ΑΥΤΟΣΥΖΥΓΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΘΟΜΟΝΑΔΙΑΙΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Άσκηση 7 Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης και έστω W ένας υπόχωρος του V. Τότε $V = W \oplus W^{\perp}$ δηλαδή κάθε διάνυσμα $a \in V$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $a = a_1 + a_2$ όπου $a_1 \in W$ και $a_2 \in W^{\perp}$. Ορίζουμε έναν γραμμικό τελεστή U τέτοιον ώστε

$$Ua = a_1 - a_2 .$$

α) Να αποδειχτεί ότι ο τελεστής U είναι *αυτοσυζυγής* (*ερμιτιανός*).
β) Να αποδειχτεί ότι ο τελεστής U είναι *ορθομοναδιαίος*.

Άσκηση 8 Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης. Για κάθε $a, \beta \in V$ θεωρούμε έναν γραμμικό τελεστή $T_{a,\beta}$ τέτοιον ώστε

$$T_{a,\beta}(\gamma) = <\gamma, \beta> a$$

όπου $\gamma \in V$.

α) Να αποδειχτεί ότι $T^{*}_{a,\beta} = T_{\beta,a}$.

β) Κάτω από ποιες συνθήκες είναι ο $T_{a,\beta}$ *αυτοσυζυγής* (*ερμιτιανός*);