

Άσκηση

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές τιμές (ιδιοτιμές) και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα (ιδιοδιανύσματα) του πίνακα A .

β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος.

Απαντ.

$$\alpha) |A - \lambda I| = (5 - \lambda)(7 - \lambda) - 8 = 35 - 12\lambda + \lambda^2 - 8 = \lambda^2 - 12\lambda + 27 = (\lambda - 3)(\lambda - 9) = 0.$$

Οι χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = 9$.

$$\text{Για } \boxed{\lambda_1 = 3}, [A - \lambda_1 I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 8y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4y.$$

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\bar{x}_1 = [-4 \ 1]'$.

$$\text{Για } \boxed{\lambda_2 = 9}, [A - \lambda_2 I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 8y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y.$$

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\bar{x}_2 = [2 \ 1]'$.

β) Με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών διανυσμάτων δημιουργούμε τον πίνακα T ,

$$T = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 3/2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$