

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ: ΜΙΑ ΠΡΟΚΛΗΣΗ

Τζεκάκη Μαριάννα, Αν. Καθηγήτρια, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο χώρος της προσχολικής μαθηματικής εκπαίδευσης έκανε τα τελευταία χρόνια σημαντικά βήματα, αναγνωρίζοντας τη σημασία ανάπτυξης μαθηματικών νοημάτων στα μικρά παιδιά και ενισχύοντας διδακτικές προσεγγίσεις που στηρίζουν μια τέτοια κατεύθυνση. Η ανάπτυξη όμως μιας εκπαίδευσης υψηλού επιπέδου προϋποθέτει την δημιουργία κατάλληλου διδακτικού υλικού και την αντίστοιχη προετοιμασία των εκπαιδευτικών. Στην παρούσα εισήγηση δοκιμάζουμε να αποσαφηνίσουμε το πιο ουσιαστικό στοιχείο για τη μαθηματική εκπαίδευση της προσχολικής ηλικίας που είναι το πώς να ενθαρρύνουμε τους μικρούς μαθητές, ανάλογα με το επίπεδό τους, να δρουν και να σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο. Παράλληλα παρουσιάζουμε τα χαρακτηριστικά που καλείται να έχει μια τάξη των Μαθηματικών ώστε να αποτελεί μια δυναμική κοινότητα μάθησης.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

μαθηματική εκπαίδευση, προσχολική ηλικία, μαθηματικές δραστηριότητες, κοινότητα μάθησης

MATHEMATICS EDUCATION IN EARLY CHILDHOOD: A CHALLENGE

Tzekaki Marianna, Assoc. Professor, Aristotle University of Thessaloniki

ABSTRACT

Early mathematics education has considerably advanced during the last years. The development of substantial mathematical meanings to the young children is generally valued and new teaching approaches are encouraged to this direction. However, the design of a high quality early mathematics education remains a challenge as it presupposes the improvement of the teaching material and the appropriate preparation of the teachers. In the present paper, we attempt to clarify the most important part of early mathematics education that is how to encourage the pre-schoolers to think and act mathematically, according to their level. Moreover, we present the main characteristics of an early mathematics class that functions as a community of learning.

KEY WORDS

Early mathematics education, mathematical tasks, community of learning

Εισαγωγή

Κανείς στις μέρες μας δεν μπορεί να αμφισβητήσει τη σημασία της μαθηματικής εκπαίδευσης και για το λόγο αυτό δεν χρειάζεται μάλλον να απαντήσουμε στο ερώτημα «γιατί μαθαίνουμε Μαθηματικά». Όλοι παραδέχονται ότι η επιστήμη αυτή, εξαιτίας της πολλαπλότητας των εφαρμογών της, αναδεικνύεται απαραίτητη στον πολίτη του αιώνα των επιστημονικών και τεχνολογικών εξελίξεων, ενώ παράλληλα τον εξοπλίζει με μια ιδιαίτερη συλλογιστική ικανότητα (Schoenfeld, 1992).

Επίσης κανείς δεν προβληματίζεται για το αν η μάθηση των Μαθηματικών ξεκινάει από τις μικρότερες ηλικίες και κατά συνέπεια αν είναι στοιχείο και της προσχολικής εκπαίδευσης. Σήμερα όλοι γνωρίζουμε ότι η ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών στοχεύει να εξασκήσει τα μικρά παιδιά σε σημαντικές μαθηματικές διαδικασίες κι έννοιες που ανταποκρίνονται στο παρόν αλλά επενδύουν και στο μέλλον τους. Η ολόπλευρη ανάπτυξη στις ηλικίες αυτές είναι κρίσιμη, αλλά και οι ίδιες οι μαθηματικές έννοιες ακολουθούν μια αργή πορεία σχηματισμού (Ginsburg, Klein, Starkey, 1998, Greenes, 1999, Mullighan & Vergnaud, 2006)

Ο κοινωνικός χαρακτήρας που απέκτησε η εκπαίδευση το δεύτερο μισό του εικοστού αιώνα πρόβαλλε με έμφαση το αίτημα «Μαθηματικά για όλους» που το συσχέτισε με ζητήματα δημοκρατίας

και κοινωνικής δικαιοσύνης (Kilpatric, 1992, Steen, 2001), αλλά ακόμα οι κοινωνίες δεν κατανοούν γιατί το να μάθουν τα παιδιά μας Μαθηματικά δεν είναι απλά μια ευκαιρία αλλά και ένα δικαίωμα. Και δυστυχώς κατανοούν ακόμα λιγότερο ότι η μάθηση αυτή είναι σημαντική στην προσχολική ηλικία, γιατί χωρίς αυτή την αρχική εκπαίδευση τα νέα παιδιά αρχίζουν από νωρίς να χάνουν και τις ευκαιρίες και τα δικαιώματά τους.

Μια μαθηματική εκπαίδευση με προσανατολισμό την ολόπλευρη ανάπτυξη των παιδιών δεν έχει κανένα από τα χαρακτηριστικά που την βάραιναν σε παλαιότερες εποχές, δηλαδή δεν ενδιαφέρεται να βάλει στο μυαλό των μαθητών προκατασκευασμένες ιδέες και διαδικασίες χωρίς νόημα. Μεθοδεύει κυρίως την καλλιέργεια μιας δυναμικής πνευματικής ικανότητας στο άτομο *να σκέφτεται και να δρα με μαθηματικό τρόπο*.

Η θέση αυτή εμφανίζεται και στον νέο οδηγό σπουδών, οπότε είναι σε όλους γνωστή (Δαφέρμου, Κουλούρη, & Μπασογιάννη, 2005). Αναφέρει ότι:

«...κυρίαρχος στόχος είναι τα παιδιά να αρχίσουν να σκέφτονται με τρόπους που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική επιστήμη... Για να αρχίσουν να σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο τα μικρά παιδιά είναι αναγκαίο να τους δίνονται ευκαιρίες να εξερευνούν, να χειρίζονται και να οργανώνουν συγκεκριμένα υλικά...» (σ. 155).

