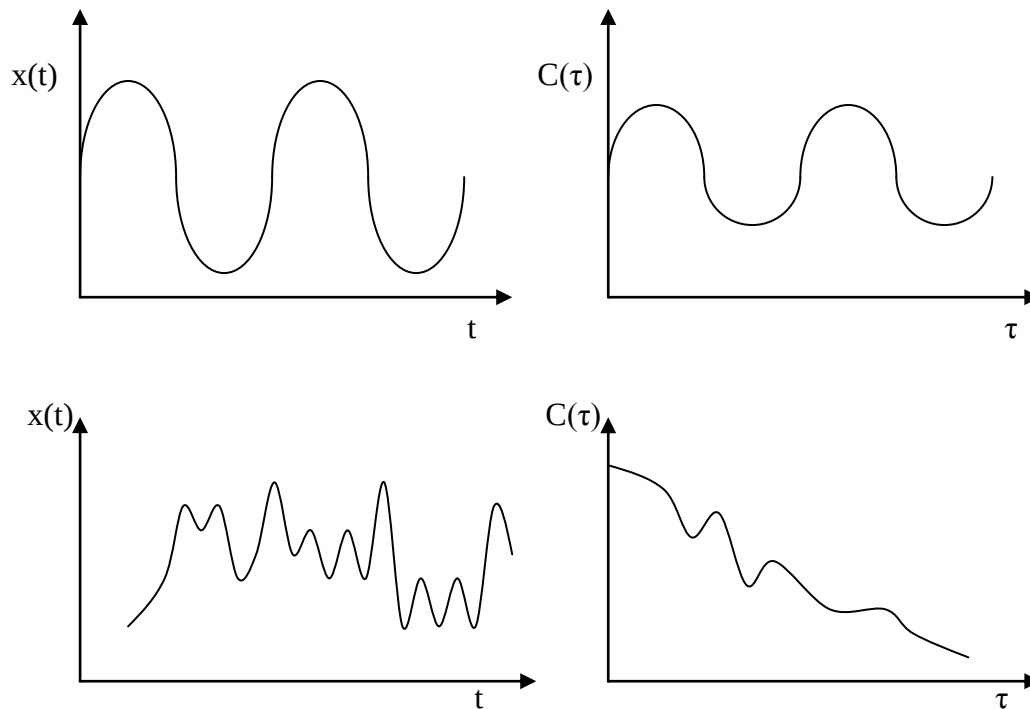
Το φάσμα ισχύος για περιοδικές συναρτήσεις (περιοδικά σήματα) είναι διακριτό και για μη περιοδικά σήματα είναι συνεχές.

Η συσχέτιση $C(\tau)$ ενός σήματος ορίζεται από την σχέση:

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

Η συσχέτιση $C(\tau)$ μετρά την συσχέτιση της τιμής ενός σήματος τη στιγμή t και της τιμής του μετά από χρόνο τ δηλαδή τη στιγμή $t+\tau$.

Για τα περιοδικά σήματα έχουμε υψηλή συσχέτιση ενώ για τα μη περιοδικά η συσχέτιση μηδενίζεται γρήγορα.



Σχήμα 2.38

Το φάσμα ισχύος $P(\omega)$ ενός σήματος αποδεικνύεται ότι αποτελεί τον μετασχηματισμό Fourier της συσχέτισης, σύμφωνα με την σχέση:

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = |c_w|^2 = \text{τετράγωνο του πλάτους Fourier}$$

Ένα σήμα μπορεί να χαρακτηρίζεται από πολλές ανεξάρτητες μεταξύ τις περιόδους

$$T_1, T_2, \dots, T_n \text{ και συχνότητες } \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}, \dots, \omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$$

Αυτό συμβαίνει όταν τα $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ δεν συνδέονται μεταξύ των με ρητές σχέσεις, δηλαδή δεν υπάρχει μια θεμελιώδη συχνότητα πολλαπλάσια της οποίας είναι τα ω_i . Τότε το σήμα είναι ημιπεριοδικό και εμφανίζει πολλές και ανεξάρτητες περιοδικότητες σύμφωνα με την σχέση

$$x(\omega_1 t + 2\pi, \omega_2 t + 2\pi, \dots, \omega_n t + 2\pi) = x(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_n t)$$

2.7 Στοχαστικές διαδικασίες.

Εάν ένα σήμα είναι περιοδικό δηλαδή μετά από χρόνο T ξαναπαίρνει ίδιες τιμές,

$$x(t+T) = x(t)$$

τότε το σήμα είναι ντετερμινιστικό και η μεταβλητή $x(t)$ είναι κάθε στιγμή μία βεβαία μεταβλητή. Αντίθετα ένα σήμα $x(t)$ μη περιοδικό ($T=\infty$) δεν επαναλαμβάνει ποτέ τον εαυτό του με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατόν με όση γνώση και αν έχουμε για τις προηγούμενες τιμές του να γνωρίζουμε τις μελλοντικές του τιμές. Στην περίπτωση αυτή για κάθε στιγμή t το σήμα αντιστοιχεί σε μία τυχαία μεταβλητή $X(t)$ και η χρονική εξέλιξη σήματος είναι μία στοχαστική διαδικασία.

Μια τυχαία μεταβλητή X περιγράφει την κατάσταση εκείνη όπου οι τιμές x της X λαμβάνονται από μια περιοχή τιμών με τυχαίο τρόπο όπως π.χ. το αποτέλεσμα ενός ζαριού προκύπτει με τυχαίο (απρόβλεπτο) τρόπο. Πριν δηλαδή τη ρίψη του ζαριού είναι αδύνατον να γνωρίζουμε το αποτέλεσμα της ρίψης του.

Έτσι για μια τυχαία μεταβλητή πριν την μέτρησή της δεν μπορούμε να γνωρίζουμε το αποτέλεσμα της μέτρησής της. Στις περιπτώσεις των τυχαίων μεταβλητών μπορούμε να γνωρίζουμε μόνον την πιθανότητα $P(x)$ να παρατηρήσουμε την τιμή x μέσα από το σύνολο των δυνατών – πιθανών τιμών της X .

Εάν το διάστημα τιμών της τυχαίας μεταβλητής είναι διακριτό

$$\begin{array}{ccc} \text{Τυχαία μεταβλητή} & \Longrightarrow & \text{διακριτό πεδίο τιμών} \\ X & & X_1, X_2, \dots, X_k \end{array}$$

Τότε ορίζεται η πιθανότητα $P(x_i)$ κάθε τιμής x_i της τυχαίας μεταβλητής X

$$\text{Τιμή } x_i \text{ της τυχαίας μεταβλητής} \Rightarrow P(x_i) = \text{πιθανότητα}$$

Εάν τα πεδίο τιμών είναι συνεχές :

$$\begin{array}{ccc} \text{Τυχαία μεταβλητή} & \Longrightarrow & \text{συνεχές πεδίο τιμών} \\ X & & x \in [\alpha, b] \subset \mathbb{R} \end{array}$$

Τότε ορίζουμε την πυκνότητα πιθανότητας $P(x)$ έτσι ώστε

$$\text{Πιθανότητα η } X \text{ να πάρει τιμές στο διάστημα } [x, x+dx] = P(x)dx$$

Στην πρώτη περίπτωση διακριτών τιμών ισχύει $\sum P_i = \sum P(x_i) = 1$

Και στην δεύτερη (συνεχείς τιμές) ισχύει $\int_a^b P(x)dx = 1$

Η μέση τιμή $\langle X \rangle$ μιας τυχαίας μεταβλητής ορίζεται από τη σχέση :

$$\langle X \rangle = \int xP(x)dx$$

Η διακύμανση (variance) V της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως η μέση τιμή του τετραγώνου της διαφοράς από την μέση τιμή της X .

$$\text{Var}(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \int (X - \langle X \rangle)^2 P(x)dx$$

Η διακύμανση ικανοποιεί τη σχέση

$$\text{Var}(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

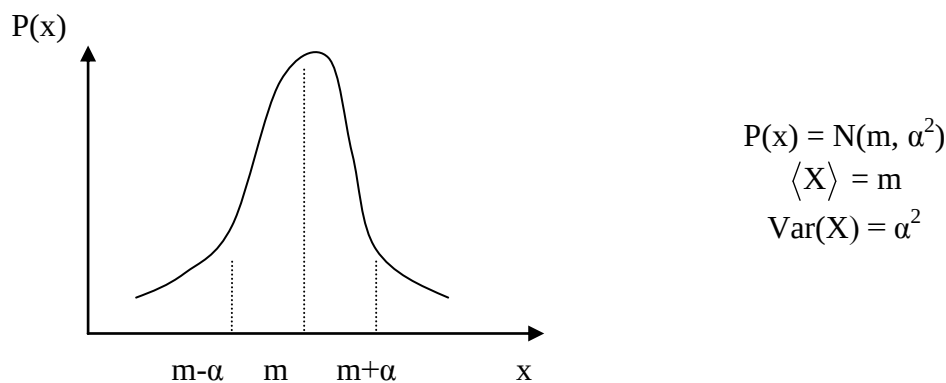
Η Τυπική απόκλιση SD της τυχαίας μεταβλητής X δίδεται από τη σχέση

$$\text{SD}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Μια συνήθης περίπτωση τυχαίας μεταβλητής είναι εκείνη της οποίας η πυκνότητα πιθανότητας δίδεται από την σχέση

$$P(x) = \frac{1}{(2\pi\alpha^2)^{1/2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\alpha^2}}$$

γνωστή ως Γκαουσιανή κατανομή.



Σχήμα 2.39

Μία στοχαστική διαδικασία αντιστοιχεί σε ένα φυσικό φαινόμενο (στοχαστικό δυναμικό σύστημα) το οποίο κάθε στιγμή περιγράφεται από μία τυχαία μεταβλητή $X(t)$, ή από ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών:

$$\vec{X} = X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)$$

Για ευκολία ακολούθως θεωρούμε συστήματα με μια μόνο τυχαία μεταβλητή. Η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ ορίζει την κατάσταση του συστήματος την στιγμή t , έτσι ώστε για κάθε στιγμή t η κατάσταση του στοχαστικού συστήματος περιγράφεται από την πυκνότητα πιθανότητας που αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή $X(t)$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Κατάσταση στοχαστικού} & \longrightarrow & P(x, t) \\ \text{συστήματος } X(t) & & \end{array}$$

Μία κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών με μεγάλη εφαρμογή είναι οι Μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες.

Στοχαστικές διαδικασίες Markov

Μια στοχαστική διαδικασία περιγράφεται εν γένει από την πυκνότητα πιθανότητας να έχουμε την στιγμή t την τιμή X δεδομένου ότι είχαμε την τιμή X' τη στιγμή t' . Εάν η πιθανότητα αυτή δεν εξαρτάται από χρονικές στιγμές πριν την t' , τότε έχουμε Μαρκοβιανή στοχαστική διαδικασία. Στην περίπτωση αυτή η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$ δίδεται από την σχέση

$$P(x, t) = \int w(x, t/x', t') P(x', t') dx'$$

2.8 Αυτόματα, φράκταλ και πολυπλοκότητα

Συστήματα

Ο κόσμος που παρατηρούμε γύρω μας είναι ένας κόσμος μορφών σε όλα τα επίπεδα από το μικροσκοπικό μέχρι το μακροσκοπικό. Στοιχειώδη σωματίδια, άτομα, μόρια, μακρομόρια, κύτταρα, οργανισμοί (συστήματα) κυττάρων, φυτά, ζώα, οικοσυστήματα αποτελούμενα από φυτικούς και ζωικούς οργανισμούς, πλανήτες, άστρα, γαλαξίες κ.ο.κ. Οι κοσμικές μορφές δεν είναι στατικές αλλά δυναμικές εξελισσόμενες με τον χρόνο, ενώ όλες οι μορφές πραγμάτων που περιέχονται στην φυσική πραγματικότητα συναποτελούν ένα όλο, το σύμπαν, το οποίο αποτελεί το πλέον πολύπλοκο σύστημα. Το σύμπαν είναι μια δυναμική πραγματικότητα με πολύπλοκο πλέγμα διασυνδέσεων και συσχετίσεων σε όλα τα επίπεδα. Ένα πολύπλοκο σύστημα σ περιέχει επιμέρους στοιχεία $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$.

$$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup, \dots, \cup \sigma_N.$$

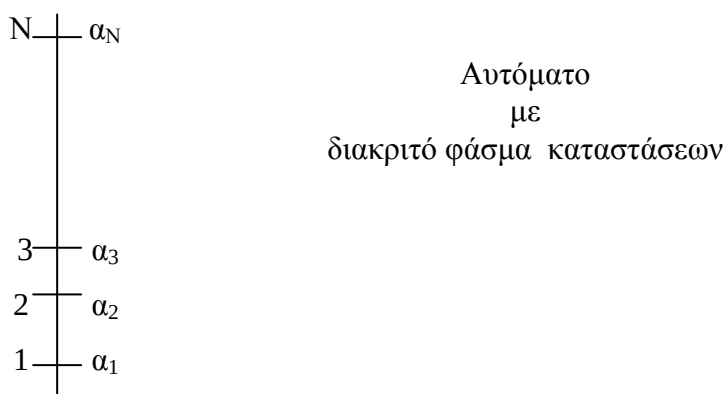
Με την σειρά του κάθε υποσύστημα σ_i του αρχικού συστήματος σ αποτελεί ένα νέο πολύπλοκο σύστημα αποτελούμενο από νέα στοιχεία $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{iN}$ Κ.ΟΚ.

$$\sigma_i = \sigma'_1 \cup \sigma'_2 \cup, \dots, \cup \sigma'_n$$

Τα επιμέρους στοιχεία ενός πολύπλοκου συστήματος αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, έτσι ώστε η κατάσταση του αρχικού συστήματος να καθορίζεται κάθε στιγμή από την διαρκή αλληλεπίδραση των μερών του. Η αναγωγική επιστήμη που κυριαρχούσε παλιότερα υποστήριζε ότι κάθε πολύπλοκο σύστημα αναλύεται τελικώς σε θεμελιώδη συστατικά (στοιχεία) και θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των θεμελιωδών στοιχείων που περιγράφονται μαθηματικά μέσω θεμελιωδών εξισώσεων. Σήμερα η επιστήμη της πολυπλοκότητας έχει απομακρυνθεί από αυτή την απλοϊκή αναγωγική αντίληψη. Ο παλιός αναγωγισμός του σύνθετου στο απλό έχει αντικατασταθεί από την θεμελιώδη αρχή της αυτοοργάνωσης ενός πολύπλοκου συστήματος. Σύμφωνα με την αρχή αυτή ένα σύνολο στοιχείων μπορεί να συντονίζεται και να αυτοοργανώνεται παράγοντας μια τάξη – δομή και να αναπτύσσει πολλαπλά είδη συσχετίσεων και συντονισμών. Επίσης, ένα επίπεδο αυτοοργάνωσης δεν μπορεί να αναχθεί σε ένα χαμηλότερο επίπεδο το οποίο περιέχει. Δηλαδή εάν ένα σύστημα $\{\sigma_i\}$ που περιέχει τα υποσυστήματα $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ υπόκειται σε συντονισμό και συσχετίσεις των μερών του, τότε η αυτοοργάνωση των στοιχείων σ_i δεν εξηγείται από λειτουργίες αυτοοργάνωσης στο κατώτερο επίπεδο που λαμβάνουν χώρα σε κάθε υποσύστημα σ_i . Σύμφωνα με τα ανωτέρω κάθε σύστημα σ που περιέχει ως μέρη του τα υποσυστήματα $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ εκτός από τα υποσυστήματα περιέχει και ένα σχέδιο που καθορίζει τις αλληλεπιδράσεις των υποσυστημάτων του. Το σχέδιο αυτό μολονότι καθορίζει τις αλληλεπιδράσεις και τους συντονισμούς των υποσυστημάτων μέσα στο αρχικό σύστημα σ , δεν απορρέει από τα υποσυστήματα $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ αλλά αποτελεί το επιπλέον το οποίο εισάγεται με την λειτουργία αυτοοργάνωσης των υποσυστημάτων μέσα στο αρχικό σύστημα σ . Βάση αυτών συμπαιρνουμε ότι το σύστημα σ δεν είναι απλώς το άθροισμα των μερών του καθώς και ότι τα υποσυστήματα που είναι μέρη του αρχικού αποτελούν άλλη πραγματικότητα μέσα στο σύστημα και διαφορετική πραγματικότητα όταν είναι απομονωμένα εκτός του συστήματος. Αυτό σημαίνει πλήρης ανατροπή του αναγωγικού τρόπου ερμηνείας της φυσικής πραγματικότητας που είχε επικρατήσει στο παρελθόν.

Αυτόματα

Η θεωρία αυτομάτων είναι μια ευρεία μαθηματική θεωρία που μας επιτρέπει να μοντελοποιούμε την λειτουργία των πολύπλοκων συστημάτων ανεξάρτητα από το επίπεδο αυτοοργάνωσής των. Ο προηγούμενος τρόπος μοντελοποίησης ενός πολύπλοκου συστήματος στηριζόταν στην έννοια του διακριτού σωματιδίου ή του συνεχούς μέσου και στην αξιοποίηση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων ή εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Η μοντελοποίηση της πολυπλοκότητας μέσω αυτομάτων είναι ένας ευρύτερος μαθηματικός τρόπος που μπορεί να συμπεριλάβει πολύ περισσότερα φαινόμενα. Η έννοια του αυτομάτου ξεκινά με ένα οποιοδήποτε σύστημα το οποίο μπορεί να ευρεθεί σε ένα σύνολο διακριτών καταστάσεων $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ είτε πεπερασμένων είτε απείρων.



Σχήμα 2.40

Στο παραπάνω σχεδιάγραμμα παρουσιάζουμε συμβολικά ένα αυτόματο το οποίο περιέχει N διακριτές καταστάσεις που περιγράφονται με ακέραιους αριθμούς. Το αυτόματο μπορεί από στιγμή σε στιγμή να μεταβάλλει τις εσωτερικές του καταστάσεις είτε με τρόπο ντετερμινιστικό ή με στοχαστικό τρόπο. Αν υποθέσουμε ότι σε διακριτές χρονικές στιγμές:

$$t_1 = dt, t_2 = 2dt, \dots, t_N = Ndt,$$

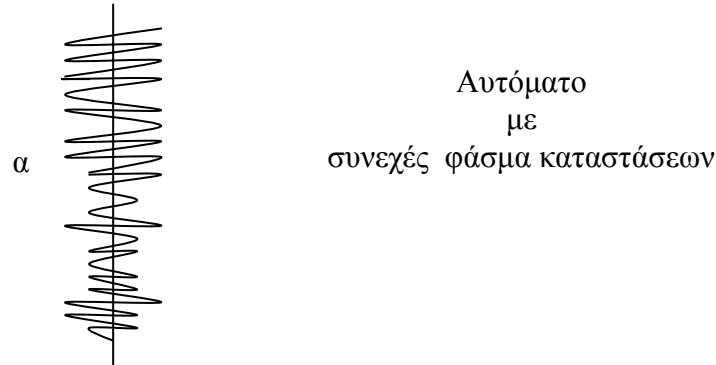
το αυτόματο βρίσκεται κάθε φορά σε μία από τις δυνατές καταστάσεις του τότε για το ντετερμινιστικό αυτόματο ισχύει η σχέση

$$\alpha_{n+1} = F(\alpha_n), \quad \alpha_n = \alpha(t_n), \quad \alpha_{n+1} = \alpha(t_{n+1}),$$

όπου α_n είναι η κατάσταση του αυτομάτου την χρονική στιγμή t_n και $F(\alpha_n)$ μια συνάρτηση που συνδέει την επόμενη από την προηγούμενη κατάσταση. Εδώ θεωρούμε ότι το αυτόματο δεν έχει μνήμη ώστε η τωρινή του κατάσταση να εξαρτάται μόνο από την προηγούμενη κατάσταση. Αντίστοιχα για ένα αυτόματο με μνήμη θα ισχύει

$$\alpha_{n+1} = F(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots)$$

Σε ένα αυτόματο μπορούμε να έχουμε αντί διακριτό συνεχές φάσμα καταστάσεων.



