

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .

Απαν.

Θεωρούμε τον πίνακα

$$(A - I) = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-I & -7 & -5 \\ 2 & 4-I & 3 \\ 1 & 2 & 2-I \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$|A - I| = (-3 - I)((4 - I)(2 - I) - 6) + 7(4 - 2I - 3) - 5(4 - 4 + I) = -(I - 1)^3$$

Θεωρούμε την εξίσωση $|A - I| = -(I - 1)^3 = 0$. Άρα έχουμε μια ιδιοτιμή την $I = 1$, η οποία είναι πολλαπλότητας 3.

Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην παραπάνω ιδιοτιμή.

Θεωρούμε το ομογενές σύστημα $(A - I)\overset{\mathbf{I}}{x} = \overset{\mathbf{I}}{0}$, δηλαδή το σύστημα

$$\begin{pmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε

$$(A - I | \overset{\mathbf{I}}{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -7 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{H_{13}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{H_{21}(-2), H_{31}(4)} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{H_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{H_{12}(-2), H_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Από τον τελευταίο πίνακα έχουμε

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Θέτουμε $x_3 = c$, $c \in R$ και παίρνουμε $x_1 = -3c$, $x_2 = c$.

Άρα τα ιδιοδιανύσματα $\overset{\mathbf{I}}{x}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $I = 1$ είναι της μορφής $\overset{\mathbf{I}}{x} = c(-3 \ 1 \ 1)'$ όπου $c \in R$.