Αλλά τι σημαίνει ακριβώς *«μαθαίνω να σκέφτομαι με τρόπους που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική επιστήμη»*;

Οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης το προσδιορίζουν ως την ικανότητα του ατόμου να προσεγγίζει τις καταστάσεις σφαιρικά, να διερευνά εναλλακτικές λύσεις, να αναγνωρίζει κοινές δομές πίσω από καταστάσεις διαφορετικού περιεχομένου, να εντοπίζει τις μεταξύ τους σχέσεις, να επεξεργάζεται κοινούς τρόπους αντιμετώπισης αλλά και να αναστοχάζεται πάνω στη δράση και σκέψη του (Steinbring, 2003). Αυτή η *«μαθηματική τάση»*, όπως αποκαλείται, μπορεί να εξοπλίσει τα νέα παιδιά με ένα τρόπο θεώρησης, ανάλυσης και επεξεργασίας των καταστάσεων που θα τους επιτρέψει να τις διαχειριστούν όπως κρίνουν ωφέλιμο. Αλλά πώς ακριβώς πραγματοποιείται αυτό;

Ο σχεδιασμός μιας μαθηματικής εκπαίδευσης που επιτρέπει τους μαθητές να αξιοποιήσουν αυτή τη διάσταση των Μαθηματικών, δηλαδή στην ουσία να εμβαθύνουν στο πώς δημιουργούνται και πώς ακριβώς λειτουργούν και να ασκηθούν να λειτουργούν και οι ίδιοι με τον τρόπο αυτό, εντός και εκτός της μαθηματικής επιστήμης, είναι ένα ιδιαίτερα απαιτητικό έργο.

Από τον τίτλο της εισήγησης γίνεται φανερό ότι η πραγματοποίηση του είναι για όλους μας μια μεγάλη πρόκληση, καθώς προϋποθέτει κάτι επίσης πολύ σημαντικό: να μπορούν κι οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί να σκέφτονται και να λειτουργούν με μαθηματικό τρόπο.

Δεν είναι εύκολο σε λίγες γραμμές να εξηγηθεί η μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική ηλικία, ωστόσο θα δοκιμάσουμε να αποσαφηνίσουμε το πιο ουσιαστικό στοιχείο από αυτήν που είναι το πώς να ενθαρρύνουμε τους μικρούς μαθητές μας *να δρουν και να σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο*, αντίστοιχο βέβαια με το επίπεδό τους.

Μαθηματικά στην προσχολική ηλικία

Ο χώρος της προσχολικής μαθηματικής εκπαίδευσης έκανε σημαντικά βήματα τα τελευταία χρόνια. Μελετήθηκαν οι ικανότητες και οι δυναμικές των παιδιών της ηλικίας αυτής, συγκεντρώθηκε ερευνητικό υλικό, δοκιμάστηκαν νέες μορφές διδασκαλίας και μάθησης, οι νέες ιδέες διαδόθηκαν αρκετά στο χώρο των εκπαιδευτικών της προσχολικής ηλικίας που προχώρησαν τη σκέψη τους και τη διδακτική τους πρακτική (Τζεκάκη, 2003, 2007).

Ωστόσο η ανάπτυξη μιας αποτελεσματικής μαθηματικής εκπαίδευσης και πολύ περισσότερο η ανάπτυξη της μαθηματικής τάσης που αναφέραμε είναι πιο περίπλοκη από όσο αρχικά είχε γίνει αντιληπτό. Για πολλούς εκπαιδευτικούς το *«μαθαίνω μαθηματικά»* συνδέεται ακόμα με την ενασχόληση των παιδιών με καταστάσεις που χρησιμοποιούν μαθηματικές έννοιες ή διαδικασίες. Πολύ συχνά οι καταστάσεις αυτές είναι οι ίδιες με εκείνες που χρησιμοποιούσαμε τα προηγούμενα χρόνια, απλά σήμερα τις ονομάζουμε μαθηματικές. Έτσι τελικά μοιάζει σαν να δεχόμαστε ότι τα παιδιά μαθαίνουν Μαθηματικά γιατί εμπλέκονται σε άτυπες μαθηματικές διαδικασίες ή ασχολούνται με μαθηματικά αντικείμενα, σχήματα και αριθμούς. Ο νέος οδηγός (Δαφέρμου, Κουλούρη, Μπασογιάννη, 2005) αφήνει αυτή την εντύπωση, όπως για παράδειγμα στο *«Μαγειρική και Μαθηματικά»*, όπου αναφέρεται:

«η συμμετοχή τους στη μαγειρική μπορεί να αποτελέσει για τα μικρά παιδιά χρήσιμη μαθηματική δραστηριότητα, καθώς εμπεριέχει δυνατότητα αρίθμησης, εκτίμησης ποσοτήτων, βάρους, χωρητικότητας και

όγκου. Προφανώς μια δραστηριότητα μαγειρικής υποστηρίζει τη μαθηματική σκέψη στο βαθμό που οι ενήλικοι αναδεικνύουν και αξιοποιούν τα μαθηματικά στοιχεία, δίνοντας ερεθίσματα...» (σ.161)

Με την παρουσίαση αυτή η ονομαζόμενη «μαθηματική δραστηριότητα» ολισθαίνει σε παλιές μορφές που δεν είναι ούτε δραστηριότητες, ούτε μαθηματικές. Τα παιδιά αντιμετωπίζουν τις καταστάσεις που τους προτείνονται με «καθημερινές» έννοιες στις οποίες δεν δίνουν ιδιαίτερο νόημα, ούτε γενικεύουν, αν δεν έχουν για αυτό κάποιο κίνητρο και, κατά συνέπεια, δεν αναπτύσσουν νέες κι οπωσδήποτε δεν αναπτύσσουν μαθηματικές ιδέες. Οι εκπαιδευτικοί θα χρειαστεί να αναδείξουν τα απαραίτητα στοιχεία για την προσέγγισή τους και με τον τρόπο αυτό να υποδείξουν τις ιδέες που ενδιαφέρονται να αναπτύξουν. Ίσως θα ήθελαν να ενθαρρύνουν την αναζήτηση και τη δράση των παιδιών, μόνο που τις περισσότερες φορές η δράση αυτή δεν είναι αυτόνομη και δεν οδηγεί από μόνη της σε καμία ιδιαίτερη μαθηματική έννοια. Το ζήτημα της αποτελεσματικής μαθηματικής μάθησης στις μικρές ηλικίες εξακολουθεί να αποτελεί ένα πρόβλημα.