Σχήμα 2.41

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι οι καταστάσεις του αυτομάτου είναι τόσο πυκνές ώστε να περιγράφονται με ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Η δυναμική εξέλιξη ενός συνεχούς αυτομάτου περιγράφεται πάλι από την εξίσωση :

$$\alpha_{n+1} = F(\alpha_n) \text{ όπου } \alpha_n \in \mathbb{R}$$

Εάν το βήμα του χρόνου Δt είναι πολύ μικρό η δυναμική του αυτομάτου παίρνει την μορφή συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$\alpha(t + \delta t) = \alpha(t) + f[\alpha(t)]\delta t +$$

από την οποία προκύπτει:

$$\frac{d\alpha}{dt} = f(\alpha(t)) \text{ ή } \dot{\alpha} = f(\alpha)$$

Η κατάσταση ενός αυτομάτου είναι δυνατόν να περιγράφεται με περισσότερες από μιας μεταβλητές $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m)$ που αποτελούν το διάνυσμα κατάστασης:

$$\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m)$$

Αντίστοιχα η δυναμική του αυτομάτου περιγράφεται από τη διανυσματική σχέση:

$$\vec{\alpha}(n+1) = \vec{F}(\vec{\alpha}(n))$$

που συνδέει τις επόμενες με τις προηγούμενες καταστάσεις.

Αντίστοιχα για αυτόματο με συνεχές φάσμα καταστάσεων και συνεχή χρόνο η δυναμική περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{f}(\vec{a})$$

Για να αξιοποιήσουμε την θεωρία αυτομάτων στην μοντελοποίηση της πολυπλοκότητας εισάγουμε την έννοια του δικτύου αυτομάτων. Ένα δίκτυο αυτομάτων περιλαμβάνει ένα πλήθος αυτομάτων που αριθμούνται με κάποιο δείκτη $j=1,2,\dots$ ή στην περίπτωση συνεχούς κατανομής των αυτομάτων έχουμε συνεχή δείκτη $\vec{r}$. Η δυναμική του δικτύου περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\alpha_j(n+1) = G[\alpha_j(n), \{\alpha_{j'}(n)\}] \quad \text{με} \quad \alpha_j(n) = \alpha_j(t_n)$$

όπου α_j το j στοιχείο του δικτύου και j' το πλήθος των γειτονικών στο j στοιχείων (αυτομάτων). Εάν το δίκτυο του αυτομάτου έχει συνεχή κατανομή και το βήμα Δt του χρόνου είναι απειροστό τότε η δυναμική του δικτύου παίρνει την μορφή διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = G[\alpha(\vec{r}_1, t), \nabla^2 \alpha(\vec{r}_1, t), \dots,]$$

όπου $\alpha(\vec{r}_1, t)$ η συνεχής κατανομή του δικτύου και $\vec{r}$ ο συνεχής δείκτης που περιγράφει την κατανομή.

Τα αυτόματα μπορούν να παράγουν αυτόματες μορφές φράκταλ με κλασματική διάσταση, όπως ακριβώς οι δομές που παρατηρούμε στον πραγματικό κόσμο.

2.9 Φράκταλ

Ο Mandlebrot έλεγε: «ο κόσμος δεν αποτελείται από σημεία, σφαίρες και τετράγωνα». Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία όλα τα σχήματα ανάγονται σε σημεία που είναι απλά χωρίς όγκο. Ένα σημείο που κινείται στο χώρο δημιουργεί μια γραμμή, μια γραμμή που κινείται στο χώρο δημιουργεί μια επιφάνεια και μια επιφάνεια κινούμενη στον χώρο δημιουργεί ένα στερεό. Έτσι όλα τα φυσικά αντικείμενα μπορούμε να τα θεωρήσουμε πως κατασκευάζονται από απλά συστατικά που είναι τα σημεία, οι γραμμές, οι επιφάνειες και τα στερεά. Το σημείο έχει διάσταση μηδέν, η γραμμή έχει διάσταση ένα, η επιφάνεια διάσταση δύο, το στερεό διάσταση τρία. Ο Mandlebrot δημιούργησε την φράκταλ γεωμετρία στην οποία περιγράφονται αντικείμενα με κλασματική διάσταση. Έτσι ένα σύνολο σημείων που δεν γεμίζει επαρκώς μια γραμμή έχει διάσταση μικρότερη από ένα ή ένα σύνολο σημείων που δεν γεμίζει επαρκώς μια επιφάνεια έχει διάσταση μικρότερη από δύο ή μικρότερη από

τρία εάν δεν γεμίζει επαρκώς ένα στερεό. Επιπλέον τα φράκταλ αντικείμενα συχνά έχουν το χαρακτηριστικό της αυτοομοιότητας σύμφωνα με την οποία μεγενθύνοντας ένα μέρος του φράκταλ αντικειμένου ανακαλύπτουμε μια πολύπλοκη δομή που ομοιάζει με το αρχικό αντικείμενο. Έτσι, καταλαβαίνουμε ότι τα φράκταλ αντικείμενα δεν αποτελούνται από απλά σημεία αλλά από πολύπλοκες δομές μέσα σε δομές. Τα φράκταλ αντικείμενα μπορούν να παραχθούν από κατανεμημένα αυτόματα. Όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, η δυναμική ενός κατανεμημένου αυτομάτου προσομιώνει φυσικές λειτουργίες, όπως είναι η μεταφορά ύλης ή ενέργειας, δημιουργία ή καταστροφή μορίων ή χημικών ενώσεων ή η γένεση ή καταστροφή πολύπλοκων οργανισμών μέσα σε ένα πολύπλοκο οικοσύστημα. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις συναντούμε δομές φράκταλ που παράγονται από φυσικές λειτουργίες που προσομιώνουν τα αυτόματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΠΟΛΥΠΛΟΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

3.1. Γενικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε την ντετερμινιστική περιγραφή των πολύπλοκων συστημάτων. Ο ανθρώπινος νους αντιλαμβάνεται ποιότητες και ποσότητες. Οι ποιότητες είναι το λευκό ή το μαύρο, το θερμό ή το ψυχρό, το όμορφο ή το άσχημο, το καλό ή το κακό. Ποσότητα είναι ό,τι μπορεί να γίνεται μεγαλύτερο ή μικρότερο, περισσότερο ή λιγότερο. Ποσότητα είναι το μήκος, το εμβαδόν, ο όγκος, η μάζα, η θερμοκρασία, το πλήθος μιας ομάδας ομοειδών πραγμάτων κ.λ.π. Οι ποσότητες περιγράφονται με τους ακεραίους, τους ρητούς, τους άρρητους και τους πραγματικούς. Οι ποσότητες περιγράφονται από τα φυσικά μεγέθη που είναι διακριτά: όσα αποτελούνται από ξεχωριστές μονάδες και δεν μπορούν να ελαττωθούν ή να αυξηθούν λιγότερο από μία μονάδα και τα συνεχή μεγέθη που μπορούν να ελαττώνονται ή να αυξάνονται κατά οσοδήποτε μικρές (απειροστές) ποσότητες (dx). Ένα σύνολο διαφορετικών μεγεθών κάτω από ορισμένες συνθήκες μπορεί να αποτελεί ένα διάνυσμα x .

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ ονομάζονται συνιστώσες του διανύσματος $\vec{x}$. Οι συνιστώσες ενός διανύσματος μπορεί να είναι πεπερασμένες ή άπειρες, όπως π.χ. τα διανύσματα $ket | >$ ενός συναρτησιακού χώρου.

$$| \alpha > = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$$

Ακόμη είναι δυνατόν πολλά απλά μεγέθη να αποτελούν έναν πίνακα ή έναν τανυστή.

$$A^{mn} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1m} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2m} \\ \vdots \\ \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A^{mn} έχει m γραμμές και n στήλες.

Ο τανυστής είναι ακόμα πιο σύνθετο μέγεθος.

$$T^{m,n,k} = \begin{pmatrix} T^{111} & T^{121} & \dots \\ T^{211} & \dots & \\ . & & \\ . & & \\ . & & \end{pmatrix}$$

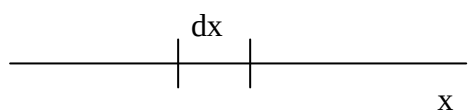
Εάν ένα μέγεθος y εξαρτάται από ένα άλλο μέγεθος x τότε έχουμε συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$y = f(x)$$

Το y μπορεί να είναι απλό (βαθμωτό) μέγεθος, διάνυσμα ή τανυστής. Αν ένα μέγεθος εξαρτάται από πολλές μεταβλητές τότε έχουμε συνάρτηση πολλών μεταβλητών.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Τα μεγέθη μπορούν να υπόκεινται σε πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης (+, -, ·, /) έτσι ώστε από ένα, δύο ή περισσότερα μεγέθη να παράγονται νέα μεγέθη ομοειδή ή ετεροειδή. Ένα συνεχές μέγεθος μπορεί να θεωρείται άθροισμα (ολοκλήρωμα) απειροστών μεγεθών.



$$x = \int dx$$

Σχήμα 3.1

Στην περίπτωση που ένα μέγεθος εξαρτάται από άλλο μέγεθος τότε ορίζεται ο ρυθμός μεταβολής (παράγωγος) του πρώτου ως προς το δεύτερο και αποτελεί νέο μέγεθος.

$$y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Η παράγωγος ορίζεται σε κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η παράγωγος και το ολοκλήρωμα συνδέονται άμεσα ως εξής

$$F(x) = \int y dx = \int f dx \quad \text{αόριστο ολοκλήρωμα}$$

$$\frac{dF}{dx} = f(x), \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) \quad \text{ορισμένο ολοκλήρωμα}$$

Δηλαδή η παράγωγος του αορίστου ολοκληρώματος (F) μίας συνάρτησης ισούται με την συνάρτηση αυτή, και το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης ισούται με την διαφορά του αορίστου ολοκληρώματος στα όρια ολοκλήρωσης. Ένα ξεχωριστό φυσικό μέγεθος το οποίο διαρκώς αυξάνεται χωρίς να μπορεί ποτέ να ελαττωθεί (αντιστραφεί) είναι ο χρόνος (t).

Η φύση και τα φυσικά συστήματα εξελίσσονται στον χρόνο. Έτσι τα φυσικά μεγέθη εν γένει μεταβάλλονται με τον χρόνο και αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου. Μεταβλητά στον χρόνο μεγέθη π.χ. είναι το διανυόμενο μήκος και η θέση ενός κινούμενου στον χώρο σώματος, η πυκνότητα ενός ρευστού, η θερμοκρασία, κ.λ.π. Τα φυσικά μεγέθη μονόμετρα, διανυσματικά ή ό,τι άλλο, μεταβαλλόμενα με τον χρόνο ικανοποιούν μία μαθηματική συνάρτηση

$$\begin{array}{ccc} y=f(t) & & y = \text{φυσικό μέγεθος} \\ \text{ή} & \Longrightarrow & t = \text{χρόνος} \\ y = y(t) & & \end{array}$$

Στην περίπτωση διανυσματικού μεγέθους κάθε συνιστώσα του θα είναι συνάρτηση ως προς τον χρόνο:

$$\begin{aligned} \vec{X} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vec{X} &= \vec{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

Ένα πολύπλοκο σύστημα όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορεί να μεταβάλλει στον χρόνο την φυσική του κατάσταση. Για να περιγράψουμε την εξέλιξη του συστήματος χρησιμοποιούμε τον ρυθμό μεταβολής της κατάστασής του,

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$$

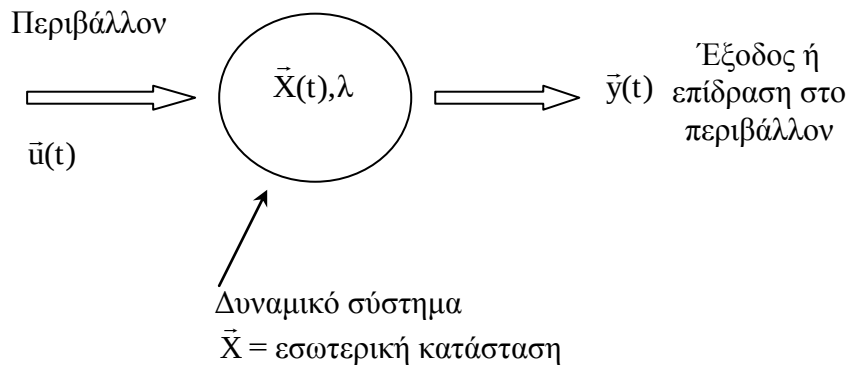
διότι εάν γνωρίζουμε τον ρυθμό μεταβολής της κατάστασης x ως προς τον χρόνο τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το μέλλον από το παρελθόν μέσω ολοκλήρωσης:

$$\Delta \vec{X} = \int d\vec{X} = \int \vec{F} dt = \vec{X}(t) - \vec{X}(t_0)$$

$$\text{ή } \vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{F} dt$$

$$\text{ή } X_i(t) = X_i(t_0) + \int_{t_0}^t F_i dt, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Στο κατωτέρω σχήμα παρουσιάζουμε σε γενική μορφή την ντετερμινιστική μοντελοποίηση ενός πολύπλοκου συστήματος



Σχήμα 3.2

Το σύστημα περιγράφεται από την δυναμική της εσωτερικής του κατάστασης $x(t)$ ενώ δέχεται μία επίδραση $u(t)$ από το περιβάλλον. Η επίδραση u του περιβάλλοντος μπορεί να οφείλεται σε εξωτερικές δυνάμεις ή σε ροή ύλης-ενέργειας από το περιβάλλον. Η έξοδος $y(t)$ μπορεί να αντιστοιχεί αντίστοιχα σε ροή ύλης-ενέργειας ή να αντιστοιχεί σε κάποιο παρατηρούμενο αποτέλεσμα επί του συστήματος. Γενικά η μαθηματική μοντελοποίηση δίδεται από τις σχέσεις:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = F(\vec{X}, \vec{u}, \lambda)$$

$$\vec{Y} = f(\vec{X}, \vec{u}, \lambda)$$

Εάν ο χρόνος θεωρηθεί διακριτός τότε η μοντελοποίηση του πολύπλοκου συστήματος παίρνει την μορφή:

$$\vec{X}_{n+1} = F(\vec{X}_n, \vec{u}_n, \lambda)$$

$$\vec{Y}_{n+1} = f(\vec{X}_n, \vec{u}_n, \lambda)$$

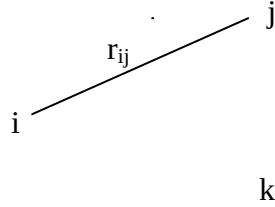
όπου $t_1, t_2, \dots, t_n = n\Delta t$ οι χρόνοι παρατήρησης. Το ανωτέρω πολύπλοκο σύστημα μπορεί να περιγράψει ένα σύστημα φυσικό (σύνολο υλικών σωματιδίων), ένα χημικό σύστημα (σύνολο χημικών μορίων), ένα σύνολο κυττάρων-οργάνων (όργανα ή ζωντανός οργανισμός), ένα μέρος του οικοσυστήματος (πληθυσμός έμβιων όντων), το νευρικό σύστημα (σύνολο νευρώνων), του εγκεφάλου, ένα οικονομικό σύστημα (σύνολο αγορών), ένα κοινωνικό σύστημα (σύνολο πολιτών ή οργανισμών), ένα τεχνικό σύστημα (ανθρώπινες κατασκευές), κ.ο.κ.

3.2 Η σωματιδιακή μοντελοποίηση της πολυπλοκότητας

Η σωματιδιακή μοντελοποίηση της πραγματικότητας και πολυπλοκότητας προσπαθεί να ανάγει όλα τα παρατηρούμενα φαινόμενα και τις μακροσκοπικές ιδιότητες ενός πολύπλοκου συστήματος σε απλές μηχανικές ιδιότητες των σωμάτων-σωματιδίων που αποτελούν ή περιέχονται στο σύστημα. Έτσι ένα στερεό κομμάτι ύλης αποτελείται από άπειρο πλήθος μικρών υλικών σωματιδίων. Τα άτομα-μόρια συγκρατούνται μεταξύ τους με ηλεκτρικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των ηλεκτρικών κατανομών στα νέφη ηλεκτρονίων γύρω από τα άτομα και τα μόρια. Οι συνεκτικές αυτές δυνάμεις είναι ασθενέστερες στα υγρά ή σχεδόν ανύπαρκτες στα αέρια. Στα στερεά, τα υλικά σωματίδια που περιέχονται εκτελούν τοπικές ταλαντώσεις. Στα υγρά, εκτός των τοπικών ταλαντώσεων τα μόρια του υγρού μπορούν συγχρόνως να ρέουν μέσα στον χώρο. Στα αέρια, τα μόρια ή τα άτομα κινούνται ελεύθερα στον χώρο εκτός των στιγμών εκείνων που συγκρούονται μεταξύ των και αλλάζουν φορά κίνησης. Στα υγρά, βασικό ρόλο εκτός των εσωτερικών συγκρούσεων παίζει και η εξωτερική δύναμη της βαρύτητας, καθορίζοντας την ροή του υγρού και δημιουργώντας εσωτερική πίεση στα υγρά. Παρόμοια συμβαίνει και με τα πυκνά αέρια. Αντίθετα στα αραιά αέρια η εσωτερική πίεση οφείλεται κυρίως στην κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου. Όσον αφορά την περιγραφή των ιδιοτήτων των στερεών, των υγρών, των αερίων και των αντίστοιχων φαινομένων μας αρκεί να χρησιμοποιήσουμε δυνάμεις εξ αποστάσεως βαρύτητας, και ηλεκτρικές δυνάμεις Κουλόμπ οι οποίες μακροσκοπικά εμφανίζονται ως δυνάμεις τριβής, αντίστασης, ελαστικές τάσεις κ.λ.π. Συχνά αυτές οι μακροσκοπικές μηχανικές δυνάμεις χαρακτηρίζονται ως δυνάμεις επαφής επειδή μακροσκοπικά τα σωματίδια της ύλης είναι τόσο πυκνά και φαίνεται να έχουν επαφή το ένα με το άλλο. Μικροσκοπικά όμως γνωρίζουμε πως κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν να συμβεί αφού τα ηλεκτρόνια των εξωτερικών στιβάδων ασκούν μεταξύ τους ισχυρές απωστικές δυνάμεις κρατώντας τα άτομα σε απόσταση μεταξύ τους. Τόσο οι δυνάμεις βαρύτητας όσο και οι δυνάμεις Κουλόμπ είναι συντηρητικές δυνάμεις και γράφονται ως η βαθμίδα της αντίστοιχης δυναμικής ενέργειας:

$$\vec{F}^{\beta\alpha\rho} = -\vec{\nabla}U^{\beta\alpha\rho}, \quad \vec{F}^{(\eta\lambda)} = -\vec{\nabla}U^{\eta\lambda}$$

όπου $U^{\beta\alpha\rho}$, $U^{\eta\lambda}$ η δυναμική ενέργεια βαρύτητας και ηλεκτρική ενέργεια.



Σχήμα 3.3

Σύστημα N σωμάτων

$$U_{ij}^{\beta\alpha\rho} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}$$

$$U_{ij}^{\eta\lambda} = -\frac{GQ_i Q_j}{r_{ij}}$$

Στο σχήμα δείχνουμε δύο σώματα (i και j) του συστήματος που μελετούμε που έχουν μάζες m_i, m_j και φορτία Q_i, Q_j . Στην περίπτωση που είναι φορτισμένα οι δείκτες καταμετρούν το πλήθος N των σωμάτων του συστήματος $i, j=1,2,\dots,N$.

