11ο Πανελλήνιο Συνέδριο

Ένωση Ελλήνων Φυσικών

30 Μαρτίου - 2 Απριλίου 2006

Χάος και Πολυπλοκότητα Θεωρία και Πράξη

Γεώργιος Π. Παύλος

Αναπληρωτής Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Λάρισα, 2006

Περίληψη-Εισαγωγή

Η επιστήμη του Χάους και της Πολυπλοκότητας αναπτύσσεται ραγδαία τις τελευταίες δεκαετίες τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο. Μεγάλη συμβολή για την ανάπτυξη της νέας αυτής επιστήμης προήλθε από τους ηλεκτρονικὸς υπολογιστές κ̀θόσον οι μη γρὰμικές εξισώσεις που υπεισέρχονὶ στην μελέτη τ̀ς πολυπλοκότητὰ μόνο με ισχυρή υπολογιστική δύεαμη μπορούσαν ν'αντιμετωπιστούν. Αν θέλαμε να συμπηκνώσουμε τα καίρια χαρακτηριστικά της επιστήμης της πολυπλοκότητος θα λέγαμε ότι η πολυπλοκότητα σημαίνει τρία κυρίως πράγματα: Μη γραμμικότητα, στοχαστικότητα και μη αναγωγικότητα. Η μηγρμμικότητα είναι το κυρίαρχο στοιχείο της φύσης σε όλα τα επίπεδα της φυσικής πραγματικότητας με κύριες συνέπειες το χάος και την αυτοοργάνωση. Η στοχαστικότητα γίνεται εν γένει ιδιότητα των μη γραμμικών συστημάτων λόγω της δύναμης αστάθειας (ευαισθησία ως προς τις αρχικές συνθήκες) και αποτελεί τη γέφυρα μεταξύ συντηρητικών και καταναλισκόντων συστημάτων. Τα στοχαστικά δυναμικά συστήματα με την έννοια των Μαρκοβιανών διαδικασιών αποτελούν το νέο «ζωολογικό κήπο» της επιστήμης, αφού σε αυτά περιέχονται όλα τα μοντέλα που χρειάζεται κανείς για να περιγράψει την φυσική πραγματικότητα στην πολυπλοκότητά της, είτε πρόκειται για δημιουργία νέων μορφών (patterns) είτε για φράκταλ φυσικές δομές, είτε για τη δύναμη των πληθυσμών, είτε πρόκειται για πολύπλοκες λειτουργίες σε επίπεδο οικολογίας, οικονομίας, τεχνικής νοημοσύνης κλπ. Τα κυτταροειδή αυτόματα (νετερμινιστικά ή στοχαστικά) στη γενικότητά τους αποτελούν την ψηφιακή εκδοχή των δυναμικών συστημάτων όπου ο χώρος και ο χρόνος γίνονται διακριτά σύνολα σημείων και στιγμών, ενώ ο δυναμικός νόμος γίνεται αλγόριθμος. Στη θεωρία της πολυπλοκότητος ξεπερνιέται ο κλασσικός αναγωγισμός και αναδεικνύεται η ευρηματικότητα της φύσης να χρησιμοποιεί σε κάθε περιοχή φυσικών φαινομένων τον αντίστοιχο «αλγόριθμο» και την «κατάλληλη δυναμική» χωρίς να είναι δυνατόν οι δυναμικές υψηλότερου επιπέδου να αναχθούν σε κάποιες ή κάποια θεμελιώδη δυναμική χαμηλότερου επιπέδου. Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε τις βασικές αρχές και τα βασικά μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούμε σήμερα για να περιγράψουμε τα πολύπλοκα συστήματα και την αξιοποίησή σε προβλήματα ανάλυσης και μοντελοποίησης σωμάτων που προέρχονται από πολύπλοκες διεργασίες.

Μη Γραμμικά Ντετερμινιστικά Δυναμικά Συστήματα (Ν.Δ.Σ.)

Η δύναμη ενός ντετερμινιστικού δυναμικού συστήματος καθορίζεται στο χώρο φάσης ή χώρο καταστάσεων K(x), ο οποίος μπορεί να είναι πεπερασμένης διάστασης (Rn) ή απειροδιάστατος συναρτησιακός χώρος Hilbert. Οι στιγμιαίες καταστάσεις X(t) του συστήματος αντιστοιχούν σε σημεία του χώρου καταστάσεων X και καθορίζονται από το Δυναμικό Νόμο St

$$S_t = K \to K$$

ο οποίος παίρνει τη μορφή διαφορικών εξισώσεων (συνήθων ή με μερικές παραγώγους)