Στο παγκόσμιο σκηνικό, δεν είναι μικρός ο αριθμός των επιστημόνων που ερευνούν συστηματικά, πειραματίζονται, επιχειρούν να ερμηνεύσουν και να προτείνουν τρόπους διδασκαλίας και μάθησης για τα Μαθηματικά, αν και η αναζήτηση αυτή έχει ακόμα μεγάλο δρόμο. Ορισμένα ζητήματα έχουν σταθεροποιηθεί προοδευτικά, όπως τότε οι προτεινόμενες στην ηλικία αυτή δραστηριότητες είναι μαθηματικές και ποια σύνδεση αποκτά η μαθηματική γνώση που εμπεριέχεται σε αυτές τις δραστηριότητες με την μελλοντική ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών. Έχει επίσης τεκμηριωθεί ότι τα οφέλη που αποκτούν τα παιδιά από αυτές τις μαθηματικές εμπειρίες και η εξέλιξη της μαθηματικής ανάπτυξης που ξεκινά από τις πρώτες αυτές επαφές με τις μαθηματικές έννοιες συναρτώνται στενά με το είδος του προγράμματος και τον τρόπο διδακτικής εφαρμογής τους (Ginsburg, et al., 1997, Mullighan & Vergnaud, 2006).

Έτσι, δοκιμάζονται και προτείνονται νέα προγράμματα με το γενικό στόχο «μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα» (Ginsburg et al., 2002, Τζεκάκη, 2007), τα οποία πλουτίζουν τις κλασσικές απασχολήσεις των παιδιών της προσχολικής ηλικίας με υψηλού επιπέδου μαθηματικές δραστηριότητες.

Στον ελληνικό χώρο πραγματοποιείται μια ενδιαφέρουσα πρώτη προσπάθεια προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης μιας σοβαρής μαθηματικής εκπαίδευσης στις ηλικίες 4-6 χρόνων, με νέες διδακτικές προσεγγίσεις και δραστηριότητες που επιδιώκουν να αναπτύξουν σημαντικές μαθηματικές διαδικασίες και έννοιες. Αλλά δυστυχώς η ανάπτυξη μαθηματικής δράσης στα παιδιά όπως και η διαχείριση αυτής της δράσης από τον εκπαιδευτικό είναι ένα απαιτητικό ζήτημα που η προσπάθεια αυτή δεν πιστεύουμε ότι καταφέρνει να καλύψει.

Μαθηματική δράση

Η θέση ότι η γνώση δεν μεταδίδεται με την απλή παρουσίασή της, εξηγήσεις ή καθοδήγηση, αλλά κατακτιέται με την δραστηριοποίηση των μαθητών, είναι μια θέση γενικής αποδοχής που σχετίζεται με κάθε μορφής γνώση. Σύμφωνα με αυτήν, ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τη δράση των παιδιών προτείνοντας κατάλληλες δραστηριότητες και αναπτύσσοντας αυτό που ονομάζεται «κοινότητα μάθησης», με δημιουργική αναζήτηση, ανταλλαγή και διάλογο.

Στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης ο σχεδιασμός κατάλληλων δραστηριοτήτων αναδεικνύεται πιο περίπλοκο εγχείρημα από ότι αρχικά είχε φανεί. Από πολύ νωρίς οι επιστήμονες είχαν επισημάνει ότι, για να αναπτύξουν μαθηματικές ιδέες, τα παιδιά χρειάζονται να διαχειριστούν και να μελετήσουν καταστάσεις με περιεχόμενο και νόημα για αυτούς. Ωστόσο η μελέτη αυτή, αν και ξεκινά από πρακτικούς χειρισμούς, χρειάζεται να τα οδηγεί να μετασχηματίσουν τα πραγματικά αντικείμενα που χειρίζονται σε νοερά και έτσι να τα αντιληφθούν σε ένα ανώτερο επίπεδο (Freudenthal, 1983). Αυτό το πέρασμα από τις καθημερινές δραστηριότητες και τις οικείες καταστάσεις στις γενικεύσεις και αφαιρέσεις που απαιτεί η μαθηματική ανάπτυξη αποτελεί ένα ιδιαίτερο στοιχείο που πολλές προσεγγίσεις το αγνοούν.

Μια μαθηματική δραστηριότητα, είναι καταρχήν *δραστηριότητα*, στηρίζεται δηλαδή πάνω στις γενικά αποδεκτές παιδαγωγικές και ψυχολογικές θεωρίες και επιδιώκει την νοητική ενεργοποίηση του μαθητή για τη αντιμετώπιση μιας κατάστασης, ενός προβλήματος, μιας κατασκευής, ενός παιχνιδιού, κλπ. Μια δραστηριότητα μπορεί να είναι μεμονωμένη ή να εντάσσεται μέσα σε ένα γενικότερο σύνολο, μπορεί να ενδιαφέρεται να εξοικειώσει τα παιδιά με μια ιδέα ή να ενθαρρύνει μία διαδικασία, μπορεί να τη διαχειριστούν οι μαθητές ατομικά ή ομαδικά, μπορεί δηλαδή να λειτουργήσει με διαφορετικούς

τρόπους και σε διαφορετικά επίπεδα, πρέπει όμως να προκαλεί οπωσδήποτε την ενεργό δράση του μαθητή. Κι αυτή η ενεργός δράση δεν αποτελεί, όπως θα μπορούσε να θεωρηθεί, ένας απλός χειρισμός καταστάσεων ή αντικειμένων. Περιλαμβάνει μια ποικιλία ενεργειών και οπωσδήποτε στηρίζεται στη σκέψη. Για παράδειγμα, μια δράση όπως η κατασκευή ενός σχήματος από ξυλάκια προϋποθέτει από το παιδί πολλές ενέργειες, όπως άτυπες συγκρίσεις επιλογές, κρίσεις, ελέγχους και αποφάσεις, δηλαδή σκέψεις (αν το πούμε απλά) για το πώς θα γίνει αυτή η κατασκευή.

Αλλά πώς θα καταφέρουμε οι ενέργειες αυτές να γίνουν συστηματικές και να οδηγήσουν σε πιο γενικές μαθηματικές ιδέες. Κάποιες προσεγγίσεις αλλά κι η κοινή αντίληψή μας οδηγούν να θεωρήσουμε ότι πετυχαίνουμε αυτό το αποτέλεσμα όταν στο προτεινόμενο έργο παίρνουν μέρος μαθηματικά αντικείμενα (όπως στην περίπτωση του παραδείγματος τα σχήματα) ή η δράση έχει κάποια μαθηματικά χαρακτηριστικά, σύγκριση, μέτρηση, κατασκευή (Sierpinska, 1994)., Αναφέραμε όμως ήδη ότι η εμπλοκή μαθηματικών αντικειμένων δεν είναι αρκετή για να κάνει μια δραστηριότητα μαθηματική και πολύ περισσότερο να οδηγήσει στην ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών. Γιατί όχι;

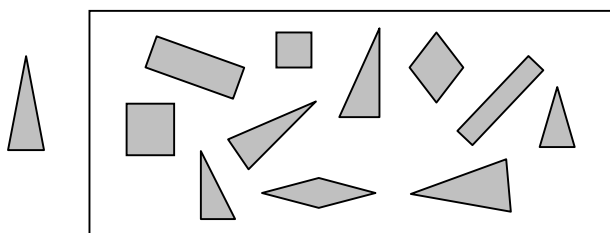
Γιατί το σημαντικό στοιχείο μιας δραστηριότητας με μαθηματικό περιεχόμενο δεν είναι η ανάπτυξη μιας οποιασδήποτε δράσης αλλά η ανάπτυξη *μαθηματικής δράσης* του παιδιού. Έτσι το ερώτημα που μοιάζει κρίσιμο να απαντηθεί, με βάση τον προβληματισμό για την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων, αλλά και το ενδιαφέρον να ενθαρρύνουμε τα παιδιά να σκεφτούν με μαθηματικό τρόπο είναι *«πότε μία δράση του παιδιού μπορεί να χαρακτηριστεί ως μαθηματική»*.

Η αντιμετώπιση μιας άγνωστης κατάστασης, η λύση ενός προβλήματος, μια κατασκευή ή ένα παιχνίδι που απαιτεί στρατηγικές για να κερδηθεί περιλαμβάνει οπωσδήποτε δράση αλλά αυτή η δράση είναι μαθηματική όταν καταλήγει σε αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών, σε εντοπισμό ιδιοτήτων και σχέσεων και οπωσδήποτε οδηγεί σε γενικεύσεις που δημιουργούν ή κατευθύνονται προς μια μαθηματική ιδέα (Steinbring, 2003). Η μαθηματική έννοια που σχετίζεται με αυτή την ιδέα ή μια όψη της θα εμπλακεί μέσα στη δράση για την κατάσταση ή το πρόβλημα που διαπραγματεύεται ο μαθητής, αλλά θα προκύψει από τη σκέψη πάνω σε αυτή τη δράση.

Η αποσαφήνιση αυτή δείχνει ότι τα πράγματα είναι αρκετά πολύπλοκα και δεν είναι εύκολο για τον εκπαιδευτικό να διακρίνει μια μαθηματική από μια άλλη δράση. Για το λόγο αυτό δοκιμάζουμε να την προσεγγίσουμε με κάποια παραδείγματα.

Ας θεωρήσουμε δράσεις που ζητούν από τα παιδιά να αναγνωρίσουν σχήματα, τρίγωνα, τετράγωνα, κλπ, στα αντικείμενα του περιβάλλοντος. Οι έρευνες καταδεικνύουν ότι σημαντικός αριθμός παιδιών αναγνωρίζουν τα συνήθη σχήματα από την καθημερινή αναφορά σε αυτά ή τη χρήση αντικειμένων με αυτές τις μορφές (Clements, et al., 1997). Η απλή αναγνώριση επικαλείται μόνο μια ολιστική αντίληψη που δεν βελτιώνει ουσιαστικά την αρχική εικόνα που είχαν τα παιδιά για τα σχήματα, ούτε τους μαθαίνει κάτι πιο συστηματικό. Η αναγνώριση αν και εμπλέκει σχήματα δεν περιέχει μαθηματική δράση, δηλαδή δεν περιλαμβάνει συγκρίσεις, εντοπισμό ιδιοτήτων ή άλλων χαρακτηριστικών των σχημάτων. Είναι σαφές ότι θα χρειαστεί τα παιδιά να διακρίνουν τις μορφές σε πραγματικές καταστάσεις με περιεχόμενο και νόημα για αυτούς, αλλά για να γενικεύσουν και να τις αντιληφθούν σε ένα ανώτερο επίπεδο είναι απαραίτητο να κάνουν συγκρίσεις, να αναζητήσουν ομοιότητες και διαφορές, να αντιληφθούν κάποιες ιδιότητες που η ολιστική αναγνώριση δεν ενθαρρύνει.

Ας θεωρήσουμε, αντίθετα, μια δράση- παιχνίδι όπου δίνεται στα παιδιά ένα σχήμα που πρέπει να το αναζητήσουν ανάμεσα σε άλλα μέσα σε μία εικόνα. Η κατάσταση αυτή, στο βαθμό που ενδιαφέρονται να «νικήσουν», τους οδηγεί στην ανάπτυξη μιας μαθηματικής δράσης πάνω στα σχήματα που είναι το κλειδί για την εύρεση της σωστής απάντησης.



Τι διαφορετικό δηλαδή κάνει το παιδί σε αυτή την περίπτωση; Κρατάει στο μυαλό του την εικόνα του τριγώνου που ψάχνει, το συγκρίνει με σχήματα που δεν είναι τρίγωνα και τα αποκλείει, στη

συνέχεια το συγκρίνει με τα τρίγωνα και παρατηρεί κι άλλες ομοιότητες ή διαφορές (πιο μεγάλο, πιο μικρό, μεγαλύτερες, μικρότερες πλευρές, άλλη μορφή κ.ά.), το περιστρέφει και τέλος, μπορεί να επιβεβαιώσει ή σε περίπτωση λάθους να αναζητήσει τους λόγους που τον οδήγησαν στο λάθος, με δύο λόγια να ξεπεράσει την ολιστική και να αναπτύξει μια πιο λεπτομερή αντίληψη για τα σχήματα.