Στην περίπτωση αυτή οι δυνάμεις που ασκούν μεταξύ τους έχουν την μορφή

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_{ij}(U_{ij}^{\beta\alpha\rho} + U_{ij}^{\eta\lambda})$$

Όπου $\vec{\nabla}_i$ συμβολίζει την βαθμίδα $\vec{\nabla}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial z^i} \right)$ ως προς τις συντεταγμένες

x^i, y^i, z^i του διανύσματος θέσης του σωματιδίου i. Στην περίπτωση που μελετούμε δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο i του συστήματος από σώματα εξωτερικά του συστήματος έχουμε αντίστοιχα:

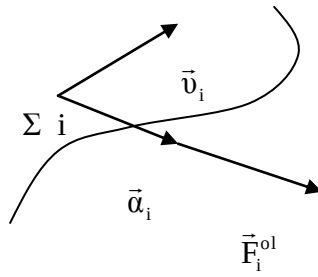
$$\vec{F}_i^{\epsilon\zeta} = -\vec{\nabla}_i U^{\epsilon\zeta}$$

όπου $U^{\epsilon\zeta}$ η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στις εξωτερικές δυνάμεις. Κάτω από την επίδραση της ολικής δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο (i), αυτό κινείται στον χώρο διαγράφοντας ορισμένη τροχιά, η οποία προκύπτει από την εξίσωση του Νεύτωνα:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{o\lambda} = \vec{F}_i^{\epsilon\zeta} + \vec{F}_i^{\epsilon\sigma\omega\tau}$$

$$\vec{F}_i^{o\lambda} = -\vec{\nabla}_i (U^{\epsilon\zeta} + U^{\epsilon\sigma}) = -\vec{\nabla}_i (U^{o\lambda})$$

$$U^{\epsilon\sigma} = -\sum_{i,j} U_{ij}^{\beta\alpha\rho} + U_{ij}^{\eta\lambda} = \text{εσωτερική ενέργεια}$$



Σχήμα 3.4

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} \hat{i} + \frac{dy_i}{dt} \hat{j} + \frac{dz_i}{dt} \hat{k}$$

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{dv_x^i}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y^i}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z^i}{dt} \hat{k}$$

$$\vec{F}_i^{\text{ol}} = m\vec{a}_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Στο σχήμα αυτό δείχνουμε για το σωματίδιο i και τη θέση του την στιγμιαία ταχύτητά του $\vec{v}_i$ (ρυθμός μεταβολής της θέσης ως προς τον χρόνο) και την στιγμιαία επιτάχυνσή του $\vec{a}_i$ πάνω σε ένα σημείο Σ της τροχιάς που ευρίσκεται την χρονική στιγμή t . Αντίστοιχα ισχύουν για τα υπόλοιπα σωματίδια. Λύνοντας για κάθε σωματίο την εξίσωση του Νεύτωνα $\vec{F}_i^{\text{ol}} = m\vec{a}_i$ μπορούμε να γνωρίζουμε κάθε στιγμή τις θέσεις, τις ταχύτητες, τις επιταχύνσεις και όλες τις άλλες μηχανικές ιδιότητες του συστήματος.

Για συντηρητικές δυνάμεις η ολική ενέργεια του συστήματος διατηρείται

$$T + U = H$$

Όπου T είναι η ολική κινητική ενέργεια, $U_{\text{ολ}}$ η ολική δυναμική και H η ολική μηχανική ενέργεια.

Στα διατηρήσιμα συστήματα η δύναμη ισούται με την βαθμίδα της δυναμικής ενέργειας έτσι ώστε να ικανοποιείται η διατήρηση της ολικής ενέργειας. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ορίζουμε μία συνάρτηση (H) γνωστή ως Χαμιλτονιανή ίση με την ολική ενέργεια:

$$H(q, p) = T + U^{\text{ολ}}$$

όπου $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ το διάνυσμα των γενικευμένων θέσεων και $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ το διάνυσμα των γενικευμένων ορμών. Από τις γενικευμένες θέσεις και ορμές μπορούμε να γνωρίζουμε τις θέσεις και τις ταχύτητες των σωματιδίων. Αντίστοιχα οι εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων παίρνουν την μορφή:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \left(\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \dots, \frac{dq_n}{dt} \right)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \left(\frac{dp_1}{dt}, \frac{dp_2}{dt}, \dots, \frac{dp_n}{dt} \right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \frac{\partial H}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n} \right)$$

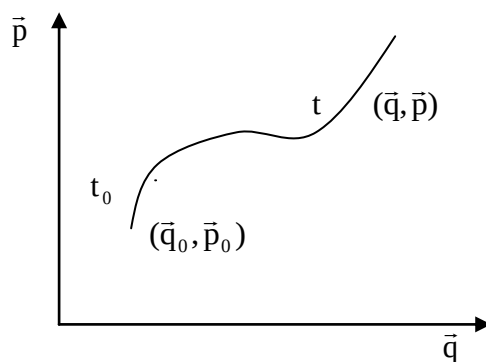
$$\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right)$$

Το n αντιστοιχεί στους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος που μπορεί να είναι ίσο ή μικρότερο από $6N$ όπου N ο ολικός αριθμός των σωματιδίων. Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως εξισώσεις κίνησης του Hamilton και ισχύουν για διατηρήσιμα (conservative) συστήματα:

H = ολική ενέργεια

Η χρονική εξέλιξη του διατηρήσιμου συστήματος περιγράφεται μέσω μιας τροχιάς στον n -διάστατο φασικό χώρο με συντεταγμένες

$$q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n = (\vec{q}, \vec{p})$$



$$\vec{q}(t) = f^q(\vec{q}_0, \vec{p}_0)$$

$$\vec{p}(t) = f^p(\vec{q}_0, \vec{p}_0)$$

Σχήμα 3.5

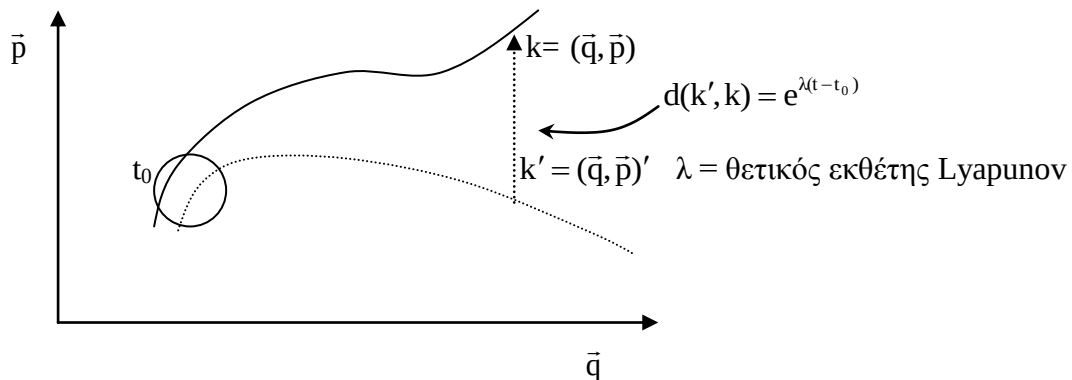
3.3 Χάος στα διατηρήσιμα συστήματα

Τα διατηρήσιμα (χαμιλτονιανά) συστήματα διακρίνονται στα ολοκληρώσιμα και στα μη ολοκληρώσιμα. Ολοκληρώσιμα είναι όσα μπορούν να επιλυθούν έτσι ώστε γνωρίζοντας μία αρχική κατάσταση στον φασικό χώρο να μπορούμε να υπολογίσουμε κάθε μελλοντική κατάσταση, συναρτήσει της αρχικής κατάστασης.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{q}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad (\vec{q}, \vec{p})_t = f^t(\vec{q}_0, \vec{p}_0)$$

Συνήθως τα ολοκληρώσιμα συστήματα είναι περιοδικά με τόσες περιοδικότητες $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ όσοι και οι βαθμοί (n) ελευθερίας του συστήματος.

Τα μη ολοκληρώσιμα χαμιλτονιανά συστήματα που αποτελούν και την πλειοψηφία των φυσικών συστημάτων εμφανίζουν χαοτική συμπεριφορά και είναι πάντα μη γραμμικά. Δηλαδή η συνάρτηση H είναι μη γραμμική συνάρτηση των $(\vec{q}, \vec{p})$. Η χαοτική συμπεριφορά αντιστοιχεί σε ένα φαινόμενο αστάθειας έτσι ώστε να είναι αδύνατον να υπολογίσουμε την μελλοντική κατάσταση με όσο μεγάλη ακρίβεια και αν γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση του συστήματος.



Σχήμα 3.6

Όπως δείχνει το ανωτέρω σχήμα στα χαοτικά (μη ολοκληρώσιμα) συστήματα δύο τροχιές που σχεδόν ταυτίζονται στην αρχική στιγμή πολύ γρήγορα απομακρύνονται έτσι ώστε η απόσταση των τελικών καταστάσεων σε χρόνο $\Delta t = t - t_0$ να αυξάνεται εκθετικά. Ο συντελεστής εκθετικής απομάκρυνσης των γειτονικών τροχιών είναι γνωστός ως θετικός εκθέτης Λυαπουνόφ. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Τα χαοτικά συστήματα ανοίγουν τον δρόμο προς μία νέα περιοχή φαινομένων τα οποία προηγουμένως περιγράψαμε ως φαινόμενα αυτοοργάνωσης και δημιουργίας τάξης από το χάος. Στα χαοτικά εν γένει συστήματα

εμφανίζονται όλα τα νέα φαινόμενα της θεωρίας της πολυπλοκότητας σύμφωνα με την οποία το χάος δημιουργεί μακροσκοπική τάξη στον χρόνο και στον χώρο. Τα χαμιλτονιανά χαοτικά συστήματα είναι μόνο μια κατηγορία πολύπλοκων φαινομένων. Η άλλη κατηγορία είναι τα μη διατηρήσιμα χαοτικά συστήματα στα οποία η ολική ενέργεια δεν διατηρείται.

3.4 Μη διατηρήσιμα συστήματα σωματιδίων

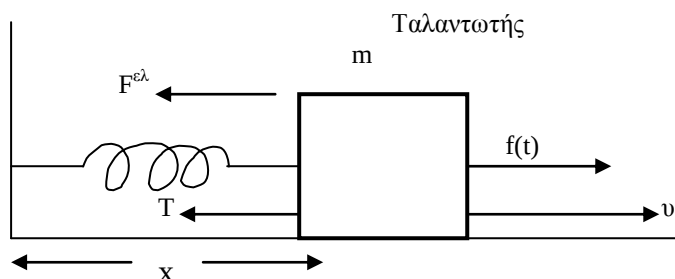
Η μη διατηρήσιμη δυναμική συστήματος σωματιδίων συναντάται όπου υπάρχουν τριβές οι οποίες προκαλούν απώλεια ενέργειας. Το χαρακτηριστικό αυτό της απώλειας ενέργειας προκαλεί την εμφάνιση ελκυστών στον φασικό χώρο. Αν η δυναμική είναι εκτός από μη διατηρήσιμη και μη γραμμική τότε το σύστημα είναι δυνατόν να εμφανίζει σειρά ελκυστών όλο και πιο πολύπλοκων αρχίζοντας από σημειακό ελκυστή. Όσο το σύστημα ευρίσκεται μακριά από ισορροπία τόσο πιο ενδιαφέρον έχει ο ελκυστής της δυναμικής. Έτσι όσο πιο διαταραγμένο γίνεται το σύστημα, εκδηλώνει πολύπλοκες δυναμικές μέσα στον φασικό χώρο όπως δυναμική οριακού κύκλου, οριακού τόρου και τέλος δυναμική παράξενου (χαοτικού) ελκυστού. Στα μη διατηρήσιμα συστήματα δεν έχουμε εξισώσεις Χάμιλτον αλλά γενικές μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης της μορφής:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}, \lambda)$$

όπου $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι το καταστατικό διάνυσμα ενώ οι μεταβλητές αντιστοιχούν σε θέσεις και ταχύτητες των σωματιδίων ή σε όποιες άλλες ιδιότητες. Εδώ εισάγουμε ένα γενικό συμβολισμό που επιτρέπει να περιγράψουμε κάθε μορφή μη γραμμικής καταναλίσκουσας δυναμικής είτε ενός είτε πολλών σωματιδίων. Ο όρος καταναλίσκων (dissipative) είναι καίριος διότι συνδέεται με την μακροσκοπική πολυπλοκότητα που οδηγεί σε φαινόμενα αυτοοργάνωσης σε ρευστά αλλά και σε πολλά άλλα φυσικά συστήματα. Για ένα σύστημα διακριτών σωματιδίων οι συνιστώσες $x_1, x_2, \dots, x_n$ του καταστατικού διανύσματος είναι συναρτήσεις μόνο του χρόνου:

$$X_i = X_i(t) \quad i=1,2,\dots,n$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα καταναλίσκουσας πολύπλοκης δυναμικής ενός σώματος είναι ένας μηχανικός ταλαντωτής με απόσβεση που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση.



Σχήμα 3.7

Στο ανωτέρω σχήμα έχουμε έναν ταλαντωτή με εξωτερική διέγερση π.χ. $f(t) = f_0 \eta \mu \omega t$ με συντελεστή τριβής που προκαλεί απώλεια της ενέργειας. Η εξίσωση κίνησης παίρνει την μορφή

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + f(t)$$

Στο πρώτο μέρος έχουμε τον όρο μάζα επί επιτάχυνση και στο δεύτερο μέρος έχουμε την ολική δύναμη του ταλαντωτή

$$F^{ολ} = F^{ελ} + F^{τρ} + F^{εξ}$$

όπου $F^{ελ} = -kx$ η δύναμη του ελατηρίου, $F^{τρ} = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$ η δύναμη τριβής που είναι πάντα αντίθετη της ταχύτητας και $F^{εξ} = f(t)$ μία εξωτερική διέγερση. Η ανωτέρω εξίσωση κίνησης αντιστοιχεί σε δυναμική τριών βαθμών ελευθερίας

$$x_1 = x$$

$$x_2 = v = \frac{dx}{dt}$$

$$x_3 = t$$

της θέσης, της ταχύτητας και του χρόνου t , και παίρνει την μορφή

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

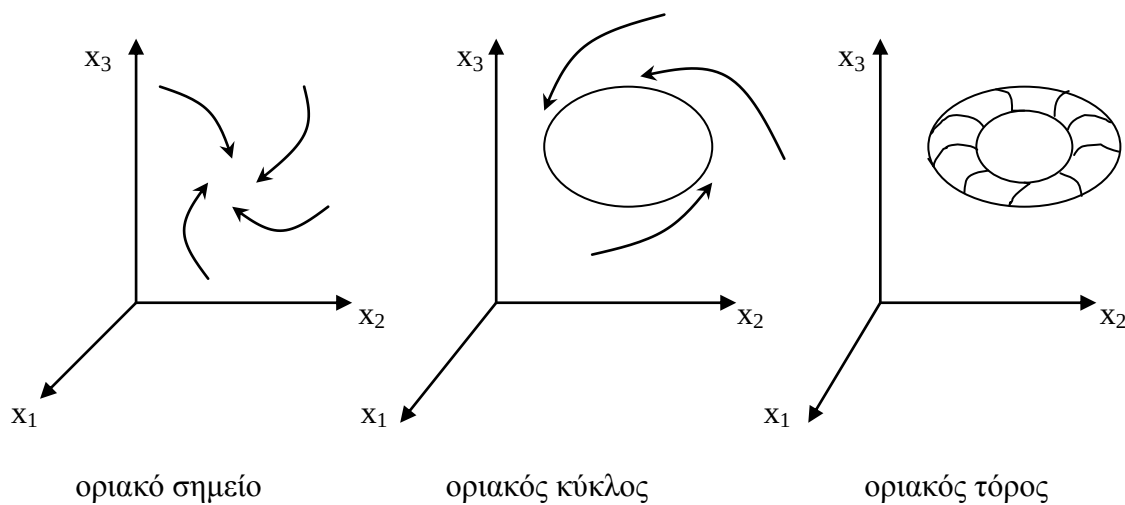
$$\frac{dx_2}{dt} = -kx_1 - \gamma x_2 + f(x_3)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 1$$

Εάν οι συντελεστές κ, γ είναι εξαρτώμενοι από την θέση και την ταχύτητα κάτι που συχνά συμβαίνει ή η εξωτερική δύναμη είναι μη γραμμική συνάρτηση του χρόνου, τότε οι εξισώσεις κίνησης του ταλαντωτή είναι μη γραμμικές και έχουν την γενική μορφή

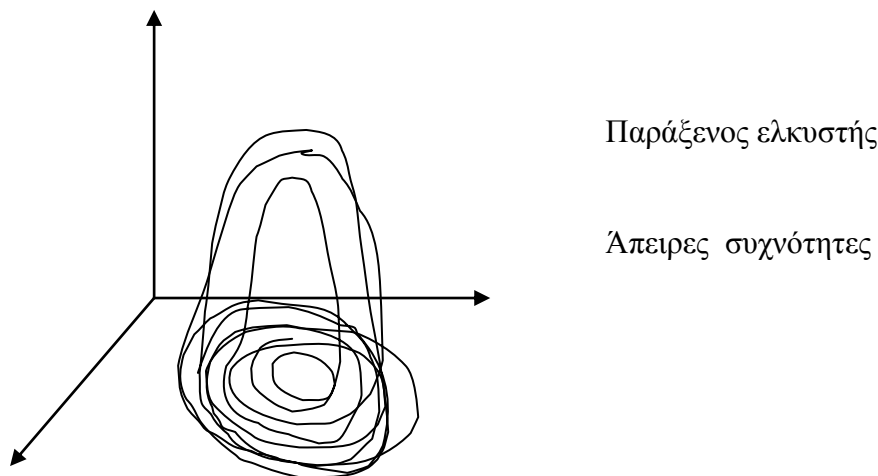
$$\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt} &= f^1(x^1, x^2, x^3) \\ \frac{dx^2}{dt} &= f^2(x^1, x^2, x^3) \\ \frac{dx^3}{dt} &= f^3(x^1, x^2, x^3)\end{aligned}$$

Εδώ ο φασικός ή καταστατικός χώρος του μη γραμμικού ταλαντωτή είναι τρισδιάστατος. Μέσα σε έναν τρισδιάστατο φασικό χώρο είναι δυνατόν να έχουμε όλα τα είδη ελκυστού: σημειακός, οριακός κύκλος, οριακός τόρος, παράξενος ελκυστής.



Σχήμα 3.8

Όταν οι βαθμοί ελευθερίας είναι περισσότεροι από δύο τότε είναι δυνατό να έχουμε παράξενο ελκυστή



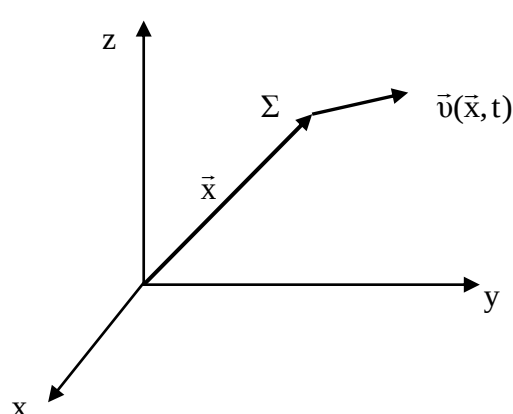
Σχήμα 3.9

Η έννοια του ελκυστού υποδηλώνει ότι υπάρχει μία περιοχή του φασικού χώρου όπου έλκεται η τροχιά από κάθε γειτονικό σημείο. Στον οριακό κύκλο η τροχιά είναι περιοδική με συχνότητα ω , στον οριακό τόρο η τροχιά είναι διπεριοδική με δύο συχνότητες ω_1, ω_2 , ενώ στον παράξενο ελκυστή η τροχιά είναι απεριοδική και εμφανίζει άπειρες συχνότητες. Ο παράξενος ελκυστής χαρακτηρίζεται ως χαοτικός διότι σε αυτόν έχουμε τα φαινόμενα της ευαισθησίας ως προς τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή στον χαοτικό (παράξενο) ελκυστή δύο γειτονικές τροχιές όσο κοντά και αν ευρεθούν απομακρύνονται πολύ γρήγορα ώστε να είναι αδύνατη η πρόβλεψη της μελλοντικής κατάστασης. Αντίστοιχα φαινόμενα με τον μη γραμμικό χαοτικό μηχανικό ταλαντωτή έχουμε σε έναν ηλεκτρικό μη γραμμικό ταλαντωτή, δηλαδή ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με μη γραμμική δυναμική.

