

## ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

Άσκηση 9 Έστω  $V$  ο χώρος  $C^2$  εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^2 x_i \bar{y}_i$$

όπου  $\vec{a} = (x_1, x_2)$  και  $\vec{b} = (y_1, y_2)$  διανύσματα του χώρου  $V$ . Θεωρούμε έναν γραμμικό τελεστή  $T$  ο οποίος εκφράζεται από τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

- α) Να αποδειχτεί ότι ο τελεστής  $T$  είναι κανονικός.
- β) Να βρεθεί μία ορθομοναδιαία βάση του  $V$  η οποία να αποτελείται από χαρακτηριστικά διανύσματα του πίνακα  $A$ .

Άσκηση 10 Έστω  $T$  ένας κανονικός τελεστής σε έναν μιγαδικό διανυσματικό χώρο εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης.

- α) Να αποδειχτεί ότι αν ο τελεστής  $T$  είναι αυτοσυζυγής τότε όλες οι χαρακτηριστικές του τιμές είναι πραγματικοί αριθμοί.
- β) Να αποδειχτεί ότι αν ο τελεστής  $T$  είναι θετικός τότε όλες οι χαρακτηριστικές του τιμές είναι θετικοί αριθμοί.
- γ) Να αποδειχτεί ότι αν ο τελεστής  $T$  είναι ορθομοναδιαίος τότε όλες οι χαρακτηριστικές του τιμές έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα.