ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

* Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλη

Αν μια δ.ε. είναι της μορφής

$$Q(y)\,dy = P(x)\,dx$$

τότε η λύση της προκύπτει από τη σχ

$$\int Q(y)\,dy = \int P(x)\,dx + C.$$

Άσκηση 1.1 Να λυθεί η Δ.Ε.

$$2x(y^2+y)\,dx + (x^2-1)\,y\,dy = 0.$$

Λύση: Γράφουμε πρώτα τη διαφορική εξίσωση στη μορφ

$$\frac{2x}{x^2-1}\,dx = -\frac{1}{y+1}\,dy\,,$$

όπου $x \neq \pm 1$, $y \neq 0$, $y \neq -1$. Ολοκληρώνοντας και τα ε μέλη της εξίσωσης, προκύπτει

$$\ln|x^2-1| = -\ln|y+1| + c_1 \quad \Rightarrow$$

$$\ln|x^2-1| + \ln|y+1| = c_1 \quad \Rightarrow$$

$$\ln\left|(x^2-1)(y+1)\right| = c_1$$

Επειδή $e^{\ln a} = a$, έχουμε

$$\left|(x^2-1)(y+1)\right| = e^{c_1} \quad \Rightarrow$$

$$(x^2-1)(y+1) = \pm e^{c_1} \quad \Rightarrow$$

$$(x^2-1)(y+1) = c\,, \quad c \neq 0$$

όπου $c = \pm e^{c_1}$. Άρα η γενική λύση της εξίσωσης είν

$$y = -1 + \frac{c}{x^2-1}\,,$$

Άσκηση Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y' = x - xy - y + 1$$

Λύση: Έχουμε

$y' = x - xy - y + 1 = x(1-y) + (1-y) = (1-y)(x+1)$

από όπου προκύπτει ότι η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλ

και ότι η $y=1$ είναι μια λύση. Για $y \neq 1$ έχουμε

$$\frac{1}{1-y} dy = (x+1)dx \quad \Rightarrow$$

$$-\ln|1-y| = \frac{1}{2}x^2 + x + c_1 \quad \Rightarrow$$

$$\ln|1-y| = -\left(\frac{1}{2}x^2 + x + c_1\right) \quad \Rightarrow$$

$$|1-y| = e^{-\left(\frac{1}{2}x^2 + x + c_1\right)} \quad \Rightarrow$$

$$1 - y = \pm e^{-\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)} e^{-c_1} \quad \Rightarrow$$

$$y = 1 - ce^{-\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)}, \quad c \neq 0.$$

Αν $c=0$, τότε η παραπάνω σχέση δίνει τη λύση $y=$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = 1 - ce^{-\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)}.$$

* Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις $1^{ης}$ τάξης

Όταν μία δ.ε. είναι γραμμική πρώτης τάξης δηλ.

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Τότε η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)d

Ασκ. Να λυθεί η ΔΕ

$$x\,dy + (3y - 2x)\,dx = 0$$

Απ. Είναι $\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 2$. Οπότε

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx\right]$$

$$= e^{-\int \frac{3}{x}dx}\left[c + \int e^{\int \frac{3}{x}dx} 2dx\right]$$

$$= e^{-3\ln x}\left[c + \int 2e^{3\ln x} dx\right]$$

$$= x^{-3}\left[c + \int 2x^{3} dx\right]$$

$$= x^{-3}\left[c + \frac{x^4}{2} dx\right]$$

$$= cx^{-3} + \frac{1}{2}x, \quad x > 0$$

* Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης

Έστω η δ.ε.

$$y' = f(x,y).$$

Αν ισχύει ότι

$$f(ax, ay) = f(x,y)$$

τότε θέτουμε

$$y = xv$$

και

$$y' = v + xv'$$

και μετασχηματίζεται σε δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών.

Άσκηση 3.1 Να λυθεί η ΔΕ

$$y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2}.$$

Λύση: Είναι

$$f(x,y) = \frac{g(x,y) = x^3+y^3 \Rightarrow g(ax,ay) = a^3(x^3+y^3) = a^3 g(x,y)}{h(x,y) = xy^2 \Rightarrow h(ax,ay) = a^3 xy^2 = a^3 h(x,y)}$$