3.5 Συνεχή υλικά μέσα

Η προσέγγιση των συνεχών υλικών μέσων εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπου η κατανομή των υλικών ατόμων-μορίων είναι τόσο πυκνή ώστε μακροσκοπικά να μην χρειάζεται να δούμε τι κάνει κάθε μεμονωμένο υλικό σωματίο. Αντ' αυτού θεωρούμε ότι ο χώρος είναι πλήρης από υλικά άτομα χωρίς να μένει κενό. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα συνεχές υλικό μέσο: στερεό, υγρό ή αέριο. Η μαθηματική περιγραφή ενός τέτοιου συνεχούς υλικού μέσου γίνεται μέσω της θεωρίας «πεδίου». Δηλαδή

θεωρούμε ότι κάθε φυσική ιδιότητα του μέσου κατανέμεται συνεχώς στον χώρο έτσι ώστε οι φυσικές ιδιότητες να είναι συναρτήσεις της θέσης (x) και του χρόνου (t).



Ρευστό που ρέει στο χώρο

$O\vec{\Sigma} = \vec{X}$ διάνυσμα θέσης στο χώρο

$\vec{u}(\vec{X}, t)$ ταχύτητα του ρευστού στη θέση $\vec{X}$

$\rho(\vec{X}, t) = \left(\frac{dm}{dV} \right)_{\vec{X}}$ = πυκνότητα του ρευστού στο $\vec{X}$

$T(\vec{X}, t)$ = θερμοκρασία του ρευστού στο $\vec{X}$

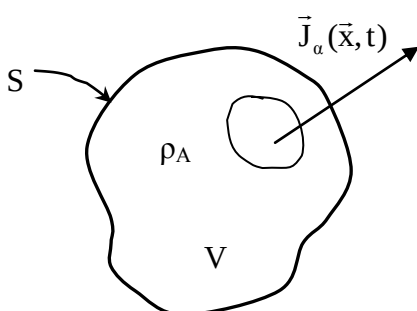
Σχήμα 3.10

Στο σχήμα αυτό δείχνουμε μερικές φυσικές ιδιότητες του συνεχούς μέσου όπως η ταχύτητα, η πυκνότητα, η θερμοκρασία ως συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου. Οι εξισώσεις που μοντελοποιούν την δυναμική του ρευστού είναι εξισώσεις με μερικές παραγώγους και αντιστοιχούν σε βασικές ιδιότητες των υλικών μέσων όπως

- Διατήρηση ή μεταφορά της ύλης – εξίσωση συνέχειας ή μεταφοράς ύλης
- Διατήρηση της ορμής ή μεταφορά ορμής (νόμος Νεύτωνα για τα ρευστά)
- Διατήρηση ή μεταφορά ενέργειας υπό μορφή θερμότητας
- Νόμος της εντροπίας

Για κάθε περίπτωση που έχουμε συνεχή ροή και μεταφορά μιας ποσότητας (μάζα, φορτίο, ενέργεια, ορμή, θερμότητα, κ.λ.π.) μέσα στον χώρο χρησιμοποιούμε την ίδια γενική μορφή εξίσωσης ή νόμο συνέχειας

$\vec{J}_a = \rho_a \vec{v}_a$ = πυκνότητα ροής του μεγέθους A



$\rho_a = \frac{dA}{dV}$ = πυκνότητα της ποσότητας A

$\sigma_a = \left(\frac{dA}{dt} \right)_{dV, dt}$ = παραγωγή της ποσότητας A ανά μονάδα

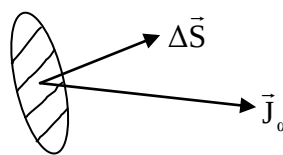
όγκου και χρόνου

$A = \int \rho_a dV$

Το $\vec{J}_a$ περιγράφει τη ροή του A από την επιφάνεια του όγκου V

Σχήμα 3.11

Όπως δείχνει το σχήμα αυτό η ποσότητα A μέσα στον όγκο V μπορεί να μεταβάλλεται πρώτον διότι η ποσότητα A ρέει έξω από τον όγκο και δεύτερον διότι μέσα στον όγκο μπορεί να υπάρχουν «πηγές» που δημιουργούν ή «καταβόθρες» που καταστρέφουν την ποσότητα του A . Η ροή περιγράφεται από το διάνυσμα πυκνότητας ροής $\vec{J}_a = \rho_a \vec{v}_a$ που δίδεται από το γινόμενο της πυκνότητας ρ_a επί την ταχύτητα ροής $\vec{v}_a$ της A . Συνήθως η ταχύτητα ροής της ποσότητας A ταυτίζεται με την ταχύτητα $\vec{v}$ ροής του συνεχούς μέσου. Το ποσόν της ποσότητας A που ρέει από την επιφάνεια ΔS σε χρόνο dt δίδεται από την εξίσωση:



$$\left(\frac{dA}{dt} \right)_{\Delta S} = \vec{J}_a \cdot d\vec{S} = \rho_a \vec{v}_a \cdot d\vec{S}$$

Σχήμα 3.12

$d\vec{S}$ είναι διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια ΔS και έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν της ΔS . Η συνολική ποσότητα A που ρέει από όλη την επιφάνεια (S) του όγκου δίδεται από το άθροισμα των ροών σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια

$$\left(\frac{dA}{dt} \right)_S = \sum \vec{J}_a \cdot d\vec{S} = \oint \vec{J}_a \cdot d\vec{S} = \oint \rho_a \vec{v}_a \cdot d\vec{S}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss, το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην κλειστή επιφάνεια S μετασχηματίζεται σε κυβικό της απόκλισης στον όγκο V που περιέχεται στην επιφάνεια και παίρνουμε:

$$\left(\frac{dA}{dt} \right)_S = \oint \vec{J}_a \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a dV$$

Εάν δεν υπάρχουν πηγές ($\sigma_a = 0$) τότε η ποσότητα που ρέει έξω από τον όγκο ισούται με την ελάττωση της A μέσα στον όγκο:

$$\left(\frac{dA}{dt} \right)_V = - \left(\frac{dA}{dt} \right)_S$$

Το $(-)$ δηλώνει ότι αν $\left(\frac{dA}{dt} \right)_S > 0$ τότε $\left(\frac{dA}{dt} \right)_V < 0$ και αντίθετα. Βάσει των προηγούμενων σχέσεων έχουμε:

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_V = -\oint \vec{J}_a d\vec{S} = -\int_V \vec{\nabla} \vec{J}_a dV$$

Επειδή όμως η ποσότητα A μέσα στον όγκο (V) δίδεται από το κυβικό ολοκλήρωμα της πυκνότητάς της

$$(A)_V = \int \rho_a dV \Rightarrow \left(\frac{dA}{dt}\right)_V = \frac{d}{dt} \int \rho_a dV = \int_V \frac{\partial \rho_a}{\partial t} dV$$

προκύπτει ότι:

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_V = \int_V \frac{\partial \rho_a}{\partial t} dV$$

διότι η παράγωγος μπαίνει μέσα στο ολοκλήρωμα ως μερική παράγωγος. Έτσι ο νόμος διατήρησης της ποσότητας A γράφεται

$$\int_V \frac{\partial \rho_a}{\partial t} dV = \oint \vec{J}_a d\vec{S}$$

ή χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss

$$\int_V \frac{\partial \rho_a}{\partial t} dV = -\int_V \vec{\nabla} \vec{J}_a dV$$

Επειδή η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε όγκο V θα ισχύει και για απειροστούς όγκους:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} dV = -\vec{\nabla} \vec{J}_a dV \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -\vec{\nabla} \vec{J}_a$$

Στην περίπτωση πηγών ($\sigma_a \neq 0$) θα έχουμε και μία μεταβολή του A στον όγκο V εξαιτίας των πηγών σ_a .

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_V = \int_V \sigma_a dV$$

Τώρα συνολικά η εξίσωση που διέπει την ποσότητα A θα είναι:

$$\int_V \frac{\partial \rho_a}{\partial t} dV = -\int_V \vec{\nabla} \vec{J}_a dV + \int_V \sigma_a dV \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -\vec{\nabla} \vec{J}_a + \sigma_a$$

Εάν το ρ_a αντιστοιχεί στην πυκνότητα μάζας (m) τότε επειδή η μάζα ούτε δημιουργείται ούτε καταστρέφεται για τα καθημερινά φαινόμενα ($\sigma_m \neq 0$) έχουμε:

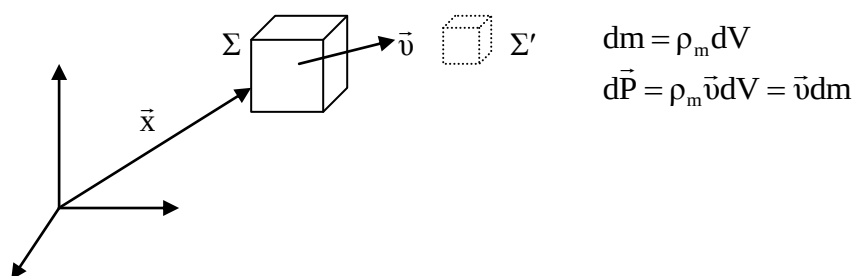
$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = -\vec{\nabla} \vec{J}_m, \vec{J}_m = \rho_m \vec{v}$$

Μεταφορά ορμής στα συνεχή μέσα

Η πυκνότητα ορμής του ρευστού δίδεται από τη σχέση:

$$\vec{J}_m = \rho_m \vec{u}$$

Μέσα στον στοιχειώδη όγκο dV έχουμε στοιχειώδη ορμή $d\vec{P} = \rho_m \vec{u} dV = \vec{u} dm$



Σχήμα 3.13

Σε χρόνο dt η μάζα dm που βρίσκεται μέσα στον όγκο dV θα έχει μετακινηθεί σε μία γειτονική θέση Σ' όπου έχουμε διαφορετική ταχύτητα και πυκνότητα. Εάν $d\vec{F}$ είναι η ολική δύναμη που ασκείται στην στοιχειώδη μάζα dm τότε θα ισχύει

$$d\vec{F} = \frac{d(\rho_m \vec{u} dV)}{dt}, \quad d\vec{F} = \vec{f} dV$$

$$\frac{d(\rho_m \vec{u})}{dt} = \vec{f} \quad \text{όπου} \quad \vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV}$$

$\vec{f}$ = δύναμη ανά μονάδα όγκου.

Επειδή η στοιχειώδης μάζα μετακινείται σε χρόνο dt από την περιοχή Σ η ολική παράγωγος στον χρόνο παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d(\rho_m \vec{u})}{dt} = \frac{\partial(\rho_m \vec{u})}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})(\rho_m \vec{u})$$

Στα ανωτέρω έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα της ολικής παραγώγου για μία συνάρτηση Φ πολλών μεταβλητών

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t) = \Phi(t, \vec{X})$$

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} v_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} v_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} v_z$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$$

Η δύναμη f ανά μονάδα όγκου μέσα σε ένα ρευστό προέρχεται από εξωτερικές δυνάμεις (π.χ. βαρύτητα) και εσωτερικές δυνάμεις τριβής (ιξώδες) και εσωτερικής πίεσης. Γενικά ισχύει:

Δύναμη βαρύτητας $\vec{f}^b = \rho_m \vec{g}$, $\vec{g}$ = ένταση βαρύτητας

Δύναμη τριβής $\vec{f}^T = \mu \nabla^2 \vec{v}$, (εσωτερική τριβή)

Δύναμη πίεσης $\vec{f}^P = -\vec{\nabla} P$, P = εσωτερική πίεση υγρού

Έτσι ο νόμος μεταφοράς της ορμής γράφεται:

$$\frac{\partial(\rho_m \vec{v})}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\rho_m \vec{v}) = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}^{\text{ext}}$$

Μεταφορά θερμότητας

Έστω U η πυκνότητα θερμικής ενέργειας. Ως γνωστό η θερμική ενέργεια δεν είναι άλλο από την μικροσκοπική δυναμική και κινητική ενέργεια που στην θερμοδυναμική ορίζεται ως εσωτερική ενέργεια:

$$U = \int_V u dV$$

Ως γνωστόν, όταν έχουμε διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ δύο σημείων του χώρου τότε έχουμε και ροή θερμότητας (θερμικής ενέργειας) από τις θερμότερες προς τις ψυχρότερες περιοχές. Το ποσόν της ρέουσας θερμικής ενέργειας δίδεται από το διάνυσμα $\vec{J}_T$ βάσει της εξίσωσης:

$$\left(\frac{dU}{dt} \right)_V = \oint \vec{J}_T \cdot d\vec{S} \quad \text{ή}$$

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = \oint \vec{J}_T \cdot d\vec{S} = - \oint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T dV \quad \text{ή}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T \quad \text{εξίσωση μεταφοράς θερμικής ενέργειας}$$

Από τη θερμοδυναμική θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$\vec{J}_T = -\sigma_T \vec{\nabla} T \quad \text{όπου } T(x,y,z) = \text{πεδίο θερμοκρασίας, βαθμίδα θερμοκρασίας}$$

$$du = C_T dT \quad C_T \text{ ειδική θερμοχωρητικότητα του υλικού}$$

Βάσει αυτών ο νόμος μεταφοράς θερμότητας γράφεται:

$$\frac{\partial(C_T dT)}{\partial t} = -\sigma_T (\vec{\nabla} \vec{\nabla}) T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\sigma_T}{C_T} \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

Ο νόμος αυτός μας περιγράφει την χρονική μεταβολή της θερμοκρασίας $\frac{\partial T}{\partial t}$ λόγω χωρικής διαφοράς (βαθμίδας, ∇T) της θερμοκρασίας. Με απλά λόγια ότι οι θερμές περιοχές ψύχονται και οι ψυχρές θερμαίνονται μέσω μεταφοράς θερμότητας από τις θερμές στις ψυχρές περιοχές.

Διάχυση της ύλης

Όπως στην περίπτωση διάχυσης της θερμότητας από τις θερμές στις ψυχρές περιοχές έτσι όταν μέσα σε ένα συνεχές υλικό μέσο έχουμε βαθμίδες στην πυκνότητα μιας ουσίας (α) τότε έχουμε ροή μάζας της ουσίας (α) από τις πυκνές στις αραιές περιοχές. Ο νόμος διάχυσης περιγράφεται πάλι μέσω ενός συντελεστού διάχυσης (D_α) και ισχύει η σχέση:

$$\vec{J}_\alpha = -D_\alpha \vec{\nabla} \rho_\alpha$$

Όπου $\vec{J}_\alpha = \rho_\alpha \vec{v}_\alpha$ η πυκνότητα ροής της ουσίας α , D_α ο συντελεστής διάχυσης και ρ_α η χωρική πυκνότητα της ουσίας α . Ο νόμος αυτός λέει ότι η ταχύτητα ροής ($\vec{v}_\alpha$) της ουσίας (α) είναι αντίθετη από την βαθμίδα της πυκνότητάς της $\vec{\nabla} \rho_\alpha$ δηλαδή κατευθύνεται από τις πυκνές στις αραιές περιοχές.

Δεδομένου ότι συνήθως η μάζα μιας ουσίας διατηρείται θα ισχύει:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a$$

Αυτή η σχέση σε συνδυασμό με την προηγούμενη:

$$\vec{J}_a = -D_a \vec{\nabla} \rho_a$$

μας δίδει

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -D_a \nabla^2 \rho_a$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τον νόμο διάχυσης όταν η μακροσκοπική ταχύτητα του ρευστού είναι μηδενική οπότε η διάχυση οφείλεται στις μικροσκοπικές ταχύτητες. Αν εκτός της διάχυσης έχουμε και μακροσκοπική ροή τότε ο νόμος της διάχυσης παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho_a = D_a \nabla^2 \rho_a$$

Μεταφορά εντροπίας

Η εντροπία S ενός θερμοδυναμικού συστήματος είναι ένα μέγεθος ανεξάρτητα από τα άλλα θερμοδυναμικά μεγέθη: εσωτερική ενέργεια (U), θερμοκρασία (T), πίεση (P), κ.λ.π. Σε ένα συνεχές μέσο ορίζουμε πυκνότητα εντροπίας ρ_s και πυκνότητα ροής της εντροπίας $\vec{J}_s$. Η εντροπία μεταφέρεται συγχρόνως με την μεταφορά θερμότητας σύμφωνα με την εξίσωση $dS = \frac{dQ}{dT}$, όπου το ποσόν μεταφερόμενης θερμότητας.

Εκτός όμως την μεταφοράς της εντροπίας είναι δυνατόν να έχουμε παραγωγή εντροπίας. Αυτό συμβαίνει όταν το σύστημα ευρίσκεται μακριά από θερμοδυναμική ισορροπία. Έτσι ο νόμος μεταφοράς της εντροπίας παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s + \sigma_s$$

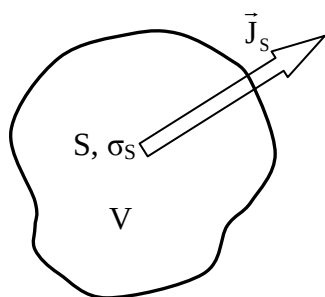
Ο νόμος της εντροπίας γνωστός ως:

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 \quad (\text{για κλειστά συστήματα})$$

δηλώνει ότι για κλειστά θερμοδυναμικά συστήματα (που δεν παίρνουν ούτε δίνουν στο περιβάλλον ύλη ή ενέργεια) η εντροπία πάντα αυξάνεται. Για τα ανοικτά συστήματα είναι δυνατόν να έχουμε ελάττωση της ολικής εντροπίας μέσω μεταφοράς εντροπίας προς το περιβάλλον.

Εντροπία και αυτοοργάνωση

Όπως έχουμε τονίσει επανειλημμένα τα (χαοτικά) πολύπλοκα συστήματα όταν ευρίσκονται μακριά από θερμοδυναμική ισορροπία δημιουργούν αυθόρμητα τάξη και οργάνωση στο εσωτερικό των με μορφή δομών χρονικών ή χωρικών. Ως γνωστόν η εντροπία σχετίζεται με την αταξία, με την έννοια ότι όσο μεγαλύτερη τάξη και οργάνωση πετυχαίνει ένα σύστημα τόσο μικρότερη εντροπία παρουσιάζει. Αντίθετα η ελάττωση τάξης (άρα αύξηση αταξίας) οδηγεί σε αύξηση της εντροπίας.