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{x}(t), \lambda)$$

Εάν το σύστημα είναι συνεχώς απλωμένο στο χώρο τότε η κατάσταση X είναι χωροχρονική συνάρτηση X (τ,t). Οι ποσότητες X που ορίζουν την κατάσταση μπορεί να είναι θέσεις και ταχύτητες σωμάτων, πεδία ταχυτήτων, πυκνότητος, θερμοκρασιών και μέτρα άλλων υλικών καταστάσεων (συνεχή μέσα), συγκεντρώσεις χημικών ουσιών, μέτρα πληθυσμών (κυττάρων, οργανισμών, κλπ), δείκτες χρηματιστηρίου και εν γένει κάθε ποσότητα που εκφράζεται με ακέραιους ή πραγματικούς αριθμούς που ορίζεται σε ένα σημείο του χώρου ή σε ολόκληρες χωρικές περιοχές.

Η μη γραμμικότητα αναφέρεται στον μη γραμμικό χαρακτήρα της συνάρτησης F(x) -(πεδίο ροής στο χώρο καταστάσεων)-, ενώ η παράμετρος λ χαρακτηρίζει την εξάρτηση του συστήματος από το περιβάλλον. Για ορισμένες περιπτώσεις αρκεί να υπολογίζονται οι ποσότητες x σε διακριτά χρονικά σημεία t1, t2, …tn, οπότε μιλάμε για διακριτά στο χρόνο συστήματα και ο δυναμικός νόμος παίρνει τη μορφή απεικόνισης (map):\

$$X_{n+1} = F(x_n, \lambda)$$

Τα δυναμικά συστήματα μπορεί να είναι αντιστρεπτά ή μη αντιστρεπτά στο χρόνο. Το σύνολο των καταστάσεων του συστήματος στην ροή του χρόνου αντιστοιχεί στη δυναμική τροχιά του συστήματος στο χώρο καταστάσεων ενώ μια τροχιά ποτέ δεν κόβει τον εαυτό της και ορίζεται πλήρως, προς το μέλλον ή το παρελθόν, από μια αρχική κατάσταση X0. Χαοτική δυναμική έχουμε όταν δύο άπειρα γειτονικές τροχιές, σε περιοχή απειριστής ακτίνος, έτσι ώστε το αρχικό σφάλμα δ, (ακτίνα αρχικής περιοχής), ν'αυξάνει εκθετικά. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα διαθέτει έναν ή περισσότερους χαοτικούς ελκυστές, γεννά πληροφορία και εντροπία. Η δυναμική στο χώρο καταστάσεων μπορεί να εκφραστεί και με την χρονική μεταβολή ενός όγκου καταστάσεων, ο οποίος μετασχηματίζεται διαρκώς στον χρόνο, και στα μεν συντηρητικά (χαμηλότονα) συστήματα αλλάζει σχήμα, όχι όμως μέτρο. Ενώ στα καταναλίσκοντα (dissipative) συστήματα μπορεί να ελαττώνεται (ή και ν'αυξάνεται). Στην περίπτωση των καταναλισκόντων συστημάτων μπορούμε να έχουμε την ύπαρξη ελκυστών στον χώρο καταστάσεων, οι οποίοι δεσμεύουν όλες τις τροχιές που πλησιάζουν την περιοχή έλξης των. Οι ελκυστές μπορεί να είναι ευσταθείς (οριακό σημείο, οριακός κύκλος, οριακός τόρος) ή ασταθείς με ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες και θετικούς εκθέτες Λιαπούνοφ (παράξενος ελκυστής). Οι ελκυστές στα καταναλίσκοντα συστήματα προκύπτουν από τη δυνατότητα ελάττωσης του όγκου καταστάσεων και επομένως ελάττωση των βαθμών ελευθερίας (αναγωγή της διάστασης), δυναμικό γεγονός που παρουσιάζεται ως αυτοοργάνωση και ανάπτυξη χωροχρονικών συσχετίσεων και συντονισμών, κεντρικό θέμα της χαοτικής δυναμικής και της Θεωρίας της Πολυπλοκότητος (Θ.Π.).Ένα γενικό σενάριο συμπεριφοράς όλων των καταναλισκόντων μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων συνδέεται με την μεταβολή της τοπολογίας των τροχιών (λύσεων) μέσα στο χώρο καταστάσεων όταν μεταβάλλεται η παράμετρος ελέγχου λ. Για μερικές τιμές του λ το σύστημα μένει σε κατάσταση ισορροπίας (οριακό σημείο) ενώ αυξάνοντας σταδιακά τις τιμές του λ η τοπολογία των λύσεων από οριακό σημείο σε οριακό κύκλο, σε οριακό τόρο και μετά σε παράξενο ελκυστή.Το γενικό αυτό σενάριο έχει επιβεβαιωθεί σε διαφορετικές κατηγορίες καταναλισκόντων συστημάτων, με πεπερασμένους ή άπειρους βαθμούς ελευθερίας, όπως οι ταλαντωτές (μηχανικοί ή κεντρικοί), τα ρευστά, συστήματα χημικών αντιδράσεων, οικολογικούς πληθυσμούς κλπ. Η καθολικότητα αυτή του χάους είναι κεντρικό γνώρισμα της μη γραμμικής δυναμικής. Η γνώση αυτή αναπτύχθηκε ταυτόχρονα και από αντίθετες κατευθύνσεις: α) από την τάξη στο χάος (λίγοι βαθμοί ελευθερίας) και β) από το χάος (άπειροι βαθμοί ελευθερίας) στην τάξη (αυτοοργάνωση, συσχετίσεις και συντονισμοί μεγάλης κλίμακας). Έτσι είναι εντυπωσιακό και ανεξήγητο στα όρια της κλασσικής και αναγωγικής επιστήμης να βλέπει κανείς διαδικασίες σε διαφορετικά και απομακρυσμένα σημεία του χώρου να συντονίζονται και να συσχετίζονται, ενώ η εμβέλεια των δυναμικών αλληλεπιδράσεων (μεταφορά ύλης και ενέργειας) να μένει περιορισμένη τοπικά έτσι ώστε ο παρατηρούμενος χωροχρονικός συντονισμός να μην εξηγείται κλασσικά. Όπως και στα κβαντικά συστήματα, τα πολύπλοκα συστήματα εμφανίζουν ισχυρό ολιστικό και μη αναγωγικό χαρακτήρα , όπου το όλον καθορίζει το μέρος και δεν εξηγείται από αυτό.