Είναι φανερό ότι αυτή η δραστηριότητα δεν αρκεί για να προσεγγιστούν τα σχήματα και τα χαρακτηριστικά τους. Θα ακολουθήσουν κι άλλες δραστηριότητες, για παράδειγμα κατασκευές σχημάτων με διάφορα υλικά που οδηγούν τα παιδιά να παρατηρήσουν τις ιδιότητες που εντόπισαν και, αν ενθαρρυνθούν να τις περιγράψουν, θα τις κρατήσουν πιο συστηματικά στο μυαλό του. Το παράδειγμα αυτό μας δίνει και την ιδέα ότι οι μαθηματικές δραστηριότητες δεν είναι ποτέ μεμονωμένες, γιατί οι μαθηματικές έννοιες δεν μπορούν να δημιουργηθούν από μία ή δύο δραστηριότητες. Αντίθετα αναδεικνύονται από ένα σύνολο καταστάσεων και προβλημάτων μέσα στις οποίες λειτουργούν και παίρνουν το νόημά τους και από τις οποίες μπορούν να προκύψουν ως γενικεύσεις, γιατί αυτή άλλωστε είναι και η φύση τους.

Συχνά, πολλά από τα στοιχεία με τα οποία τα παιδιά ασχολούνται ή προσεγγίζουν με όσα αναφέραμε, δε αναφέρονται ρητά, αλλά με τις δράσεις αυτές τα παιδιά βαθαίνουν την μαθηματική τους εμπειρία με τα μαθηματικά αυτά αντικείμενα. Επιπλέον η δράση τους είναι μαθηματική γιατί διαπραγματεύονται ιδιότητες, συγκρίνουν, κατασκευάζουν και ελέγχουν τις επιλογές τους.

Ένα ακόμα παράδειγμα ίσως αποσαφηνίσει καλύτερα πώς μια απλή δράση μπορεί να οδηγήσει σε μια σημαντική μαθηματική ιδέα, όπως είναι η κατασκευή του αναπτύγματος ενός κύβου. Ο εκπαιδευτικός δίνει στα παιδιά ένα κύβο και τετράγωνα κομμάτια χαρτί που αντιστοιχούν στις έδρες του και τους ζητάει, χρησιμοποιώντας μια γλώσσα προσιτή σε αυτά, να φτιάξουν ένα κοστούμι για τον κ. Κύβο. Τα παιδιά κολλούν και ενώνουν πάνω στον κύβο το ένα τετράγωνο με το άλλο και έτσι στο τέλος έχουν στα χέρια τους ένα ανάπτυγμα. Ο εκπαιδευτικός δεν χρειάζεται να εξηγήσει τίποτε, ούτε να δώσει τις ιδέες στα παιδιά, ούτε φυσικά να χρησιμοποιήσει μαθηματικούς όρους. Η ιδέα του αναπτύγματος δημιουργείται μέσα από την αντιμετώπιση αυτής της κατάστασης που έχει νόημα για τα παιδιά και τους δίνει την ευκαιρία να προσεγγίσουν μία έννοια που θα είναι σε θέση να την διευρύνουν τα επόμενα χρόνια (Hejny, & Jirotkova, 2007)

Αναστοχαστική δράση

Τα παραδείγματα που χρησιμοποιήσαμε μας επιτρέπει να αναφερθούμε στο επόμενο στοιχείο που περιλαμβάνει ο σχηματισμός μαθηματικών εννοιών, που είναι ο αναστοχασμός πάνω στη δράση. Πιστεύεται ότι η δράση των μαθητών σε μια δραστηριότητα που σχετίζεται με μαθηματικές έννοιες οδηγεί σε μαθηματική μάθηση, ενώ ο μαθητής ακολουθεί διαδικασίες που μοιάζουν αποτελεσματικές χωρίς να αναζητά παραπάνω εξηγήσεις ή ερμηνείες. Έχει καταδειχθεί ότι η εμπλοκή των μαθητών σε μία δραστηριότητα δε σημαίνει απαραίτητα τη δημιουργία μιας ιδέας, καθώς δεν είναι η ίδια η δράση που δημιουργεί μια ιδέα, αλλά η σκέψη πάνω στη δράση (Duval, 2000).

Μια εικόνα για το τι σημαίνει κατάσταση που οδηγεί σε σκέψη μπορεί να μας δώσει το παράδειγμα της αριθμητικής δραστηριότητας όπου ο εκπαιδευτικός ζητάει από τα παιδιά να κόψουν αριθμούς από εφημερίδες και περιοδικά και στη συνέχεια να τους βάλουν στη σειρά. Για την αντιμετώπιση της τα παιδιά οδηγούνται σε μια συστηματική διερεύνηση των αριθμών, αναζήτηση μιας μεθόδου διάταξης, ερμηνεία για την ορθότητα της μεθόδου που χρησιμοποιείται, ανταλλαγή και συζήτηση στην τάξη, κλπ. (Clarke & Clarke, 2002).

Είναι φανερό ότι κανείς και ιδιαίτερα ένα παιδί της προσχολικής ηλικίας δεν θα μπει σε διαδικασία αναστοχασμού, εκτός κι αν έχει για αυτό ένα κίνητρο. Η ανάπτυξη όμως μαθηματικών νοημάτων απαιτεί μια φάση γενίκευσης της εμπειρίας και σταθεροποίησης των νέων αυτών γενικευμένων στοιχείων. Για να περιγραφεί η φάση αυτή κατά την οποία οι ιδέες που ανέπτυξαν οι μαθητές ξεπερνούν το ειδικό περιεχόμενο και τις ειδικές καταστάσεις και αποκτούν ένα γενικευμένο χαρακτήρα χρησιμοποιήθηκε, αρχικά στη γαλλική και αργότερα στη διεθνή βιβλιογραφία, ο όρος «επιστημοποίηση» (institutionalization, Brousseau, 1997). Στη φάση αυτή ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές κατονομάζουν όσα έχουν πραγματοποιηθεί στο επίπεδο που έχουν προσεγγισθεί, τα οποία αποτελούν στο εξής μια «επίσημη» γνώση της τάξης.

Ωστόσο η δουλειά αυτή είναι αρκετά πολύπλοκη και προϋποθέτει ότι το πλαίσιο των καταστάσεων που προτείνεται είναι αρκετά ευρύ ώστε να επιτρέψει τέτοιες γενικεύσεις. Επίσης τα

παιδιά γνωρίζουν τι και γιατί το έκαναν ώστε να οδηγηθούν σε πιο γενικευμένα συμπεράσματα. και ακόμα μπορούν ή έχουν ασκηθεί σημαντικά να διαχωρίζουν το ειδικό (μια δράση ή μια λύση) από το πιο γενικό, όπως είναι ένα συμπέρασμα. Στο θέμα αυτό βρίσκουμε πολύ περιορισμένα ερευνητικά αποτελέσματα, αν και αποτελεί τον πυρήνα της μαθηματικής δράσης.