Σχήμα 3.14

$$dS^{ολ} = dS^{περ} + dS^{εσωτ}$$

$$\left(\frac{dU}{dt} \right)_V = - \oint_S \vec{J}_S d\vec{S} + \int_V \sigma_S dV$$

Η συνολική μεταβολή της εντροπίας (dS) στο εσωτερικό ενός ανοικτού συστήματος δίδεται από το άθροισμα δύο μεταβολών: της μεταβολής λόγω μεταφοράς προς το περιβάλλον $dS^{περ}$ και της μεταβολής $dS^{εσωτ}$ λόγω εσωτερικής παραγωγής εντροπίας:

$$dS^{ολ} = dS^{περ} + dS^{εσωτ}$$

Η εσωτερική μεταβολή $dS^{εσωτ}$ είναι πάντα αύξουσα. Όμως αν η εντροπία που ρέει προς το περιβάλλον είναι μεγαλύτερη από αυτή που παράγεται εσωτερικά τότε η ολική εντροπία του συστήματος είναι δυνατόν να ελαττώνεται. Εν γένει για τα ανοικτά συστήματα ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής γράφεται μόνο για την εσωτερική παραγωγή εντροπίας

$$\frac{dS^{εσ}}{dt} \geq 0 \quad (\text{2ος θερμοδυναμικός νόμος για ανοικτά συστήματα})$$

Αυτοοργάνωση στα ρευστά

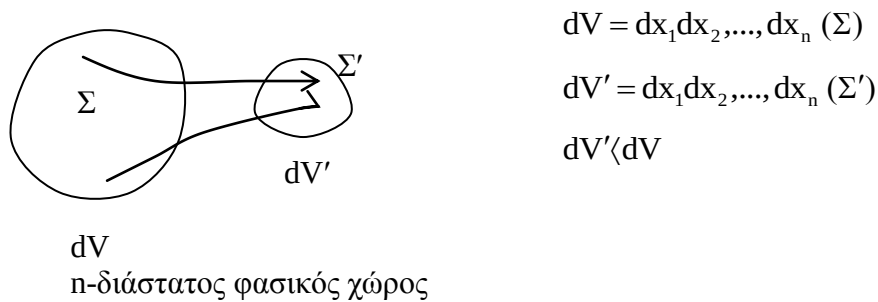
Η δυναμική των ρευστών αποτελεί βασικό παράδειγμα ενός πολύπλοκου συστήματος με δυνατότητα αυτοοργάνωσης. Όπως έχουμε περιγράψει σε προηγούμενο κεφάλαιο τα ρευστά μακριά από θερμοδυναμική ισορροπία εμφανίζουν φαινόμενα αυτοοργάνωσης με την έννοια ότι τα πρακτικώς άπειρα μόρια του ρευστού μπορούν να συντονίζονται και να παράγουν μακροσκοπική τάξη με τρόπο που αδυνατεί να κατανοήσει η κλασική περιγραφή της μικροσκοπικής δυναμικής μέσω δυνάμεων. Συγκεκριμένα η μακροσκοπική τάξη απαιτεί συντονισμό κινήσεων σε πολύ μεγαλύτερη απόσταση μέσα στο ρευστό από όση είναι η εμβέλεια των μικροσκοπικών δυνάμεων. Ομοίως το φαινόμενο της αυτοοργάνωσης δεν εξηγείται από εξωτερικές δυνάμεις, όπως π.χ. η βαρύτητα ή άλλες δυνάμεις. Δηλαδή η αυτοοργάνωση είναι φαινόμενο νέο, αυθόρμητο και σχετίζεται με τη δημιουργία μακροσκοπικών συσχετίσεων. Οι μακροσκοπικές συσχετίσεις είναι φαινόμενο ανεξάρτητο και δεν εξηγείται μέσω δυνάμεων. Αυτή είναι κατ' ουσίαν η πεμπτουσία της θεωρίας της πολυπλοκότητας και το νέο περιεχόμενο της φυσικής θεωρίας. Οι εξισώσεις που διέπουν τη δυναμική των ρευστών όπως τις έχουμε περιγράψει στα προηγούμενα ως μεταφορά ύλης, ορμής, θερμότητας, εντροπίας είναι ντετερμινιστικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους αφού περιλαμβάνουν φυσικά μεγέθη που είναι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών δηλαδή του χρόνου (t) και του χώρου (x, y, z). Έτσι εκτός της παραγώγου ως προς τον χρόνο (t) στους νόμους των ρευστών υπεισέρχονται και οι παράγωγοι ως προς τον χώρο (x, y, z). Όπως έχουμε τονίσει και αλλού στην περίπτωση αυτή όπου τα φυσικά (δυναμικά) μεγέθη ορίζονται για κάθε σημείο του χώρου $x=(x, y, z)$ ο καταστατικός (φασικός) χώρος του δυναμικού συστήματος είναι απειροδιάστατος. Επιπλέον οι εξισώσεις των ρευστών είναι μη γραμμικές αφού περιλαμβάνουν γινόμενα των δυναμικών μεταβλητών, όπως π.χ. όρους της μορφής:

$$\vec{u}\vec{\nabla}(\rho\vec{u}), \vec{u}\vec{\nabla}(\rho_a)$$

Τέλος οι εξισώσεις των ρευστών είναι καταναλίσκουσες (δεν έχουν χαμιλτονιανή διατηρήσιμη μορφή), περιγράφοντας καταναλίσκοντα δυναμικά συστήματα όπως δείχνουν οι όροι της μορφής

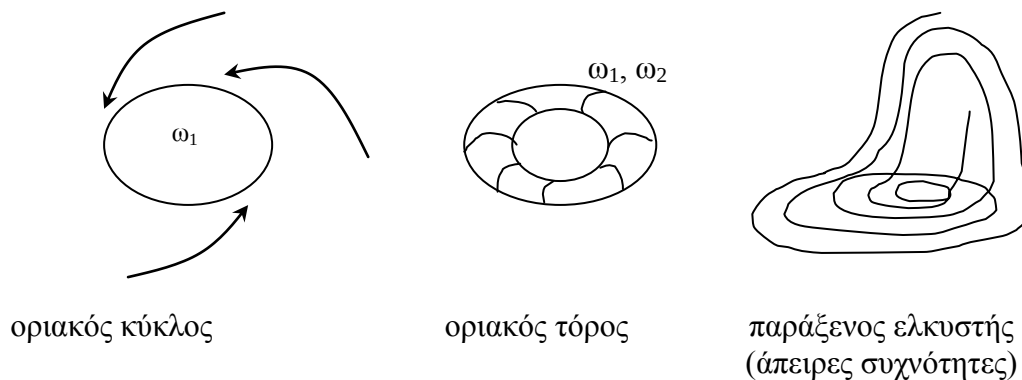
$$D\nabla^2\rho \quad , \quad \mu\nabla^2\vec{u}$$

Στα καταναλίσκοντα δυναμικά συστήματα είναι δυνατόν να έχουμε αναγωγή (χαμήλωμα) των βαθμών ελευθερίας αφού ο όγκος στον φασικό χώρο μπορεί να μειώνεται



Σχήμα 3.15

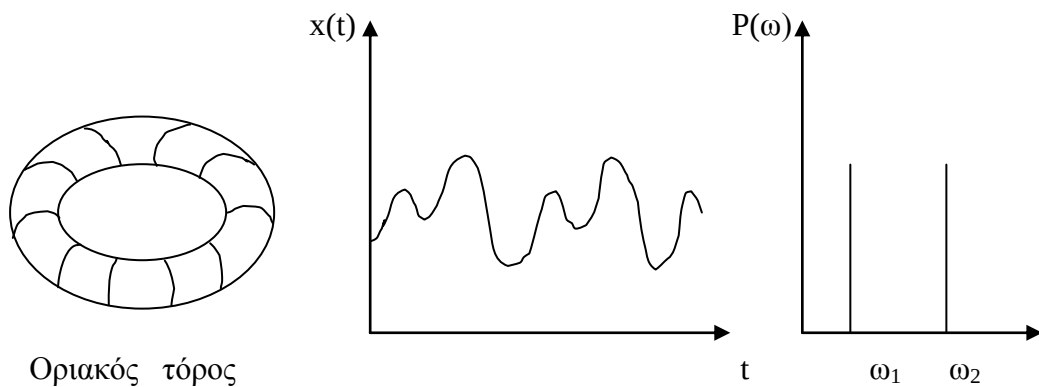
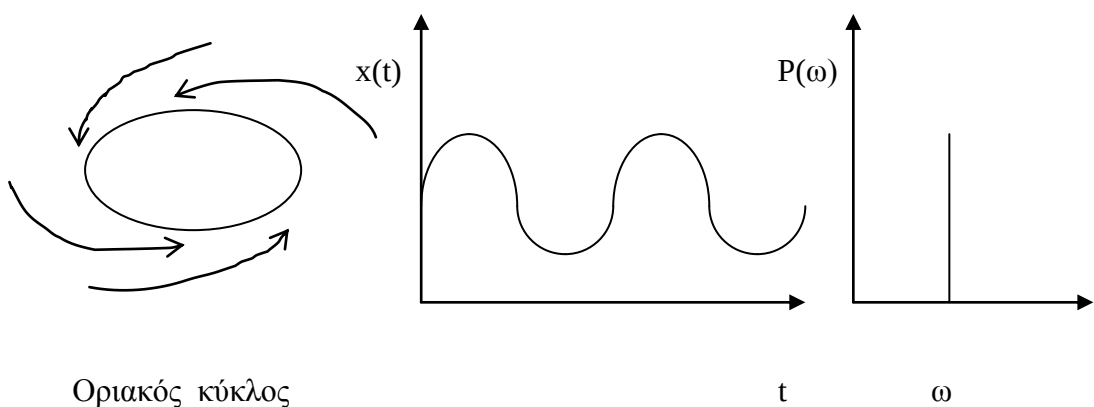
Όπως δείχνει το σχήμα αυτό μέσα στον φασικό χώρο του καταναλίσκοντος δυναμικού συστήματος ο φασικός όγκος ελαττώνεται με τον χρόνο. Έτσι ορισμένοι βαθμοί ελευθερίας χάνουν τη σημασία τους καθώς το σύστημα οδηγείται στην περιοχή έλξεως ενός ελκυστού. Έτσι ένα απειροδιάστατο καταναλίσκον σύστημα μπορεί και εμφανίζει με τον χρόνο δυναμική λίγων βαθμών ελευθερίας υπό μορφή απλών (χαμηλοδιάσταστων) περιοδικών ή χαοτικών ελκυστών.



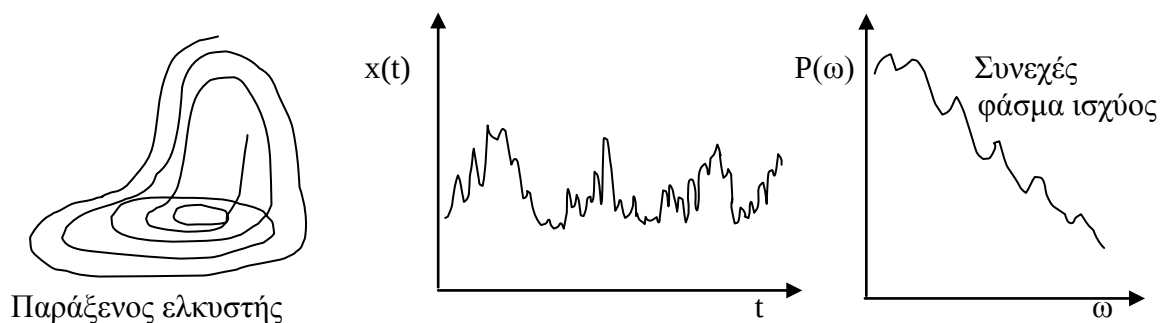
Σχήμα 3.16

όπως δείχνει το ανωτέρω σχήμα όπου οι άπειροι βαθμοί ελευθερίας συρρικνώνονται σε έναν (περίπτωση οριακού κύκλου) ή σε περισσότερους όπως συμβαίνει στην περίπτωση τόρου 2 (τόρος με δύο συχνότητες), τόρου 3 (τρεις συχνότητες), κ.λ.π. Για τα ρευστά και άλλα καταναλίσκοντα συστήματα η εμφάνιση δυναμικών οριακών

κύκλων και οριακών τόρων έχει παρατηρηθεί πειραματικά όσο το σύστημα απομακρύνεται από την κατάσταση της θερμοδυναμικής ισορροπίας. Μάλιστα με την εμφάνιση του τόρου 2 (δύο συχνότητες) συνήθως αντί της εμφάνισης τόρων 3, 4, κ.λ.π. περνάμε κατευθείαν στη δυναμική του παράξενου ελκυστού όπου ενώ οι βαθμοί ελευθερίας είναι πάλι λίγοι, συνήθως λίγο πάνω από τρεις, οι συχνότητες είναι άπειρες. Στο κατωτέρω σχήμα δείχνουμε τη μορφή περιοδικών και παράξενων ελκυστών μαζί με το αντίστοιχο φάσμα συχνοτήτων και τις συσχετίσεις των δυναμικών μεγεθών που επιζούν στην περιοχή του ελκυστού:



Σχήμα 3.17



Σχήμα 3.18

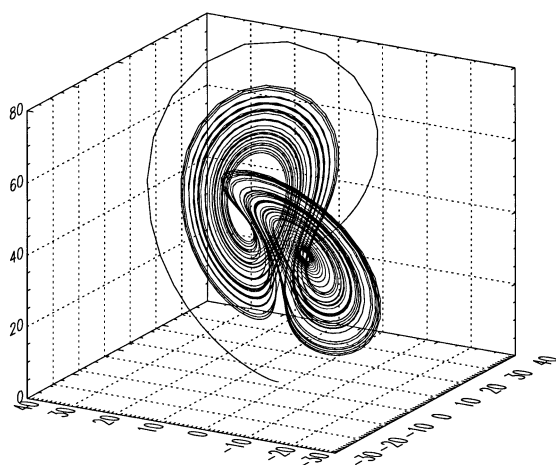
Το χαμήλωμα της διάστασης του φασικού χώρου και των ενεργών βαθμών ελευθερίας (από τους άπειρους βαθμούς) που επιζούν: 1 (οριακός κύκλος), 2 (οριακός τόρος), 3 (τόρος 3 ή παράξενος ελκυστής) αποτελεί βασικό φαινόμενο αυτοοργάνωσης στα ρευστά που έχει παρατηρηθεί επανειλημμένα στο εργαστήριο.

Ελκυστής του Lorenz

Ο Λορέντζ (Lorenz) προσπαθώντας να μελετήσει τη δυναμική του καιρού ανακάλυψε τις περίφημες εξισώσεις του καιρού (εξισώσεις Λορέντζ). Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από τις εξισώσεις των ρευστών προσαρμοσμένες στη γήινη ατμόσφαιρα και έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \rho(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - xz - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}$$

όπου οι μεταβλητές x , y , z είναι συναρτήσεις του χρόνου και αντιστοιχούν στις οριζόντιες και κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας του ατμοσφαιρικού ρευστού και της θερμοκρασίας του. Αναλόγως τις τιμές των παραμέτρων (ρ , r , b) η δυναμική των εξισώσεων του Λορέντζ μέσα στον τρισδιάστατο χώρο μπορεί να εμφανίζει οριακό κύκλο, οριακό τόρο ή παράξενο ελκυστή.



Ελκυστής του Lorenz

Σχήμα 3.19

Στο ανωτέρω σχήμα δείχνουμε τον περίφημο παράξενο ελκυστή Λορέντζ που αποτέλεσε το πρώτο παράδειγμα παράξενου ελκυστού που παρατηρείται στο φυσικό περιβάλλον. Μέσα στον ελκυστή του Λορέντζ οι τροχιές εμφανίζουν ευαισθησία ως προς τις αρχικές συνθήκες (δηλαδή έχουμε ένα θετικό εκθέτη Λυαπούνοφ) και κλασματική (μη ακεραία) διάσταση $d=2,06$.

Χημική δυναμική

Η θεωρία των ρευστών όπως έχει περιγραφεί μέχρι εδώ περιλαμβάνει μόνο φαινόμενα ομαλής ροής και διάχυσης (ύλης ή θερμότητας). Εάν όμως το ρευστό περιλαμβάνει διαφορετικές χημικές ενώσεις οι οποίες μπορούν να αντιδρούν χημικά δημιουργώντας νέες χημικές ενώσεις, στην περίπτωση αυτή οι συγκεντρώσεις (πυκνότητες) C των χημικών ενώσεων μεταβάλλονται στον χρόνο αφού δημιουργούνται και καταστρέφονται χημικά μόρια κατά τη διαδικασία των χημικών αντιδράσεων έτσι ώστε να ισχύουν εξισώσεις της μορφής

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} = f^a(C_1, C_2, \dots, C_n) \quad a = 1, 2, \dots$$

όπου $C_a = C_a(t, x, y, z)$ η συγκέντρωση της χημικής ένωσης a . Συνήθως όμως εκτός από τη μεταβολή των χημικών συγκεντρώσεων εξαιτίας των χημικών αντιδράσεων είναι δυνατόν να έχουμε μεταβολή στις συγκεντρώσεις που οφείλεται σε φαινόμενα διάχυσης. Τότε οι εξισώσεις που περιγράφουν το χημικό ρευστό παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} = f^a(C_1, C_2, \dots, C_n) + D^a \nabla^2 C_a$$

Οι εξισώσεις αυτές συνήθως είναι μη γραμμικές και καταναλίσκουσες οπότε μπορούν να περιγράψουν εντυπωσιακά φαινόμενα χημικής αυτοοργάνωσης (χημικά ρολόγια, χημικά κύματα, κ.λ.π.).

3.6 Διακριτή δυναμική των πληθυσμών

Στο οικολογικό σύστημα είναι δυνατόν ένας πληθυσμός να μεταβάλλεται από μήνα σε μήνα ή από χρόνο σε χρόνο εξαιτίας μιας τυχαίας μεταβολής των περιβαλλοντικών συνθηκών και εξαιτίας της αλληλεπίδρασης των διαφορετικών ειδών μέσω της διαδικασίας της τροφής. Μολονότι θα περίμενε κανείς ένα τέτοιο

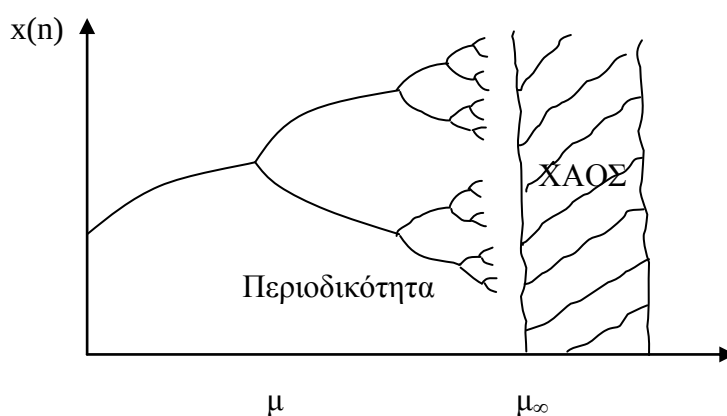
φαινόμενο να είναι τυχαίο εν τούτοις οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι η πληθυσμιακή δυναμική σε ποικίλες περιπτώσεις περιγράφεται από απλές διακριτές εξισώσεις (απεικονίσεις) της μορφής

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n = 1, 2, \dots,$$

Μια απλή μορφή πληθυσμιακής δυναμικής που περιγράφει πολλά φαινόμενα είναι η λογιστική εξίσωση

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

Η λογιστική εξίσωση εμφανίζει αντίστοιχα φαινόμενα περιοδικότητας και χάους όπως και οι συνεχείς στο χρόνο μη γραμμικές εξισώσεις.



