Μάθημα: **Λογισμός Πολλών Μεταβλητών**

Διδάσκων: Καθηγητής Χρήστος Σχοινάς

Εργασία 2

Άσκηση 2.1

Έστω $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ όπου $\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases}$

Να δείξετε ότι:

$$\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

Άσκηση 2.2

Έστω $z=f(x-ay)+f(x+ay)$ αυθαίρετες και δύο φορές παραγωγίσιμες.

Να δείξετε ότι:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

[Παραδοτέα έως **Τρίτη 21-04-2015**]

Άσκηση 2.1

Έστω $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ $\qquad \begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases}$

Να δείξετε ότι:

$$\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}\,.$$

Απ.

Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}=$$

$$\frac{y-x}{x^2+y^2}=\frac{u-v-u-v}{(u+v)^2+(u-v)^2}=\frac{-2v}{2\left(u^2+v^2\right)}=\frac{-v}{\left(u^2+v^2\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}+\frac{-\frac{x}{y^2}(-1)}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}=$$

$$\frac{y+x}{x^2+y^2}=\frac{u-v+u+v}{(u+v)^2+(u-v)^2}=\frac{2u}{2\left(u^2+v^2\right)}=\frac{u}{\left(u^2+v^2\right)}$$

Άρα

$$\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$$

Άσκηση 2.2

Έστω $z = f(x-ay)+f(x+ay)$ αυθαίρετες και δύο φορές παραγωγίσιμες. Να δείξετε ότι:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Απ.

Θέτουμε $u = x - ay, \quad v = x + ay$.

Έχουμε $z = f(u)+f(v)$

Άρα

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{df}{du}(-a) + \frac{df}{dv}(a) = a\left(-\frac{df}{du} + \frac{df}{dv}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -a\frac{d^2 f}{du^2}\frac{\partial u}{\partial y} + a\frac{d^2 f}{dv^2}\frac{\partial v}{\partial y} = a^2\frac{d^2 f}{du^2} + a^2\frac{d^2 f}{dv^2} = a^2\left(\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{d^2 f}{dv^2}\right).$$

Επίσης

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{df}{du} + \frac{df}{dv} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d^2 f}{dv^2}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{d^2 f}{du^2} + \frac{d^2 f}{dv^2}$$

Άρα

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\left(\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{d^2 f}{dv^2}\right) = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$