Στοχαστικές διαδικασίες

Στοχαστική διαδικασία έχουμε όταν τα φυσικά μεγέθη είναι τυχαίες μεταβλητές και κάθε στιγμή παίρνουν τιμές με τυχαίο τρόπο μέσα από ένα σύνολο δυνατών τιμών. Έτσι για κάθε τυχαία μεταβλητή X(t) ορίζεται μια πυκνότητα πιθανότητος P(x,t), όπου ρ(x,t) dx είναι η πιθανότητα P(x, x + Δx j t) η μεταβλητή x να πάρει την στιγμή tτιμές στο διάστημα (x, x + dx), P(x, x+ Δx j t)=ρ(x,t)dx. Για κάθε τυχαία μεταβλητή ορίζουμε τη μέση τιμή E(x)= < x > και την διασπορά $\sigma^2(x) = < (x - < x >)^2 >$ από τη μέση τιμή. Αντίστοιχα ορίζουμε συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών και μέσες τιμές και αποκλίσεις συναρτήσεων, καθώς και συσχετίσεις $\sigma(x_1,x_2)$ τυχαίων μεταβλητών ως προς δείκτες ποσοτικούς (μέσες τιμές γινομένων τυχαίων μεταβλητών), που δείχνουν το βαθμό συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών στο χώρο και στο χρόνο:

$\sigma(x_1,x_2)=<x_1\ x_2>$

Μια στοχαστική διαδικασία υποδηλώνει μια κατάσταση όπου για κάθε στιγμή t το μέγεθος x (τυχαία μεταβλητή) παίρνει τυχαίες τιμές έτσι που να μπορούμε να μιλάμε για την πιθανότητα P (x(t)) πραγματοποίησης μιας ολόκληρης τροχιάς μέσα στον χώρο των δυνατών καταστάσεων.