Σχήμα 3.20

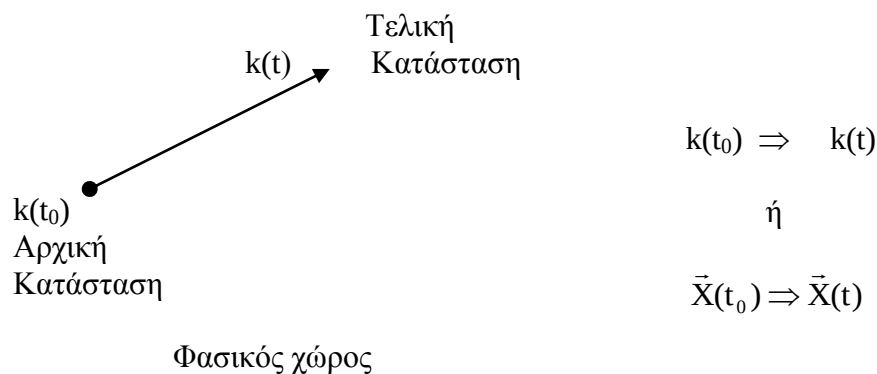
Όπως δείχνει το ανωτέρω σχήμα για τιμές $\mu < \mu_\infty$ ο πληθυσμός x εμφανίζει περιοδικές μεταβολές με τον χρόνο ενώ για $\mu > \mu_\infty$ περνάμε σε χαοτική δυναμική καθώς ο πληθυσμός εμφανίζει τυχαίες τιμές με τον χρόνο. Εδώ φαίνεται πως πολλές τυχαίες (απρόβλεπτες) μεταβολές που εμφανίζει ένας πληθυσμός στην ουσία περιγράφονται από απλές ντετερμινιστικές εξισώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ

4.1. Από τον ντετερμινισμό στην στοχαστικότητα

Στην ντετερμινιστική περιγραφή ενός πολύπλοκου συστήματος οι μαθηματικές εξισώσεις μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε κάθε μελλοντική κατάσταση του συστήματος αν γνωρίζουμε μια αρχική κατάσταση του. Σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα



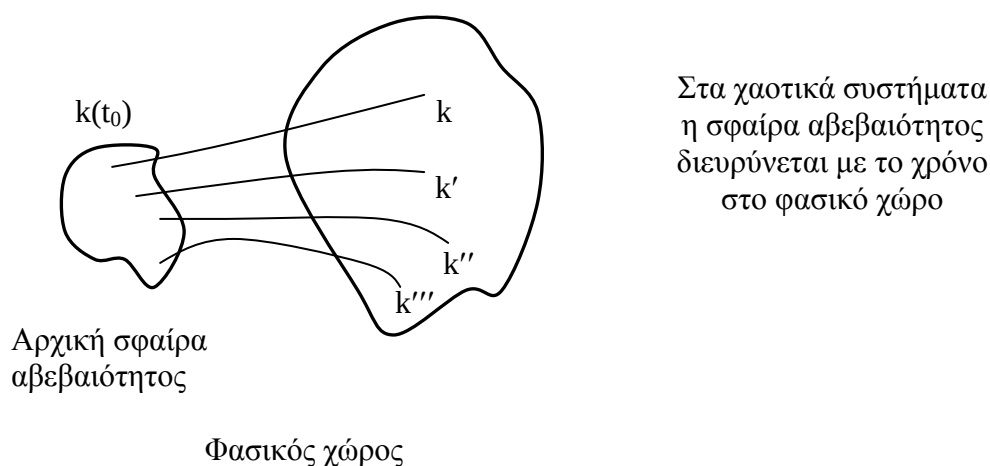
Σχήμα 4.1

$k(t_0)$, $k(t)$ είναι η αρχική και τελική κατάσταση αντιστοίχως. Όπως έχουμε περιγράψει ακολούθως η κατάσταση ενός πολύπλοκου συστήματος περιγράφεται από το διάνυσμα κατάστασης $\vec{X}$ μέσα στον καταστατικό (φασικό) χώρο. Ο φασικός χώρος μπορεί να είναι πεπερασμένης διάστασης όταν έχουμε πεπερασμένους βαθμούς ελευθερίας (π.χ. σύστημα διακριτών σωμάτων) ή απείρου διάστασης όταν έχουμε άπειρους βαθμούς ελευθερίας (π.χ. ρευστά πεδία δυνάμεων κλπ.) Στην πρώτη περίπτωση το καταστατικό διάνυσμα έχει πεπερασμένες συνιστώσες όσες και οι βαθμοί ελευθερίας και στην δεύτερη άπειρες συνιστώσες.

Η στοχαστική περιγραφή ενός πολύπλοκου συστήματος καθίσταται απαραίτητη όταν είναι αδύνατον να αν λύσουμε ντετερμινιστικές εξισώσεις που περιγράφουν το πολύπλοκο σύστημα. Η αιτία για αυτό είναι διότι α) οι βαθμοί ελευθερίας είναι πολλοί β) οι εξισώσεις είναι μη γραμμικές γ) έχουμε χαοτική αστάθεια ή ευαισθησία

ως προς τις αρχικές συνθήκες δ) έχουμε κβαντικά φαινόμενα εξαιτίας των αρχών αβεβαιότητας του.

Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις η στοχαστική περιγραφή προκύπτει από τη δυσκολία επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν τη δυναμική τους συστήματος ενώ στην τέταρτη περίπτωση δεν υφίστανται εξ αρχής οι ντετερμινιστικές εξισώσεις. Πάντως σε όλες τις περιπτώσεις πρακτικά έχουμε κατάργηση της έννοιας της τροχιάς μέσα στο φασικό χώρο. Αντί αυτού η στοχαστική περιγραφή εισάγει μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας η οποία μας επιτρέπει κάθε στιγμή να υπολογίζουμε την πιθανότητα να παρατηρήσουμε μια ορισμένη κατάσταση μέσα στο φασικό χώρο.

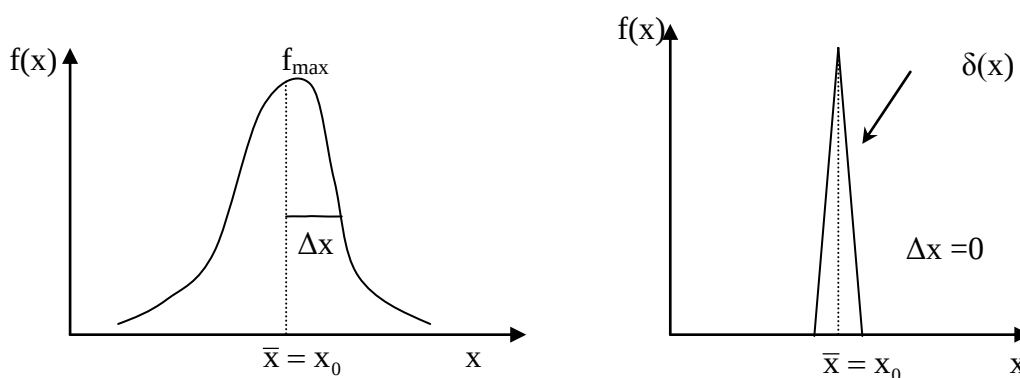


Σχήμα 4.2

Όπως δείχνει το ανωτέρω σχήμα ακόμη και αν γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση με κάποια ακρίβεια ή καλύτερα αν γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση έστω και με μικρή αβεβαιότητα η σφαίρα αβεβαιότητας μεγεθύνεται πολύ γρήγορα για τα πολύπλοκα χαοτικά συστήματα. Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι ο σύνολο των φασικών συστημάτων και εν γένει τα συστήματα στα οποία για τον ένα ή άλλο λόγο αδυνατεί να εφαρμοστεί η ντετερμινιστική περιγραφή αποτελούν πλειοψηφία. Το ερώτημα που τίθεται από θεωρητικής πλευράς είναι το κατά πόσον η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή το κύμα (νέφος) πιθανότητας που ορίζεται μέσα στον φασικό χώρο και αντικαθιστά την έννοια της τροχιάς είναι κάτι που υφίσταται αντικειμενικά ή είναι απλώς μια υποκειμενική έννοια λόγω της αδυναμίας μας να λύσουμε ή να εφαρμόσουμε ντετερμινιστικές εξισώσεις. Στο ερώτημα αυτό η πρώτη εκδοχή ότι το κύμα ή το νέφος είναι αντικειμενικό μέγεθος κερδίζει όλο και πιο πολύ έδαφος καθώς οι πιθανοκρατικές διαδικασίες είναι ικανές να μας δώσουν το βέλος του

χρόνου το οποίο αποτελεί κυρίαρχο στοιχείο σε όλη τη φυσική πραγματικότητα,. Το βέλος του χρόνου σημαίνει ότι ο χρόνος ρέει μονόδρομα από το παρελθόν προς το μέλλον χωρίς αντιστροφή. Έτσι η θερμότητα ρέει από τις θερμές προς τις ψυχρές περιοχές και όχι αντίστροφα και ισοδύναμα η εντροπία στα κλειστά συστήματα μόνο αυξάνεται και δεν ελαττώνεται ποτέ.

Ντετερμινιστικές περιγραφές δύσκολα ή καθόλου δεν συμβιβάζονται με το βέλος του χρόνου καθώς η εξέλιξη κατά μήκος της τροχιάς στον φασικό χώρο μπορεί να λάβει χώρα κατά αντίστροφο φορά κάτι που αποκλείεται στις πιθανοκρατικές διαδικασίες αφού εδώ καταργείται η έννοια της τροχιάς. ΣΑν ξεκινήσουμε από την άποψη των στοχαστικών διαδικασιών θεωρώντας ότι η δυναμική ενός πολύπλοκου συστήματος είναι στοχαστική τότε όπως θα δούμε ακολούθως μπορούμε να δούμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η στοχαστική περιγραφή οδηγεί ή ταυτίζεται με ορισμένη ντετερμινιστική περιγραφή. Δηλαδή θεωρώντας ότι αυτό που υφίσταται αντικειμενικά είναι η στοχαστική – πιθανοκρατική δυναμική περιγραφή της φυσικής πραγματικότητας η ντετερμινιστική περιγραφή είναι μια οριακή κατάσταση όπου το νέφος πιθανότητας συρρικνώνεται σε μια συνάρτηση δέλτα. Αυτό σημαίνει ότι η πυκνότητα πιθανότητας για όλες τις δυνατές καταστάσεις μηδενίζεται εκτός μιας.



Σχήμα 4.3

Όπως δείχνει το σχήμα η πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ απλώνεται σε μια ευρεία περιοχή του x όπου το x αντιστοιχεί στις πιθανές καταστάσεις του συστήματος και το $f(x)$ στην πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση. Εκεί που η πυκνότητα πιθανότητας γίνεται μέγιστη ($f_{\max}$) εκεί βρίσκεται και η μέση τιμή $\langle x \rangle$ των μετρήσεων ενώ η απόκλιση από τη μέση τιμή έχει περιορισμένο εύρος Δx . Αντίθετα από αυτό όπως δείχνει το σχήμα σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δυνατόν η

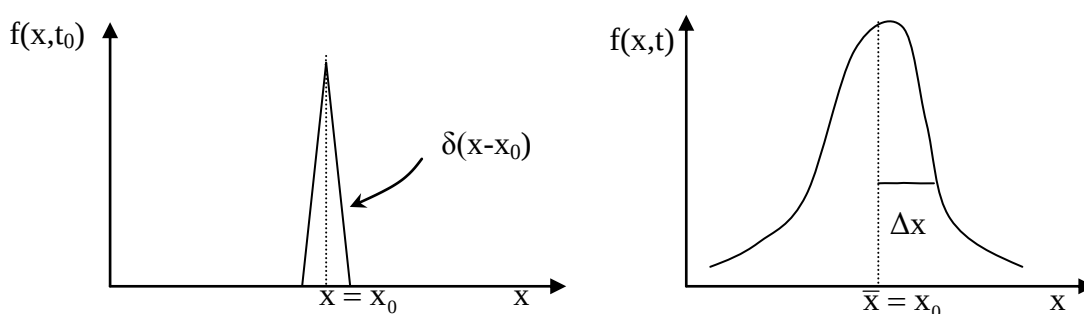
πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ να συρρικνωθεί σε μια συνάρτηση $\delta(x-x_0)$ η οποία ορίζεται ως ακολούθως

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) dx = 1 \end{cases}$$

Δηλαδή η συνάρτηση δέλτα μηδενίζεται παντού εκτός από την τιμήν $x = x_0$ όπου απειρίζεται έτσι ώστε όμως το ολοκλήρωμα της να είναι πεπερασμένο. Στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα των μετρήσεων είναι βέβαιο στην τιμή $x = x_0$ (μέση τιμή) ενώ η απόκλιση από τη μέση τιμή μηδενίζεται. Για τον λόγο αυτό όταν η πυκνότητα πιθανότητας είναι της μορφής δέλτα [$f(x) = \delta(x-x_0)$] τότε η στοχαστική δυναμική ταυτίζεται με ντετερμινιστική περιγραφή, όπου η απόκλιση από τη μέση τιμή μηδενίζεται

$$\Delta x = \left[\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \right]^{1/2} = 0$$

Η χρήση της συνάρτησης δέλτα μας βοηθά ακόμη για να κατανοήσουμε βαθύτερα την στοχαστική δυναμική των πολύπλοκων συστημάτων από τη άποψη ότι αν αρχικά έχουμε εντοπίσει την κατάσταση του συστήματος με μεγάλη βεβαιότητα, δηλαδή η αρχική πυκνότητα πιθανότητας τη στιγμή είναι σχεδόν μια συνάρτηση δέλτα τότε μετά από μικρό χρονικό διάστημα η βεβαιότητα θα έχει μεγαλώσει εξαιτίας της πολύπλοκης (χαοτικής) δυναμικής του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι σε σύντομο χρονικό διάστημα η πυκνότητα πιθανότητας διογκώνεται, ένα φαινόμενο γνωστό ως διάχυση



Σχήμα 4.4

Όπως δείχνει το ανωτέρω σχήμα η αρχική κατάσταση αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση δέλτα όπου το σύστημα έχει εντοπιστεί αρχικά στην κατάσταση x_0 με πιθανότητα 1 ενώ μετά από ορισμένο χρόνο η πυκνότητα πιθανοτήτων και άρα η αβεβαιότητα έχει διογκωθεί και η απόκλιση από τη μέση τιμή από μηδενική έγινε πεπερασμένη.

Η στοχαστική (χαοτική) δυναμική των πολύπλοκων συστημάτων οδηγεί στη εμφάνιση μακροσκοπικής τάξης και αυτοοργάνωσης. Αυτό σημαίνει ότι η στοχαστική δυναμική δημιουργεί συσχετίσεις μη μηδενικές στον χώρο και το χρόνο. Η ανάπτυξη αυτή των μακροσκοπικών συσχετίσεων αντιστοιχεί στη φυσική τάξη που παρατηρούμε παντού γύρω μας. Έτσι οι ντετερμινιστικές εξισώσεις που έχουμε εισάγει στα προηγούμενα για να περιγράψουμε τα πολύπλοκα φυσικά συστήματα παράγονται από τη στοχαστική δυναμική τους συστήματος ενώ τα μακροσκοπικά μεγέθη που υπεισέρχονται στην ντετερμινιστική περιγραφή αντιστοιχούν στις μέσες τιμές των στοχαστικών μεγεθών. Ιστορικά η εισαγωγή της στοχαστικής πιθανοκρατικής δυναμικής ακολούθησε την ντετερμινιστική περιγραφή πρώτα ως στατιστική φυσική μετά ως κβαντική δυναμική και τέλος ως χαοτική δυναμική. Ακολούθως θα περιγράψουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της στοχαστικής δυναμικής στις τρεις αυτές περιπτώσεις, αφού εισάγουμε τις βασικές αρχές της κλασσικής και κβαντικής δυναμικής.

4.2 Κλασσική δυναμική

Αρχικά θεωρήθηκε ότι κάθε πολύπλοκο σύστημα μπορεί να περιγραφεί από την κλασσική μηχανική. Στην κλασσική μηχανική κάθε φυσικό σύστημα θεωρείται ότι αποτελείται από πολλά υλικά σωματίδια που κινούνται στον χώρο και ασκούν δυνάμεις εξ αποστάσεων το ένα στο άλλο. Η κατάσταση ενός τέτοιου συστήματος περιγράφεται όπως έχουμε δει στα προηγούμενα από τις θέσεις και τις ταχύτητες των σωματιδίων:

$$K(t) = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N) = \vec{X}(t)$$

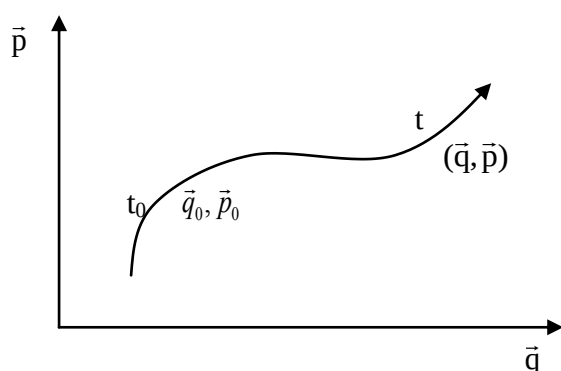
ή συναρτήσεις αυτών που είναι οι γενικευμένες θέσεις και όρμες:

$$K(t)=(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N) = (\vec{q}, \vec{p})$$

Η δυναμική αλληλεπίδραση των σωματιδίων περιγράφεται από την χαμιλτονιανή συνάρτηση H που ισούται με το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος:

$$H = T + U$$

Ο φυσικός χώρος περιγράφεται από τις συντεταγμένες των γενικευμένων θέσεων και ταχυτήτων $(\vec{q}_0, \vec{p}_0)$ και η τροχιά που διαγράφει η κατάσταση του συστήματος από στιγμή σε στιγμή περιγράφεται από τις εξισώσεις του Χάμιλτον:



$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}$$

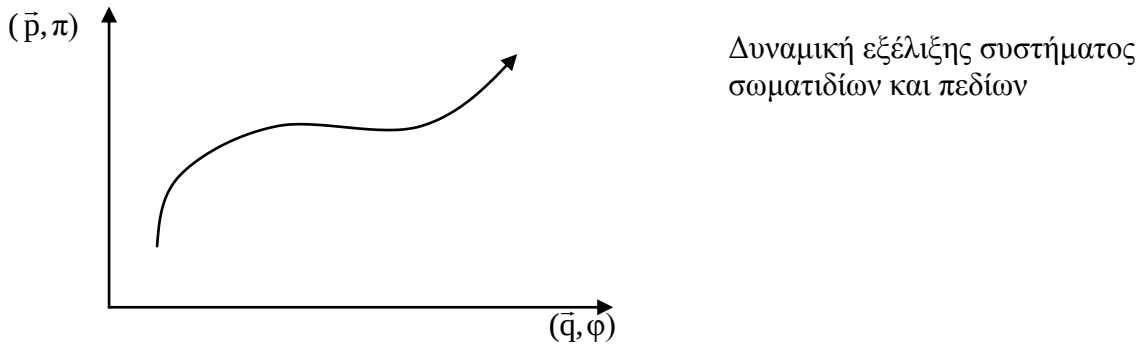
Σχήμα 4.5

Στην περίπτωση που έχουμε δυνάμεις μέσω πεδίων (βαρυτικό, ηλεκτρομαγνητικό κ.λπ) τότε εκτός από την δυναμική των σωματιδίων θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και την δυναμική των πεδίων. Τα πεδία περιγράφονται και αυτά μέσω δυναμικών μεγεθών $[\varphi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}, t)]$ κατά αναλογία με τα $(\vec{q}, \vec{p})$ σωματίδια. Συνολικά το σύστημα των πεδίων και των σωματιδίων αποτελεί ένα ενιαίο σύστημα. Για τα πεδία ισχύουν αντίστοιχες εξισώσεις Χάμιλτον όπως για τα σωματίδια:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\delta H^{\pi\delta}}{\delta \pi}, \quad \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\delta H^{\pi\delta}}{\delta \varphi}$$

όπου $H^{\pi\delta} = H^{\pi\delta}(\varphi, \pi)$ η χαμιλτονιανή του πεδίου.