Για την διευκόλυνση γενικεύσεων δημιουργήσαμε την ιδέα της «μετα- δραστηριότητας» (Τζεκάκη, 2007). Το πρόθεμα «μετα» παραπέμπει και στη χρονική στιγμή που πραγματοποιείται, δηλαδή μετά το τέλος των δραστηριοτήτων και στο στοιχείο του αναστοχασμού πάνω σε αυτές.

Μια μετα- δραστηριότητα έχει ως περιεχόμενο την επεξεργασία των συμπερασμάτων που προέρχονται από τις δραστηριότητες που προηγήθηκαν, με άλλα λόγια επικεντρώνει τη δράση και τη σκέψη των παιδιών στη γενίκευση που χρειάζεται να κάνουν. Για το λόγο αυτό, αν βέβαια ενδιαφερόμαστε να αποφύγουμε την παρέμβαση του εκπαιδευτικού, έχει όλα τα στοιχεία μιας μαθηματικής δραστηριότητας, δηλαδή κίνητρο, αναζήτηση, αποτέλεσμα, έλεγχο και συζήτηση, αλλά το περιεχόμενό της και ο στόχος της δράσης των παιδιών είναι η δημιουργία γενικευμένων ιδεών

Ας θεωρήσουμε ως παράδειγμα, τις καταστάσεις της συμμετρίας όπου τα παιδιά όχι μόνο μαθαίνουν να αναγνωρίζουν τα συμμετρικά σχήματα ολιστικά, αλλά και να κατασκευάζουν συμμετρικές μορφές, ελέγχοντας τις κατασκευές ή τα σχέδια με διαδικασίες δίπλωσης. Ερευνητικές μελέτες έχουν δείξει ότι οι έλεγχοι αυτοί βελτιώνουν σημαντικά τα σχέδια των παιδιών και τους στηρίζουν ακόμα και στην προσέγγιση ιδιοτήτων των συμμετρικών σχημάτων σε αρκετά σύνθετες μορφές (Tzekaki, & Christodoulou, 2000).

Ωστόσο οι επιτυχίες αυτές αφορούν τα συγκεκριμένα έργα και δεν εξασφαλίζουν τη γενίκευση και τη σταθεροποίηση αυτών των στοιχείων. Τα παιδιά κάνουν σχήματα κι επιδιώκουν να πετύχουν συμμετρία που να επιβεβαιώνεται με τη δίπλωση. Ακόμα κι αν η δράση αυτή τους οδηγεί να επεξεργαστούν κάποιες ιδιότητες, αυτές περιορίζονται στα συγκεκριμένα έργα.

Μια μετα- δραστηριότητα θα μπορούσε να είναι η δημιουργία οδηγιών (π.χ. για τα παιδιά μιας άλλης τάξης) για τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να κατασκευάσουν συμμετρικά σχήματα που να επιβεβαιώνονται από δίπλωση, όπως τι πρέπει να προσέξουν και πώς να λειτουργήσουν. Η δράση αυτή οδηγεί τα παιδιά να σκεφτούν και να οργανώσουν τις ιδιότητες που εφάρμοσαν πρακτικά και κατά συνέπεια να καταλήξουν σε πιο γενικά χαρακτηριστικά που περιγράφουν μια συμμετρική κατάσταση.

Με τα παραπάνω δώσαμε μια γενική εικόνα του τι σημαίνει έργα που ενθαρρύνουν τα παιδιά να λειτουργήσουν με μαθηματικό τρόπο. Κάθε ιδιαίτερη έννοια που επιδιώκουμε να προσεγγίσουμε στην ηλικία αυτή έχει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και μια πορεία ανάπτυξης που μόλις αρχίζει. Δεν θα πρέπει όμως να πιστεύουμε ότι η ενασχόληση των παιδιών με καθημερινές καταστάσεις και παιχνίδια που εμπλέκουν τις έννοιες αυτές, επιτρέπουν ή εξασφαλίζουν την ανάπτυξη τους γιατί αποτελούν ειδικές μορφές που τα παιδιά αντιμετωπίζουν χωρίς να αναπτύσσουν μαθηματικά νοήματα. Δίνουν μεμονωμένα στοιχεία και ευνοούν την εμπειρική ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών που εμπεριέχουν χωρίς να δίνουν πρόσβαση σε αυτές και χωρίς, πολύ περισσότερο να ασκούν τα παιδιά να λειτουργούν με μαθηματικό τρόπο (Steinbring, 1999). Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι τα περισσότερα προγράμματα για την προσχολική ηλικία προτείνουν ασυντόνιστες δράσεις που δεν προσφέρουν την απαιτούμενη μαθηματική εμπειρία που χρειάζονται τα μικρά παιδιά και εισάγουν ιδέες με ένα τρόπο που δεν επιτρέπει εμβάθυνση και ανάκληση (Greenes, Ginsburg, & Balfanz, 2003).

Χαρακτηριστικό για τη θέση αυτή παράδειγμα είναι η δημιουργία πινάκων που προτείνεται στον νέο οδηγό της νηπιαγωγού (σ. 183-4). Η οργάνωση εισάγεται βασικά από τον εκπαιδευτικό ο οποίος «επιβάλλει» με ένα τρόπο στα παιδιά μια έτοιμη μαθηματική ιδέα και το πιθανότερο είναι ότι δεν γενικεύεται στην αντίληψη τους με τον τρόπο που θα πιστεύαμε. Θα άρχιζε να γίνεται μια δράση που μπορεί να οδηγήσει σε μιας μορφή μαθηματική οργάνωση, αν μετά από πολλαπλές εφαρμογές μπορούσε να εντοπιστεί από τα παιδιά ως το κοινό πλαίσιο τους και να χρησιμοποιηθεί με δική τους πρωτοβουλία και σε άλλα αντίστοιχα προβλήματα.