$$p(X_\Gamma(t)) = \rho(x_\Gamma(t))\Delta x(t)$$

Όπου $X_\Gamma(t)$ η τροχιά στον χώρο καταστάσεων που εντοπίζεται σε κάθε σημείο της με εύρος $\Delta x(t)=\Pi\ dx(t)$ το συνολικό διαφορικό εύρος της τροχιάς. Εδώ έχουμε αντίστοιχη εικόνα με τα ολοκληρώματα δρόμου (path integrals) του Φέϊμαν στην Κ.Θ. με μόνη διαφορά ότι στην κβαντική πιθανοκρατία έχουμε πλάτη πιθανότητος και συμβολή πλατών. Αντίστοιχα στη χαοτική δυναμική οι φυσικές καταστάσεις παράγονται διαρκώς με πιθανοκρατικό τρόπο. Από την άποψη αυτή η θεωρία της πολυπλοκότητας μπορεί να θεωρηθεί ως γενικευμένη κβαντική θεωρία. Μια στοχαστική διαδικασία μπορεί να περιγράφει ένα φυσικό σύστημα με λίγους βαθμούς ελευθερίας ή με άπειρους βαθμούς ελευθερίας, πεδίο όπου οι τυχαίες μεταβλητές ορίζονται σε κάθε σημείο του χώρου και σε κάθε χρονική στιγμή. Η στοχαστικότητα των πολύπλοκων φυσικών συστημάτων όπως και στα κβαντικά συστήματα είναι ευγενές δυναμικό στοιχείο και όχι υποκειμενική αδυναμία παρατήρησης. Αυτό είναι και η πεμπτουσία της χαοτικής δυναμικής. Όταν η πιθανότητα περάσματος από μια κατάσταση σε άλλη εξαρτάται μόνο από την αρχικήκαι την τελική στιγμή τότε έχουμε Μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες σύμφωνα με τη σχέση

$$p(x\ t) = \int w(x.t / x', t') p(x', t') dx'$$

όπου w(x,t/x,t) η πιθανότητα μετάβασης σε μία Μαρκοβιανή διαδικασία αποδεικνύεται ότι η πυκνότητα πιθανότητας P(x,t) ικανοποιεί εξίσωση τύπου Φοκκερ Πλανκ

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[F_0(x,t)p(x,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(x,t)p(x,t)]$$

Η ποσότητα F(x,t)περιγράφει την ταχύτητα μεταβολής ως την μέση τιμή της διαφοράς δύο γειτονικών στο χρόνο μεταβλητών

$$F(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{< x(t+\Delta t) - x(t) >}{\Delta t}$$

Ενώ η ποσότητα περιγράφει την διάχυση διασπορά από την μέση τιμή από την μέση τιμή της μεταβλητή ς χ

$$D(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{< [x(t+\Delta t) - x(t)]^2 >}{\Delta t}$$

Για κάθε εξίσωση πυκνότητας πιθανότητας Φόκκερ Πλάνκ αντιστοιχεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + w(t)$$

Όπου w(t) λευκός θόρυβος.

Συνοψίζοντας έχουμε τα ακόλουθα:

Για χαοτικά ντετερμινιστικά συστήματα με λίγους ή άπειρους βαθμούς ελευθερίας μπορούμε να αντιστοιχίσουμε Μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες που περιγράφονται είτε από εξισώσεις ΦΠ που αφορούν την πυκνότητα πιθανότητας είτε στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, που αφορούν τυχαίες μεταβλητές .

Η θερμοδυναμική της πολυπλοκότητας

Η θερμοδυναμική περιγραφή της πολυπλοκότητας οδηγεί σε μια ενοποιημένη θεωρία διαδικασιών δημιουργίας μορφών κοντά σεισορροπία ή μακριά από θερμοδυναμική ισορροπία. Σε ένα θερμοδυναμικό σύστημα έχουμε παραγωγή εντροπίας από μη αντιστρεπτές διαδικασίες όπως μεταφορά θερμότητας, διάχυση ύλης και ορμής, χημικές αντιδράσεις κλπ. Εν γένει ορυθμός παραγωγής εντροπίας των μη αντιστρεπτών διαδικασιών περιγράφεται από τη γενική σχέση

$$\sigma_S = \sum_i y_i x_i$$

όπου τα yiείναι οι ροές και τα xi οι θερμοδυναμικές δυνάμεις. Αποδεικνύεται ότι κοντά σε θερμοδυναμική ισορροπία έχουμε ελάχιστο ρυθμό παραγωγής εντροπίας, ενώ μακριά από θερμοδυναμικής ισορροπίας έχουμε τη δυνατότητα παραγωγής αρνητικής εντροπίας (δημιουργία τάξης και αυτοοργάνωσης) σύμφωνα με το θεώρημα Γκλασντορφ του Πριγκοζίν. Η ελεύθερη ενέργεια F ενός θερμοδυναμικού συστήματος περιγράφει την δυνατότητα του συστήματος να παράγει ένα μακροσκοπικό αποτέλεσμα και επομένως να περάσει σε καταστάσεις αυτοοργάνωσης. Η διαδικασία αυτοοργάνωσης πριγράφεται από τη δυναμική των παραμέτρων τάξης οι οποίες οδηγούν εν γένει το σύστημα στην κατάσταση μακροσκοπικής τάξης και ικανοποιούν στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις που συνδέονται με αντίστοιχες εξισώσεις Φωκκερ Πλανκ πυκνότητας πιθανότητας. Η ελεύθερη ενέργεια (θερμοδυναμικό δυναμικό) εκφράζεται ως συνάρτηση των παραμέτρων τάξης και για καταστάσεις σταθερές ελαχιστοποιείται. Η διαδικασία αυτή ελαχιστοποίησης του θερμοδυναμικού δυναμικού αντιστοιχείσε διαδικασία σπασίματος συμμετρίας και δημιουργία τάξης μέσω μακροσκοπικών συσχετίσεων των παραμέτρων τάξης. Οι παράμετροι τάξης ικανοποιούν εν γένει μη γραμμικές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις συνήθως ή με μερικές παραγώγους αναλόγως εάν το σύστημα είναι με λίγους ή άπειρους βαθμούς ελευθερίας (απλωμένο στο χώρο). Τις εξισώσεις αυτές θα τις χαρακτηρίσουμε εξισώσεις τύπου Λανταου-Γκινζμπουρκ αφού για πρώτη φορά χρησιμοποιούνται από τους Λανταου-Γκινζμπουρκ για την περιγραφή φαινομένων αλλαγής φάσης όπου για πρώτη φορά διαπιστώθηκε η δυνατότητα αυτομάτου σπασίματος συμμετρίας και δημιουργίας τάξης από το χάος.