Για το συνολικό σύστημα σωματιδίων και πεδίων έχουμε αντίστοιχες εξισώσεις Χάμιλτον, όπου η Χαμιλτονιανή είναι το άθροισμα των χαμιλτονιανών για τα σωματίδια και για τα πεδία: $H = H^{\sigma\mu} + H^{\pi\delta}$



Σχήμα 4.6

Τώρα ο φυσικός χώρος περιλαμβάνει ως συντεταγμένες τόσο τα δυναμικά μεγέθη των σωματιδίων όσο και των πεδίων.

4.3 Κβαντική δυναμική

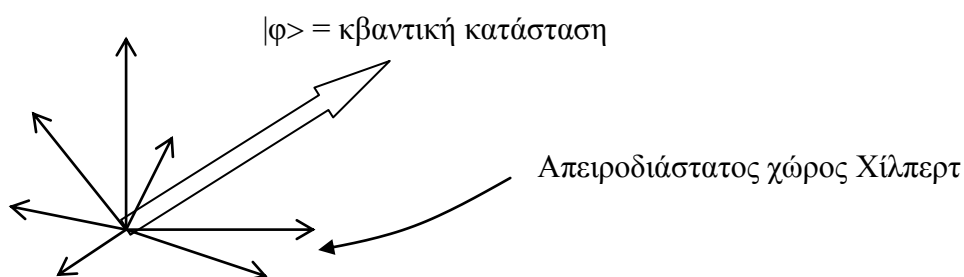
Στην Κβαντική δυναμική η έννοια του σωματιδίου και η έννοια του πεδίου δεν μπορούν να ξεχωρίσουν, διότι τα πειράματα έδειξαν ότι κάτι (π.χ. τα ηλεκτρόνια) που σε ορισμένα πειράματα φαίνεται να είναι σωματίδιο σε άλλα πειράματα το ίδιο φυσικό αντικείμενο φαίνεται να είναι κύμα. Η αρχή αυτή είναι γνωστή ως αρχή του δυϊσμού, και οδηγεί σε νέες αντιλήψεις για την φυσική πραγματικότητα. Για την Κβαντική φυσική (κβαντική δυναμική) που έχει πλήρως αποδειχθεί να ισχύει στο μικροσκοπικό επίπεδο, ένα φυσικό αντικείμενο δεν είναι ούτε σωματίδιο ούτε κύμα όπως κατανοούμε τις έννοιες αυτές στην κλασική μηχανική, αλλά άλλοτε μοιάζει με σωματίδιο, είναι δηλαδή τοπικά προσδιορισμένο και άλλοτε με κύμα, δηλαδή απλώνεται σε μεγάλες περιοχές του χώρου. Αν προσπαθήσουμε να εικονίσουμε αυτή την νέα μορφή πραγματικότητας στον κβαντικό (μικροσκοπικό) επίπεδο τότε φθάνουμε στα όρια των καθημερινών μας εννοιών. Αντίθετα η κβαντική θεωρία φανερώνει ότι τα φυσικά αντικείμενα στο μικροσκοπικό επίπεδο δεν μπορούν να θεωρηθούν ως στατικά όντα που κινούνται στον άδειο χώρο, αλλά θα πρέπει να εκληφθούν ως δυναμικές πολύπλοκες καταστάσεις που διαρκώς περνούν από την δυνατότητα στην πραγματικότητα. Στη κβαντική δυναμική ανακαλύπτουμε ότι τα φυσικά αντικείμενα είναι πολύπλοκες μορφές που δημιουργούνται διαρκώς και έρχονται στο είναι και στην ύπαρξη από τη χαώδη κατάσταση της δυνατότητας. Έτσι τα φυσικά όντα δεν κτίζονται από θεμελιώδεις δομικούς λίθους όπως το σπίτι από

τούβλα, αλλά είναι πολύπλοκες δομές και μορφές που παράγονται μέσα από μια πολύπλοκη λειτουργία και δυναμική. Στην κβαντική θεωρία αναδεικνύεται η μεγάλη δύναμη της μαθηματικής αφαιρετικής σκέψης. Πολύπλοκες μαθηματικές εξισώσεις έχουν ως λύση μορφές συναρτήσεων που περιγράφουν τις μορφές που παρατηρούμε γύρω μας, από το μικροσκοπικό έως το μακροσκοπικό επίπεδο. Οι εξισώσεις αυτές δεν μας εξηγούν πως γίνονται ή πως κατασκευάζονται τα πράγματα αλλά μόνο πως φαίνονται τα πράγματα ή πως είναι τα πράγματα. Η κβαντική δυναμική περιγράφει την κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος μέσω ενός διανύσματος γνωστού ως διανύσματος , και το οποίο συνήθως έχει άπειρες συνιστώσες και εκτείνεται σε έναν χώρο άπειρων διαστάσεων γνωστός ως χώρος Χίλμπερτ.

$$|\varphi\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle + \dots + c_n|a_n\rangle$$

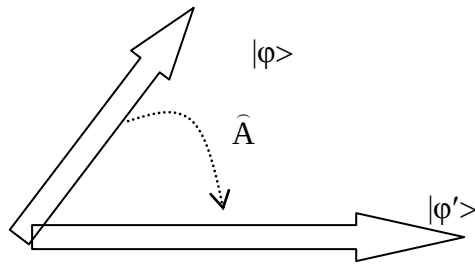
$$\text{ή } |\varphi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$$

όπου τα $|a_i\rangle$ αποτελούν την βάση του διανύσματος χώρου Χίλμπερτ.



Σχήμα 4.7

Τα φυσικά μεγέθη που μετρούνται μέσω των διαφόρων συσκευών μέτρησης μολονότι έχουν ονόματα γνωστά από την κλασσική μηχανική όπως: θέση, ορμή, ενέργεια, στροφορμή κ.λπ. είναι κάτι πολύ διαφορετικό από τα μεγέθη της κλασσικής μηχανικής. Η κύρια διαφορά είναι ότι τα κβαντικά φυσικά μεγέθη δεν αντιστοιχούν σε αντικειμενικές ιδιότητες των φυσικών συστημάτων. Τα κβαντικά φυσικά μεγέθη αντιστοιχούν στη σχέση που αναπτύσσει το φυσικό σύστημα με την συσκευή παρατήρησης μέσω αλληλεπίδρασής του με αυτή. Η πλέον δε πολύπλοκη συσκευή παρατήρησης είναι ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Από μαθηματικής απόψεως τα φυσικά μεγέθη αντιστοιχούν σε τελεστές του χώρου Χίλμπερτ.



$$\hat{A} |\varphi\rangle = |\varphi'\rangle$$

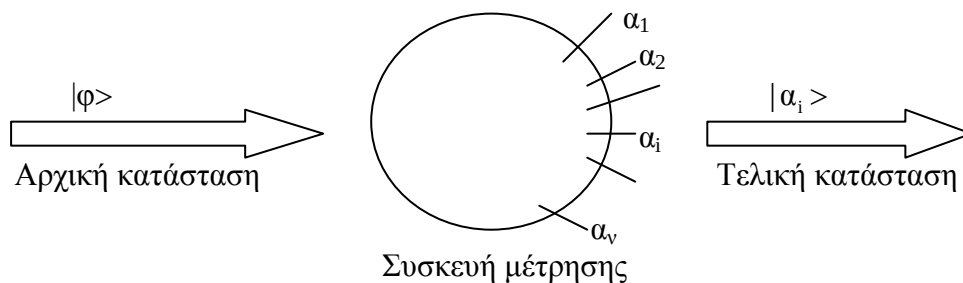
Ο τελεστής $\hat{A}$ δρα στο χώρο Χίλπερτ

Σχήμα 4.8

Το μετρούμενο φυσικό μέγεθος A αντιστοιχεί στον τελεστή $\hat{A}$ του χώρου Χίλπερτ, ο οποίος δρα στην κατάσταση (διάνυσμα Ket) $|\varphi\rangle$ και την μετασχηματίζει στην νέα κατάσταση

$$|\varphi\rangle \xrightarrow{\hat{A}} |\varphi'\rangle = \hat{A} |\varphi\rangle$$

Πρακτικά μπορούμε να πούμε ότι ο τελεστής A που περιγράφει μια παρατηρούμενη ιδιότητα του φυσικού συστήματος αντιστοιχεί και σε μια ορισμένη συσκευή παρατήρησης που μετασχηματίζει την αρχική σε μια τελική κατάσταση. Η τελική κατάσταση μετά την ολοκλήρωση της μέτρησης είναι μια από τις ιδιοκαταστάσεις ή ιδιοδιανύσματα του τελεστή A .

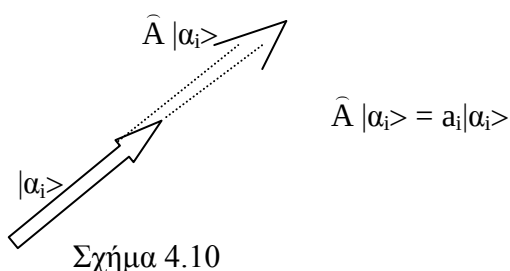


Σχήμα 4.9

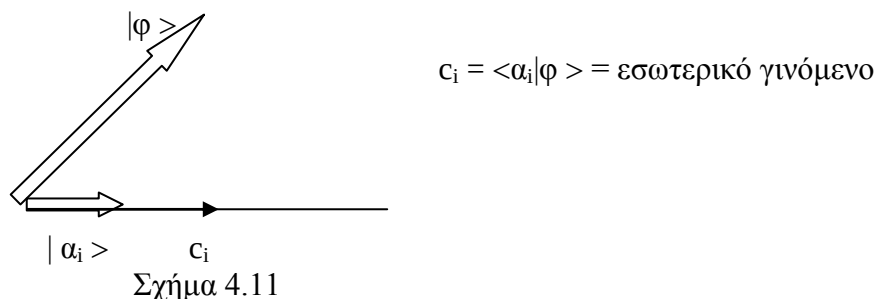
Όπως δείχνει το ανωτέρω σχήμα η συσκευή μέτρησης του μεγέθους A αλληλεπιδρώντας με την κατάσταση $|\varphi\rangle$ ενός κβαντικού συστήματος συνήθως την μετασχηματίζει σε μία νέα κατάσταση $|\alpha_i\rangle$ που ονομάζεται ιδιοκατάσταση του τελεστού $\hat{A}$. Το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή a_i του τελεστού A . Οι ιδιοτιμές $a_1, a_2, \dots, a_n$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle$ ενός τελεστού A ικανοποιούν τη σχέση:

$$\hat{A} |\alpha_i\rangle = a_i |\alpha_i\rangle$$

Δηλαδή όταν ο τελεστής A δρα σε ένα ιδιοδιάνυσμά του αλλάζει μόνο το μέτρο (το πολλαπλασιάζει a_i φορές) και αφήνει την ίδια διεύθυνση.



Η κβαντική θεωρία είναι στοχαστική (πιθανοκρατική) εξ αρχής και στα θεμέλιά της, καθόσον εάν γνωρίζουμε την κατάσταση ενός συστήματος τότε μπορούμε να γνωρίζουμε μόνο την πιθανότητα να πάρουμε το αποτέλεσμα μέσα από το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων κατά τη μέτρηση του μεγέθους A . Οι ιδιοτιμές ενός μεγέθους A μπορεί να είναι διακριτές ή και συνεχείς σε μία περιοχή των πραγματικών αριθμών. Οι ιδιοτιμές του μεγέθους A και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα αποτελούν τη σύνδεση της αφαιρετικής μαθηματικής δομής της κβαντικής θεωρίας με τη φυσική πραγματικότητα. Κάθε κατάσταση του κβαντικού συστήματος αναλύεται σε άθροισμα προβολών στα ιδιοδιανύσματα του φυσικού μεγέθους A .

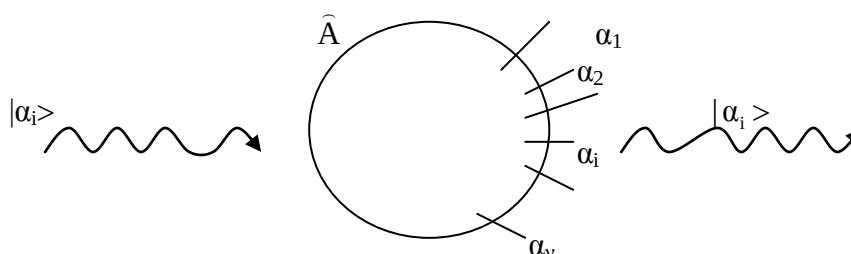


Η προβολή c_i του $|\varphi\rangle$ στο ιδιοδιάνυσμα $\langle\alpha_i|$ δίδεται από το εσωτερικό γινόμενο του $|\varphi\rangle$ πάνω στο $\langle\alpha_i|$. Το εσωτερικό γινόμενο $c_i = \langle\alpha_i|\varphi\rangle$ ονομάζεται πλάτος πιθανότητας διότι το τετράγωνό του $|c_i|^2$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα κατά τη μέτρηση του μεγέθους $\hat{A}$ να πάρουμε το αποτέλεσμα a_i που είναι μία από τις ιδιοτιμές του $\hat{A}$ και να περάσει το σύστημα από την κατάσταση $|\varphi\rangle$ στην κατάσταση $\langle\alpha_i|$. Βάσει αυτών ισχύει:

$$|\varphi\rangle = \sum_i c_i |\alpha_i\rangle + \int c(\lambda) |\alpha_\lambda\rangle d\lambda$$

όπου $c_i = \langle\alpha_i|\varphi\rangle$, $c(\lambda) = \langle\alpha_\lambda|\varphi\rangle$

Ο δείκτης $i=1, 2, \dots$ αντιστοιχεί στο διακριτό φάσμα ιδιοτιμών του τελεστού A και ο λ στο συνεχές. Η μόνη περίπτωση να έχουμε βέβαιο αποτέλεσμα είναι η αρχική κατάσταση $|\varphi\rangle$ να συμπίπτει με μία από τις ιδιοκαταστάσεις $|\alpha_i\rangle, |\alpha_\lambda\rangle$ του μεγέθους $\hat{A}$.



Σχήμα 4.12

Τα ιδιοδιανύσματα $|\alpha_i\rangle, |\alpha_\lambda\rangle$ ενός φυσικού μεγέθους αποτελούν και μία βάση ορθοκανονική του απειροδιάστατου γραμμικού χώρου Χίλμπερτ. Ένα άλλο χαρακτηριστικό των κβαντικών συστημάτων είναι η αδυναμία να μπορούμε να μετρούμε ταυτόχρονα όλα τα φυσικά μεγέθη που περιγράφουν το φυσικό μας σύστημα (αρχή αβεβαιότητας). Επίσης ένα κβαντικό σύστημα μπορεί να εμφανίζει διακριτά μέρη τα οποία π.χ. παρατηρούνται σε διαφορετικά σημεία του χώρου πλην όμως αυτά δεν παύουν να αποτελούν ένα αδιάσπαστο όλο επικοινωνώντας μεταξύ τους μέσω ατοπικών (πληροφοριακών) αλληλεπιδράσεων. Για τον λόγο αυτό τα κβαντικά συστήματα είναι κατεξοχήν παράδειγμα πολύπλοκων συστημάτων που ενώ περιέχουν κάποια διακριτά μέρη ταυτόχρονα τα μέρη αυτά βρίσκονται μεταξύ τους σε μεγάλη συσχέτιση ακόμη και όταν είναι απομακρυσμένα στον χώρο. Το χαρακτηριστικό αυτό της κβαντικής πολυπλοκότητας είναι αντίστοιχο της δυνατότητας να εμφανίζουν συσχετίσεις (αυτοργάνωση) άλλα πολύπλοκα συστήματα (ρευστά, χημικά συστήματα, κ.λ.π.) που έχουμε περιγράψει σε προηγούμενα κεφάλαια. Εάν υποθέσουμε ότι ένα κβαντικό σύστημα κατά την παρατήρησή του εμφανίζεται να αποτελείται από πολλά σωματίδια στις θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ τότε το αντίστοιχο πλάτος πιθανότητας εάν η αρχική κατάστασή του είναι η $|\psi\rangle$ δίδεται από το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N | \psi \rangle = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

όπου $|\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N\rangle$ η ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στις θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Εάν αντί των θέσεων μετρούμε τις ταχύτητες ή τις ορμές $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots$ των σωματιδίων τότε το αντίστοιχο πλάτος πιθανότητας είναι:

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N | \Psi \rangle = \Psi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N)$$

Ποτέ όμως δεν μπορούμε να μετρήσουμε ταυτόχρονα τις θέσεις και τις ορμές λόγω των αρχών αβεβαιότητας του Heisenberg. Η συνάρτηση $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ είναι γνωστή ως κυματοσυνάρτηση και το τετράγωνό της δίνει την πιθανότητα να παρατηρήσουμε το σύστημα στην κατάσταση $|\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N\rangle$

$$P(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = |\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)|^2$$

Μολονότι όμως το σύστημα κατά την παρατήρησή του εμφανίζει τη μορφή N σωματιδίων εντοπισμένων στο χώρο αυτό δε σημαίνει ότι το σύστημα αποτελείται από N σωματίδια ανεξάρτητα όπως συμβαίνει με την κλασική μηχανική. Το κβαντικό σύστημα είναι μια πολύπλοκη αδιάσπαστη πραγματικότητα που αλληλεπιδρώντας με τις συσκευές παρατήρησης παίρνει μια πραγματική μορφή N σωματιδίων στις θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ ή N σωματιδίων στις ορμές $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N$ χωρίς όμως οι δύο αυτές μορφές να μπορούν να παρατηρηθούν ταυτόχρονα όπως συμβαίνει στην κλασική μηχανική. Μάλιστα, ένα κβαντικό σύστημα μπορεί να εμφανίζεται σε μορφές όπου ο αριθμός των παρατηρουμένων σωματιδίων μεταβάλλεται αρχής γενομένης με τη μορφή του κενού $|0\rangle$ όπου δεν παρατηρείται κανένα σωματίδιο. Η κβαντική θεωρία δίνει τη δυνατότητα να έχουμε πιθανότητα δημιουργίας σωματιδίων από το κενό, πράγμα που δείχνει τον υψηλό βαθμό πολυπλοκότητας ενός κβαντικού συστήματος. Το πλάτος πιθανότητας εν γένει μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο καθώς και η κατάσταση $|\psi\rangle$ ενός κβαντικού συστήματος μπορεί να μεταβάλλεται με τον χρόνο μέσα στον χώρο Χίλμπερτ ικανοποιώντας την εξίσωση του Σρόντιγκερ,

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

όπου $\hat{H}$ ο τελεστής του Χάμιλτον ο οποίος περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της κβαντικής κατάστασης. Εάν αναλύσουμε το $|\psi\rangle$ στις ιδιοκαταστάσεις θέσεις τότε η εξίσωση του Στρόντιγκερ παίρνει τη μορφή

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \hat{H} \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$$

όπου $\hat{H} = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 \right) + \hat{U}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ η Χαμιλτονιανή του συστήματος.

Στην περίπτωση που το κβαντικό σύστημα εμφανίζεται στη μορφή ενός σωματιδίου η εξίσωση του Στρόντιγκερ γράφεται

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y, z, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + \hat{U} \psi$$

Ο τελεστής $\hat{U}$ είναι γνωστός ως τελεστής της δυναμικής ενέργειας. Στην κβαντική θεωρία ένα κβαντικό σωματίδιο (π.χ. ένα ηλεκτρόνιο, ένα πρωτόνιο) δεν είναι το κλασικό σωματίδιο. Αντίθετα είναι μια πολύπλοκη οντότητα που πριν αλληλεπιδράσει με τη συσκευή παρατήρησης δυνάμει βρίσκεται παντού στον χώρο, ενώ τη στιγμή της παρατήρησης υλοποιείται σε ένα μόνο σημείο του χώρου, με πιθανότητα «υλοποίησης» στο σημείο (x, y, z) να ισούται με το τετράγωνο της κυματοσυνάρτησης:

$$P(x, y, z, t) = |\psi(x, y, z)|^2$$

Τέλος η εξίσωση του Στρόντιγκερ μπορεί να μας δώσει ως ιδιοκαταστάσεις στον χώρο Χίλμπερτ όλες τις παρατηρούμενες μορφές της ύλης στον μικρόκοσμο: στοιχειώδη σωματίδια, άτομα, μόρια, κ.λ.π.

4.4. Στατιστική περιγραφή της πολυπλοκότητας

Η στατιστική περιγραφή της πολυπλοκότητας εφαρμόζεται όταν ο βαθμός πολυπλοκότητας είναι τόσο υψηλός οπότε είναι αδύνατον να γνωρίζουμε είτε την κλασική κατάσταση $(\vec{q}, \vec{p}, t)$ ενός συστήματος είτε την κβαντική κατάσταση $|\psi, t\rangle$

$$(\vec{q}, \vec{p}) = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$|\psi\rangle = (|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle \dots)$$

όπου $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle \dots$ ένα πλήρες σύστημα ιδιοκαταστάσεων. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε μία πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί το σύστημα σε ορισμένη κατάσταση

$$\rho(\vec{q}, \vec{p}, t) = \text{πυκνότητα πιθανότητας για την κλασική κατάσταση } (\vec{q}, \vec{p})$$

$$\hat{\rho}(t) = \sum_n |\psi_n\rangle \hat{P}_n \langle \psi_n| \quad \text{τελεστής πυκνότητας}$$

όπου $\hat{P}_n$ η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κβαντική κατάσταση. Η κλασική πυκνότητα πιθανότητας ικανοποιεί την κλασική εξίσωση Λιουβίλ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \hat{L}^{\kappa\lambda} \rho \quad \text{κλασική εξίσωση Λιουβίλ}$$

και ο τελεστής πυκνότητας $\hat{\rho}$ την κβαντική μορφή της εξίσωσης Λιουβίλ:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \hat{L}^{\kappa\lambda} \hat{\rho} \quad \text{κβαντική εξίσωση Λιουβίλ}$$

Η σημασία της στατιστικής περιγραφής έγκειται στον υπολογισμό της μέσης τιμής A ενός φυσικού μεγέθους βάσει των εξισώσεων:

$$\bar{A} = \langle A \rangle = \int \rho(\vec{q}, \vec{p}) A(\vec{q}, \vec{p}) d\vec{p} d\vec{q} \quad \text{κλαστική στατιστική}$$

$$\bar{A} = \langle A \rangle = \sum_n \langle \psi_n | \hat{A} \hat{\rho} | \psi_n \rangle \quad \text{κβαντική στατιστική}$$

όπου $A(\vec{q}, \vec{p})$ η κλασική περιγραφή του μεγέθους A , και $\hat{A}$ η κβαντική περιγραφή του μεγέθους A . Στην στατιστική περιγραφή ενός πολύπλοκου συστήματος οι πυκνότητες πιθανότητας ρ και $\hat{\rho}$ σχετίζονται με τη συνάρτηση διαμερισμού Z (κλασική ή κβαντική)

$$\rho = e^{-\beta H} Z_{\kappa\lambda}^{-1} \quad \text{κλαστική στατιστική}$$

$$\hat{\rho} = Z_{\kappa\beta\text{αν}}^{-1} e^{-\beta \hat{H}} \quad \text{κβαντική στατιστική}$$

όπου H , $\hat{H}$ η Χαμιλτονιανή (κλασική ή κβαντική του συστήματος). Βάσει της συνάρτησης Z ενός πολύπλοκου συστήματος μπορούμε να υπολογίζουμε όλα τα γνωστά θερμοδυναμικά μεγέθη: εσωτερική ενέργεια U , εντροπία S , ενθαλπία H , ελεύθερη ενέργεια F , κ.λ.π.

4.5. Μαρκοβιανή μοντελοποίηση της πολυπλοκότητας

Η στατιστική περιγραφή της πολυπλοκότητας (είτε κλασική είτε κβαντική) μας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο για πολύπλοκα συστήματα κοντά στη θερμοδυναμική ισορροπία του συστήματος. Για πολύπλοκα συστήματα μακριά από θερμοδυναμική ισορροπία θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη στοχαστική περιγραφή του Μαρκόβ (Μαρκοβιανή στοχαστικότητα). Εδώ θα περιγράψουμε μόνο την κλασική περιγραφή των Μαρκοβιανών στοχαστικών διαδικασιών ενώ αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν για τις κβαντικές Μαρκοβιανές διαδικασίες. Στην κλασική

Μαρκοβιανή περιγραφή της πολυπλοκότητας κάθε μεταβλητή X του συστήματος είναι μια τυχαία μεταβλητή. Δηλαδή πριν τη μέτρησή της δεν μπορεί να έχει ορισμένη τιμή X αλλά μια πυκνότητα πιθανότητας $p(x)$ να πάρει ορισμένες τιμές στο διάστημα $(x, x+dx)$.

$$\text{Πιθανότητα } (x, x+dx) = p(x)dx$$

Η πυκνότητα πιθανότητας μπορεί να μεταβάλλεται με τον χρόνο:

$$p = p(x,t)$$

και για την Μαρκοβιανή πολυπλοκότητα ισχύει η σχέση:

$$P(x,t) = \int w(x, t/x', t') p(x', t) dx'$$

όπου $p(x,t)$ η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση x τη στιγμή t , $p(x', t')$ η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση x' την στιγμή t' και $w(x, t/x', t')$ η πιθανότητα (μετάβασης) να περάσει το σύστημα από την κατάσταση x' τη στιγμή t' στην κατάσταση x τη στιγμή t .

Στις Μαρκοβιανές διαδικασίες η πιθανότητα μετάβασης $w(x, t/x', t')$ δεν εξαρτάται από στιγμές προηγούμενες της t . Αποδεικνύεται ότι για τις Μαρκοβιανές διαδικασίες όσον αφορά τη μεταβολή με τον χρόνο της πυκνότητας πιθανότητας ισχύει η ακόλουθη εξίσωση Fokker-Planck:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (F(x,t)p(x,t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (D(x,t)p(x,t))$$

όπου $F(x,t)$ ο συντελεστής ροής και $D(x,t)$ ο συντελεστής διάχυσης.

Αντίστοιχα για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει η στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dX}{dt} = F(x, t) + \sigma(x, t)w(t) \quad \text{με } \sigma = \sqrt{D}$$

όπου $w(t)$ ένα σήμα λευκού θορύβου, δηλαδή ένα σήμα με σταθερό φάσμα ισχύος και άπειρες συχνότητες. Μπορεί ναδειχθεί ότι η μέση τιμή της διαφοράς των γειτονικών τιμών της X συνδέεται με τη συνάρτηση ροής $F(x,t)$:

$$\langle x(t+dt) - x(t) \rangle = F(x,t)$$

δεδομένου ότι τη στιγμή t έχουμε την τιμή x της τυχαίας μεταβλητής X . Αντίστοιχα η μέση τιμή του τετραγώνου της διαφοράς των γειτονικών τιμών δίνεται από τη διάχυση $D(x,t)$ μέσω της σχέσης:

$$\langle ((x(t+dt) - x(t))^2) \rangle = D(x, t)$$

Εάν έχουμε μία πολύπλοκη δυναμική που περιγράφεται μέσω πολλών μεταβλητών $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{X}$ τότε η εξίσωση Fokker-Planck γράφεται:

$$\frac{\partial p(\vec{x}, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial (FP)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (Df)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Ενώ για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει το αντίστοιχο σύστημα των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, t) + \sigma(\vec{x}, t) \vec{w}(t)$$

όπου $w(t) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ή σήματα λευκού θορύβου.

Η θεωρία των Μαρκοβιανών διαδικασιών αποτελεί τη βάση θεωρητικής περιγραφής και μοντελοποίησης των πειραματικών χρονοσειρών με συνεχές φάσμα.

4.6 Στοχαστικά αυτόματα

Όπως έχουμε δει στα προηγούμενα ένα αυτόματο περιέχει διακριτές εσωτερικές καταστάσεις που περιγράφονται από την μεταβλητή. Οι εσωτερικές καταστάσεις

$$t_1 \Rightarrow \alpha_1, t_2 \Rightarrow \alpha_2, \dots, t_n \Rightarrow \alpha_n, t_{n+1} \Rightarrow \alpha_{n+1} \dots$$

του αυτόματου μπορούν να μεταβάλλονται με τον χρόνο έτσι ώστε την στιγμή t_1 να έχουμε την κατάσταση α_1 , την στιγμή t_2 την κατάσταση α_2 κ.ο.κ.

Το ντετερμινιστικό αυτόματο περιγράφεται από την απεικόνιση:

$$\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$$

Αντίθετα, στο στοχαστικό αυτόματο η γνώση της επόμενης κατάστασης καθορίζεται μόνο πιθανοκρατικά από την προηγούμενη κατάσταση βάσει της σχέσης:

$$P_{n+1}(\alpha) = \sum_{\alpha'} w(\alpha/\alpha') P_n(\alpha')$$

όπου $P_{n+1}(\alpha)$ η πιθανότητα να βρεθεί το αυτόματο στην κατάσταση α_n την στιγμή t_n , $P_n(\alpha')$ η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση α' και $w(\alpha/\alpha')$ η πιθανότητα μετάβασης από την εσωτερική κατάσταση α' στην α . Το Σ σημαίνει άθροισμα σε όλες τις εσωτερικές καταστάσεις α' που περιέχει το αυτόματο. Από την θεωρία πιθανοτήτων προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\sum_{\alpha'} P_n(\alpha) = 1, \quad \sum_{\alpha'} w(\alpha/\alpha') = 1$$

Εδώ έχουμε υποθέσει ότι το αυτόματο δεν έχει μνήμη αφού η πιθανότητα μετάβασης $w(\alpha/\alpha')$ εξαρτάται μόνο από την προηγούμενη κατάσταση του αυτόματου.

Στοχαστικά κυψελωτά αυτόματα

Εάν έχουμε ένα δίκτυο πολλών (N) στοχαστικών αυτομάτων α_j , $j=1,2, \dots, N$ τότε αντίστοιχα η πιθανότητα να ευρεθεί το σύστημα των αυτομάτων σε ορισμένη εσωτερική κατάσταση ικανοποιεί με τον χρόνο τη σχέση:

$$P_n(\{\alpha_j\}) = \sum_{\{\alpha'_j\}} w(\{\alpha_j\}/\{\alpha'_j\}) P_n(\{\alpha'_j\})$$

όπου $\{\alpha_j\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ η συνολική κατάσταση του δικτύου των αυτομάτων ορισμένη χρονική στιγμή. $P_n(\{\alpha_j\})$ η πιθανότητα να ευρεθεί το δίκτυο των αυτομάτων στην κατάσταση $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_N\}$ την στιγμή t_n και $w(\{\alpha_j\}/\{\alpha'_j\})$ η πιθανότητα μετάβασης του συστήματος από την κατάσταση $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_N\}$ στην κατάσταση $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$.

Μέχρι εδώ θεωρούμε ότι όλα τα αυτόματα του δικτύου είναι συγχρονισμένα και μεταβάλλουν κατάσταση συγχρόνως την ίδια στιγμή. Γενικότερα είναι δυνατόν το δίκτυο (σύστημα) των αυτομάτων να είναι ασύγχρονο. Ένα ασύγχρονο αυτόματο αλλάζει κατάσταση μια τυχαία στιγμή t και όχι σε προκαθορισμένες χρονικές στιγμές. Για ένα ασύγχρονο αυτόματο ισχύει:

$$P(\alpha, t) = \sum_{\alpha'} w(\alpha, t/\alpha', t') P(\alpha', t') \quad t < t'$$

Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε τον ρυθμό μετάβασης του αυτόματου ($V(\alpha/\alpha')$) βάση της σχέσης :

$$W(\alpha, t+\delta t/\alpha', t) = V(\alpha/\alpha')\delta t$$

Δηλαδή ο ρυθμός $V(\alpha/\alpha')$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση την στιγμή t στην κατάσταση α' την στιγμή $t+\delta t$ όταν το δt είναι μικρό. Αντίστοιχα η πιθανότητα να μείνει το αυτόματο στην ίδια κατάσταση για μικρό δt δίνεται από τη σχέση:

$$W(\alpha', t+\delta t/\alpha', t) = 1 + V(\alpha'/\alpha')\delta t + \dots$$

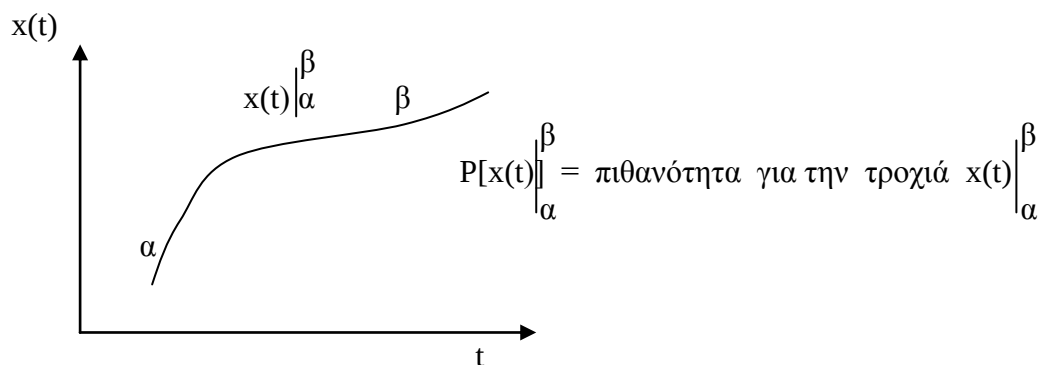
διότι για $\delta t = 0$ η πιθανότητα γίνεται ίση με ένα. Για μικρό δt η εξίσωση που δίνει την πιθανότητα ενός ασύγχρονου αυτόματου γράφεται:

$$P(\alpha, t+\delta t) = P(\alpha, t) + \sum_{\alpha'} V(\alpha/\alpha') P(\alpha', t) \delta t + \dots$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{\alpha'} V(\alpha/\alpha') P(\alpha', t) + \dots$$

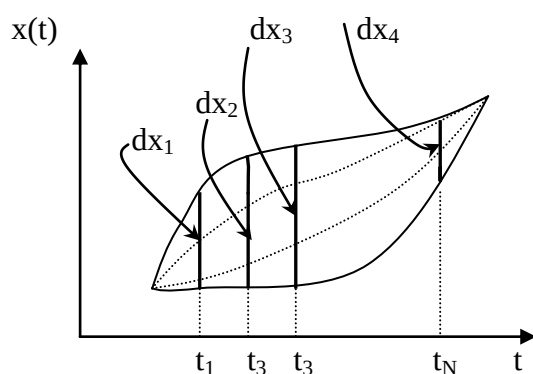
4.7 Συνεχείς τυχαίες διαδικασίες.

Ενώ για ένα αυτόματο οι δυνατές καταστάσεις του $\{a\}$ είναι διακριτές μεταξύ των, είναι δυνατόν να έχουμε αυτόματα των οποίων οι καταστάσεις είναι συνεχείς $\{x\}$. Στην περίπτωση αυτή η χρονική εξέλιξη $x(t)$ του συνεχούς αυτομάτου περιγράφεται από μια συνεχή ακολουθία καταστάσεων όπως δείχνει το ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 4.13

Το συνεχές αυτόματο ταυτίζεται με ένα δυναμικό σύστημα του οποίου η τροχιά δεν μπορεί να καθορισθεί. Τότε είναι δυνατόν να υπολογίζουμε την πυκνότητα πιθανότητας $P[x(t)]$ να έχουμε ορισμένη τροχιά σε μια περιοχή γειτονικών τροχιών όπως δείχνει το σχήμα



Σχήμα 4.14

$Dx(t) =$ Περιοχή τροχιών

$$Dx(t) = dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

Η πιθανότητα να έχουμε μια τροχιά μέσα σε μια περιοχή $Dx(t)$ τροχιών όπως δείχνει το σχήμα δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Πιθανότητα}(x_i < x(t) < x_i + \delta x_i) = P[x(t)]Dx(t) = P[x(t)] \prod_{i=1}^N dx_i$$

Από την πιθανότητα της τροχιάς μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να βρεθεί το αυτόματο σε μια κατάσταση x_i την στιγμή t_i ή σε περισσότερες καταστάσεις, π.χ. την πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση x_1 την στιγμή t_1 κ.ο.κ.

Βιβλιογραφία

- Argyris J., An Exploration of Chaos, North-Holland, 1994.
- Bak Per, How nature works, Copernicus, 1996.
- Barnsley M., Fractals Everywhere, Academy Press, 1998.
- Bohm Arno, Quantum Mechanics, Foundation and Applications, Springer – Verlag, 1993.
- Bountis Tassos, Fundamental Concepts of Classical Chaos, Series of Scientific Monographies “Mathematics and Fundamental Applications”, Patra , 1992.
- Briggs John and Peat David, Ο Ταραγμένος Καθρέφτης, Εκδόσεις Κάτοπτρο, 1991.
- Coveney Peter and Highfield Roger, Το Βέλος του Χρόνου, Εκδόσεις Κάτοπτρο, 1990.
- Davies Paul, The New Physics, Cambridge, University Press, 1989.
- Gleick James, Χάος, Μια Νέα Επιστήμη, Εκδόσεις Κάτοπτρο, 1990.
- Gwilym M. Jenkins and Donald G. Watts, Spectral Analysis and its Applications, Holden Day, 1968.
- Haken Hermann, Advanced Synergetics, Springer – Verlag, 1983.
- Kadanoff L. P., From Order to Chaos, Essays: Critical, Chaotic and Otherwise, World Scientific Series on Nonlinear Science, Editor L. O. Chua, University of California, Berkley, 1993.
- Lundqvist S., March N. and Tosi M., Order and Chaos in Nonlinear Physical Systems, Tosi, N. P. Iv. Sieres, 1988.
- Mikhailov A.S., Foundations of Synergetics I, Springer – Verlag, 1990.
- Mikhailov A.S., Loskutov A. Yu., Foundations of Synergetics II, Springer – Verlag, 1991.
- Nicolis, J. S., Dynamics of Hierarchical Systems, Springer, Berlin, 1986.
- Pearson E. Carl, Handbook of Applied Mathematics, Von Nostrand Reinhold Company.
- Peitgen H., Jurgens H., Saupe D. Chaos and Fractals, , Sprienger – Verlag, New York, 1992.
- Priestley N. B., Non - linear and Non – stationary time sieres, Academic Press, 1988.

Prigogine I., From Being To Becoming, time and Complexity in the Physical Sciences, , W.H. Freeman & Company, San Francisco.

Prigogine I. and Stengers Isabelle, Order Out of Chaos, Alvin Toffler, 1984.

Prigogine I., Non – equilibrium Statistical Mechanics, J. Wiley and Sons, New York, 1962.

Prigogine I., Stengers I., The End Of Certainty, 1996.

Temam Roger, Infinite – Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer – Verlag, 1988.

Tsonis A. A., Chaos, From Theory to Applications, Plenum Press, New York, 1992.

Ulam Stanislaw, From Cardinals to Chaos, Reflections on the Life and Legacy of Stanislaw Ulam, Necia Grand Cooper, Editor, Cambridge, University Press.

Παπαϊωάννου Γ., Χαρακτηριστικές Χρονοσειρές, Θεωρία και Πράξη, , Leader Books, 2000.

Συριόπουλος Κώστας και Λεοντίσης Αλέξανδρος, Χάος, Ανάλυση και πρόβλεψη χρονοσειρών, , Εκδόσεις Ανικούλα, Θεσσαλονίκη, 2000.