ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$f = f(x,y,z)$, $grad\ f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$,

$\vec{F}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},\ rot\,\vec{F} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

<u>Θεώρημα</u> (*Κριτήριο του Sylvester*) Έστω η πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση f και P κρίσιμο σημείο της f. Για συντομία χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_i \partial x_j},\ \ i,j \in \{1,2,...,n\}.$$

και τις ορίζουσες

$$\Delta_1 = a_{11},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

οι οποίες ονομάζονται ορίζουσες Εσσιανών πινάκων. Τότε:

(i) Αν $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, …, $\Delta_n>0$,
τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο P.

(ii) Αν $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, …, $(-1)^n\Delta_n>0$,
τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο P.

(iii) Αν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii) και $\Delta_k \neq 0$,
$\forall k \in \{1,2,...,n\}$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο P.

(iv) Αν $\Delta_k=0$, για κάποιο $k \in \{1,2,...,n\}$,
τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P.

$$E = \frac{1}{2}\int_c xdy - ydx,\quad \mathrm{E} = \iint_D dxdy,\quad V = \iiint_D dxdydz$$

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)),\ \int_c Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$m = \iint_D s\,(x,y)dxdy,\ \ \bar{x} = \frac{\iint_D xs\,(x,y)dxdy}{m},\ \ \bar{y} = \frac{\iint_D ys\,(x,y)dxdy}{m}$$

$$m = \iiint_D s\,(x,y,z)dxdydz,\ \ \bar{x} = \frac{\iiint_D xs\,(x,y,z)dxdydz}{m},\ \bar{y} = \frac{\iiint_D ys\,(x,y,z)dxdydz}{m},\ \ \bar{z} = \frac{\iiint_D zs\,(x,y,z)dxdydz}{m}$$