Θα μπορούσαν να δοθούν πολλά παραδείγματα που είναι χαρακτηριστικά αυτής της λειτουργίας μιας δραστηριότητας, ενώ αντίστροφα η επιδίωξη μας είναι η ίδια η προτεινόμενη δραστηριότητα αξιοποιεί την καθημερινή εμπειρία των παιδιών και τους ωθεί να σκεφθούν και να αναζητήσουν κανόνες, χωρίς να χρειάζεται ο εκπαιδευτικός να εξηγήσει ή να εισάγει κάτι, όπως ισχύει στο παράδειγμα του αναπτύγματος.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι για την ανάπτυξη κάθε στοιχείου μαθηματικής γνώσης στο επίπεδο που το προσεγγίζουμε είναι απαραίτητη η δημιουργία ενός ολοκληρωμένου σχεδίου που περιλαμβάνει μαθηματική δράση αλλά και συστηματική σκέψη των παιδιών πάνω στη δράση αυτή.

Κοινότητα μάθησης

Αναφέραμε ήδη ότι μέσα από ενδιαφέροντα και προκλητικά προβλήματα τα παιδιά ενθαρρύνονται να ασχοληθούν, να αναζητήσουν, να δοκιμάσουν και μέσα από αυτό να μετασχηματίσουν ή να αναδομήσουν την προϋπάρχουσα γνώση και να οδηγηθούν βαθμιαία στην κατάκτηση μιας νέας ιδέας. Η λειτουργία αυτή στηρίζεται κατά πολύ στον εκπαιδευτικό, ο οποίος καλείται να συνειδητοποιήσει ότι ακόμα και η πιο στοιχειώδης μαθηματική γνώση δεν μεταδίδεται με την απλή παρουσίασή της, δεν προσεγγίζεται μέσα από την ενασχόληση με μαθηματικά αντικείμενα και δεν προκύπτει από απλή δραστηριοποίηση των παιδιών με καθημερινές καταστάσεις και προβλήματα. Απαιτούνται πολύμορφες εμπειρίες με μαθηματικές δραστηριότητες που δίνουν στα παιδιά ευκαιρίες να δημιουργούν και να σκέφτονται, να συνεργάζονται και να αλληλεπιδρούν, όπως και να επικοινωνούν με το λόγο, με χειρονομίες, με εικόνες και ζωγραφιές ή άλλα αναπαραστασιακά ή συμβολικά μέσα με στόχο να προχωρούν σε πιο γενικές ιδέες και πιο συστηματικές προσεγγίσεις, πετυχαίνοντας μια νέα κατανόηση των καταστάσεων που αντιμετωπίζουν.

Η αποτελεσματική μαθηματική εκπαίδευση συνδέεται στενά με μία λειτουργία του εκπαιδευτικού που ενθαρρύνει *υψηλού επιπέδου εκπαιδευτικές διαδικασίες* οι οποίες δίνουν στους μαθητές ευκαιρίες να εξερευνήσουν ιδέες, να αναζητήσουν λύσεις, να βρουν στρατηγικές, να αποφασίσουν και να βγάλουν συμπεράσματα, να λειτουργήσουν με άλλα λόγια σε αυτό που ονομάζεται «κοινότητα μάθησης» (Lerman, 2006).

Σε μια κοινότητα μάθησης, σημείο εκκίνησης αποτελούν προκλητικά προβλήματα που σχετίζονται με τα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες των παιδιών και χρησιμοποιούν κατάλληλο υλικό και διδακτικά μέσα, αλλά χωρίς υποδείξεις για την αντιμετώπισή τους. Η διαπραγμάτευση τους στηρίζεται στην περιέργεια και την τάση των παιδιών για αναζήτηση και δημιουργία, κι έτσι ο εκπαιδευτικός, προσφέροντας συναισθηματική υποστήριξη και σεβασμό στο άτομο και τη μοναδικότητά του, ενθαρρύνει την αναζήτηση λύσεων και μεθόδων σε ατομική και συλλογική βάση. Δημιουργεί δηλαδή ένα εκπαιδευτικό περιβάλλον στο οποίο συμμετέχει ως μέλος διευκολύνοντας τα παιδιά να δράσουν και να σκεφτούν, ενισχύει το μαθηματικό διάλογο και αναδεικνύει μαθηματικά νοήματα αξιοποιώντας τις ιδέες και τις στρατηγικές τους (Clarke, 1997, Brown, 1998).

Είναι φανερό ότι αυτή η υψηλού επιπέδου εκπαιδευτική διαδικασία προϋποθέτει την κατάλληλη διαμόρφωση προγράμματος, δραστηριοτήτων και εκπαιδευτικού υλικού αλλά και την επαρκή εκπαίδευση των εκπαιδευτικών. Μέχρι την ολοκλήρωση αυτών των προϋποθέσεων η μαθηματική εκπαίδευση στην προσχολική ηλικία θα παρουσιάζει σημαντικά ελλείμματα. Όπως υποστηρίζεται:

«οι συνηθισμένες μορφές αλληλεπίδρασης στην τάξη (ερωταποκρίσεις ή τυποποιημένοι κανόνες) οδηγούν τους μαθητές να σε μια 'τεχνητά' κατασκευασμένη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, χωρίς κανένα από τα χαρακτηριστικά σχέσεων που τις χαρακτηρίζουν τα ίδια τα Μαθηματικά, γεγονός που δημιουργεί αναπόφευκτα εμπόδια στη μαθηματική μάθηση» (Steinbring, 1999, σ. 523)

Αντί για συμπέρασμα

Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να μάθουν οι μαθητές να λειτουργούν με μαθηματικό τρόπο, ώστε να επιτευχθεί διδακτικά η σύγκλιση της προσωπικής τους ανάπτυξης και της ανάπτυξης επιστημονικής γνώσης αποδεικνύεται ιδιαίτερα πολύπλοκη για τα Μαθηματικά λόγω της ιδιαίτερης φύσης τους.

Τα ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μικροί μαθητές αναπτύσσουν άτυπες γνώσεις για πολλές και σύνθετες μαθηματικές ιδέες και με την κατάλληλη διδακτική υποστήριξη μπορούν να τις κατανοήσουν ουσιαστικότερα και να προσεγγίσουν περισσότερα στοιχεία από ότι μέχρι πρόσφατα πιστεύαμε. Αντί να τους περιορίζουμε χρειάζεται να τους δίνουμε τα κατάλληλα ερεθίσματα και να τους ενθαρρύνουμε να εξερευνούν, να αναζητούν, να συζητούν και να οδηγούν τη σκέψη τους σε ένα ανώτερο επίπεδο.

Ωστόσο η μαθηματική τάση την οποία στοχεύουμε να καλλιεργήσουμε στα παιδιά από τις μικρότερες ηλικίες απαιτεί μια ριζική αλλαγή στη στάση μας απέναντί τους όπως και στον τρόπο με τον οποίο λειτουργούμε μέσα στην τάξη των Μαθηματικών. Αν πιστεύουμε ότι η μαθηματική γνώση είναι σημαντική για την πνευματική ανάπτυξη των μικρών παιδιών, χρειαζόμαστε διδακτικές προσεγγίσεις που να ενσωματώνουν πολλά νέα χαρακτηριστικά. Η μάθηση των Μαθηματικών είναι μια πλούσια κατασκευαστική δραστηριότητα και αναπτύσσεται στο κοινωνικό περιβάλλον της τάξης. Μέσα σε αυτήν οι μαθητές αντιμετωπίζουν, μόνοι τους ή σε συνεργασία μεταξύ τους, καταστάσεις που συνδέονται με την εμπειρία και την πραγματικότητα, αλληλεπιδρούν και τεκμηριώνουν τη δράση τους, συζητούν για να εμβαθύνουν τη δράση αυτή και να οδηγηθούν σε υψηλότερα επίπεδα αφάιρεσης, γενίκευσης αλλά και κατανόησης της πραγματικότητας.

Όπως αναφέραμε από την αρχή, οι αλλαγές που απαιτούνται για να διαμορφωθεί αυτή η υψηλού επιπέδου μαθηματική εκπαίδευση στις μικρές αλλά και στις μεγαλύτερες ηλικίες είναι πολλές κι ο ορίζοντας για αυτό το στόχο είναι μακρινός. Θα χρειαστεί να αναγνωρίσουμε ότι τα φαινόμενα που αντιμετωπίζουμε είναι σύνθετα και να τα διαπραγματευτούμε με την ανάλογη επιστημονική σοβαρότητα. Οι θεωρητικές κι εμπειρικές γνώσεις που έχουν συγκεντρωθεί στον επιστημονικό χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι εκτενείς και κάθε προσπάθεια διαμόρφωσης μιας νέας μαθησιακής και διδακτικής πραγματικότητας θα παραμένει ελλιπής χωρίς την αξιοποίηση όλων αυτών των δεδομένων. Μέχρι να συμβεί αυτό, η αποτελεσματική μαθηματική μάθηση θα αποτελεί ένα όραμα που η υλοποίησή του θα είναι για όλους μας μια διαρκής πρόκληση.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Brown, M. (1998). Is More Whole Class Teaching the Answer? *Mathematics Teaching*, 169, 5-7.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.
- Clarke, Doug M. (1997). The Changing Role of the Mathematics Teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 278-308.
- Clarke, D., & Clarke, B. (2002). *Stories from the Classrooms of Successful Mathematics Teachers: Painting a Picture of Effective Practice I*. Paper presented to the Early Numeracy Trainers, Melbourne.
- Clements, D. D., Sarama, J. & Swaminathan, S. (1997). Young children's concept of shape. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 161-168). Lahti, Finland: University of Helsinki.
- Duval, R. (2000). Basic Issues of research in mathematics education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 55-72). Hiroshima: Hiroshima University.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.
- Ginsburg, H. (2002). Little Children, Big Mathematics: Learning and Teaching in the Pre- School. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 003-014). Norwich: UEA, Norwich.
- Ginsburg, H. P., Choy, Y. E., Lopez, L. S., Netley, R., & Chao-Yuan, C. (1997). Happy birthday to you: Early mathematical thinking of Asian, South American, and US children. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics. AN International Perspective* (163- 208). East Sussex, UK: Psychology Press Ltd., Publishers.
- Ginsburg, H. P., Greenes, C., & Balfanz, R. (2003). *Big Math for Little Kids*. Parsippany, NJ: Dale Seymour Publications.
- Ginsburg, H. P., Klein, A., & Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. In I. Sigel & A. Renninger (Eds.), *Hand book of child psychology: Child psychology and practice* (Vol. 4, 401-476). New York: John Wiley & Sons.
- Greenes, C. (1999). Ready to learn: Developing young children's mathematical powers. In J. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years*, (39-47). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hejny, M., & Jirotkova, D. (2007). Unit 3D: Geometry and Solids. In IATM, Comenius Collaboration Team (Eds.), *Creative Teaching in Mathematics*. Prague: Charles University of Prague (Υπό έκδοση).

- Kilpatric, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 3-38. NY: MacMillan Publisher Co.
- Lerman, S. (2006). Socio- cultural Research in PME. In A. Guitierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 347 – 366. Rotterdam/Taipei, Sense Publishers.
- Mulligan, J., & Vergnaud, G. (2006). Research on Children's Early Mathematical Development. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present, Future*, 117-146. Rotterdam, Taipei: Sense Publishers.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically; Problem Solving, Metacognition, and Sense making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 334-370. NY: MacMillan Publisher Co.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London, Washington: The Palmer Press.
- Steinbring, H. (1999). Reconstructing the mathematical in social discourse - aspects of an epistemological- based interaction research. In O. Zaxlavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, 40- 55). Haifa, Israel: Israel Institute of Technology.
- Steinbring, H. (2003). *The Construction of New Mathematical Knowledge. An Epistemological Perspective*: Springer.
- Steen, L. A. (2001). *Mathematics and democracy: The case for quantitative literacy*. USA: National Council on Education and the Disciplines.
- Tzekaki, M., & Christodoulou, I. (2000). *Mathematics at pre-school age: Control Processes for the approach of Symmetry*. Paper presented at the 10th Conference of EECERA, London.
- Δαφέρμου, Χ., Κουλούρη, Ρ. & Μπασογιάννη, Ε. (2005). *Οδηγός Νηπιαγωγού. Εκπαιδευτικοί σχεδιασμοί. Δημιουργικά περιβάλλοντα μάθησης*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΟΕΣΒ (155- 214).
- Τζεκάκη, Μ. (2003). Η Μαθηματική Εκπαίδευση στην Προσχολική και Πρώτη Σχολική Ηλικία (ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΟΜΙΛΙΑ). Στο «Γλώσσα και Μαθηματικά στην Προσχολική Ηλικία». *Πρακτικά Επιστημονικό Συνέδριου*. Ρέθυμνο: Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης.
- Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg (υπό έκδοση).