Συνεπώς η ΔΕ είναι ομογενής και θέτοντας

$$y = xv$$

$$y' = v + xv'$$

παίρνει τη μορφή

$$v + xv' = \frac{x^3 + v^3x^3}{xv^2x^2} \Rightarrow$$

$$v + xv' = \frac{1+v^3}{v^2} \Rightarrow$$

$$v + xv' = \frac{1}{v^2} + v \Rightarrow$$

$$xv' = \frac{1}{v^2} \Rightarrow$$

$$v^2 dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}v^3 = \ln|x| + c \Rightarrow$$

$$y^3 = 3x^3 \ln|x| + c \Rightarrow$$

Άσκηση: Να λυθεί η ΔΕ

$$(x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0.$$

Λύση: Έχουμε

$$(x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{x^2+y^2}{2xy},$$

άρα

$$g(x,y) = x^2+y^2 \Rightarrow g(ax,ay) = (ax)^2+(ay)^2 = a^2(x^2+y^2)$$

$$h(x,y) = 2xy \Rightarrow h(ax,ay) = 2(ax)(ay) = a^2(2xy)$$

Επομένως η ΔΕ είναι ομογενής και θέτουμε

$$y = xv \quad , \quad y' = v + xv'.$$

Οπότε

$$v + xv' = \frac{x^2+x^2v^2}{2x(xv)} = \frac{1+v^2}{2v} \Rightarrow$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v \Rightarrow$$

$$\frac{2v}{1-v^2}\,dv = \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$-\ln(1-v^2) = \ln x + c_1 \Rightarrow$$

$$1-v^2 = cx^{-1} \Rightarrow$$

$$1-\left(\frac{y}{x}\right)^2 = cx^{-1} \Rightarrow$$

* Πλήρεις Διαφορικές Εξισώσεις 1^ης τάξης

Μία δ.ε. της μορφής

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

καλείται πλήρης ή αμέσως ολοκληρώσιμ

αν υπάρχει μία συνάρτηση $g(x,y)$ τ.ω

$$dg(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

και

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Για να λύσουμε την πλήρη (όπως δεχόμα

Υπολογίζουμε πρώτα την $g(x,y)$ από τις

εξισώσεις

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Η λύση της δ.ε. είναι τότε σε πεπλεγμένη

$g(x,y) = c$

Άσκηση: Να λυθεί η

$$(x-y)\,dx + (-x+y+2)\,dy = 0$$

Λύση: Είναι

$$M(x,y) = x-y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -1$$

$$N(x,y) = -x+y+2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Άρα $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ και συνεπώς η ΔΕ είναι πλήρης.

Ζητούμε μια λύση $g(x,y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \qquad (2)$$

Απ' την (1) προκύπτει

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x-y \Rightarrow \int \frac{\partial g}{\partial x}\,dx = \int (x-y)\,dx \Rightarrow g(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + h(y)$$

Οπότε από την (2) παίρνουμε

$$-x + h'(y) = -x+y+2 \Rightarrow h'(y) = y+2 \Rightarrow h(y) = \frac{y^2}{2} + 2y +$$

Επομένως

$$g(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} + 2y + c_1$$

και τότε παίρνουμε τη λύση της ΔΕ σε πεπλεγμένη

$$x^2 + y^2 + 4y - 2xy = c.$$

Άσκηση Να λυθεί η ΔΕ

$$(y+\cos x)dx + (x+\sin y)dy = 0$$

Λύση Είναι

$$M(x,y) = y+\cos x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$N(x,y) = x+\sin y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

Επομένως $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ και η ΔΕ είναι πλήρης.

Ζητούμε μία λύση $g(x,y)$ τέτοια ώστε:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \qquad (2)$$

Σύμφωνα με την (1) έχουμε

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y+\cos x \Rightarrow \int \frac{\partial g}{\partial x}dx = \int (y+\cos x)dx \Rightarrow g(x,y) = xy + \sin x + h$$

και από την (2) παίρνουμε

$$x + h'(y) = x+\sin y \Rightarrow h'(y) = \sin y \Rightarrow h(y) = -\cos y + c_1 .$$

Άρα

$$g(x,y) = xy + \sin x - \cos y + c_1$$

και συνεπώς παίρνουμε τη λύση στην πεπλεγμένη μο

$$\sin x - \cos y + xy = c .$$

$\square$

* Γραμμικές Ομογενείς Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης με σταθ... συντελεστές

Έστω η δ.ε.

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Αν η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

έχει:

i) Δύο πραγματικές ρίζες $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

ii) Δύο ίσες ρίζες $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, τότε

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}.$$

iii) Δύο μιγαδικές ρίζες $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, τό...

$$y = e^{ax}\left[c_1 \text{συν} bx + c_2 \text{ημ} bx\right].$$

Άσκηση 5.1 Να λυθεί η ΔΕ

$$y'' - 5y = 0$$

Λύση Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ είναι

$$\lambda^2 - 5 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\lambda - \sqrt{5})(\lambda + \sqrt{5}) = 0$$

και επομένως οι χαρακτηριστικές της ρίζες είναι

$$\lambda_1 = \sqrt{5}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{5}.$$

Επειδή οι ρίζες είναι πραγματικές και διαφορετικ

η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{-\sqrt{5}x}.$$

$\square$

Άσκηση Να λυθεί η ΔΕ

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

και έχει ρίζες

$$\lambda_1 = -2 + i \ , \ \lambda_2 = -2 - i .$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x .$$

$\square$