Μορφοκλασματικά αντικείμενα ή δομές Φράκταλ

Οι δομές φράκταλ εμφανίζονται παντού γύρω μας τόσο ως γεωμετρικές δομές όσο και ως δυναμικές διαδικασίες. Χαρακτηριστικό τους γνώρισμα είναι η αυτοομοιότητα (απουσία χαρακτηριστικής κλίμακας) όσο και η κλασματική τους διάσταση.Κατανομέ γαλαξιών, αστεροειδών, ακτογραμμές, όργανα φυτών ή ζώων, δίκτυα ποταμών, ρίγματα στα στερεά ή στον φλοιό της γης, διάδοση ηλεκτρικών εκκενώσεων στην ατμόσφαιρα, επιφάνειες στερεών, διάχυση υγρών, πολυμερής δομή DNA-RNA στα κύτταρα, η τύρβη των υγρών, φυσικά σήματα θορύβου, ιατρικά σήματα, αστική ανάπτυξη, λύσεις μη γραμμικών εξισώσεων, παράξενοι ελκυστές και χαοτική δυναμική φυσικών διαδικασιών σε όλα αυτά και σε πολλά άλλα η γεωμετρία των φράκταλ είναι παρούσα.. Η κλασματική διάσταση κύριο, χαρακτηριστικό των φρακταλ, είναι το νέο μαθηματικό εύρημα προκειμένου να χαρακτηρίσει σύνολα σημείων τα οποία π.χ. δε μπορούν να γεμίσουν μια επιφάνεια ενώ περισσεεύουν όταν τα στοιβάξουμε σε μια ευθεία ή το αντίστοιχο μεταξύ επιφάνειας και τρισδιάστατου χώρου. Η κλασματική διάσταση ορίζεται από την εξίσωση

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

Όπου Ν(ε) το πλήθος περιοχών διάστασης ε που χρειάζεται για να καλύψουμε το σύνολο των σημείων ενός αντικειμένου φράκταλόταν το εμβαπτίζουμε σε χώρους Rn υψηλότερης διάστασης από την αμέσως υψηλότερη ακέραιη διάσταση της κλασματικής του διάστασης. Από γεωμετρικής απόψεως τα φράκταλ αντικείμενα προκύπτουν από επαναληπτικές διαδικασίες- απεικονίσεις.Το καίριο όμως πρόβλημα είναι η φυσική ερμηνεία των φράκταλ δομών. Μερικοί από τους μηχανισμούς που έχουν προταθεί είναι: η εναπόθεση περιορισμένης διάχυσησDLA(diffusion-limited aggregation), η διαδικασία ενεργών περιπατητών AWM (active- walker model), αυτοοργανούμενη κριτικότητα SOC (self-organised criticality) και μοντέλα κυτταροειδών αυτομάτων (cellular automata). Οι μηχανισμοί αυτοί που δε μπορούμε εδώ να του περιγράψουμε αναλυτικότερα έχουν προέλθει ως γενίκευση από τη βασική ιδιότητα που παρουσιάζουν οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους να περιέχουν λύσεις που αντιστοιχούν σε δομές μιας ισορροπίας.

Μοντελοποίηση και πρόβλεψη τυχαίων σημάτων

Η θεωρία χάους και πολυπλοκότητας μας άνοιξε το δρόμο σε νέες μεθόδους ανάλυσης μοντελοποίησης και πρόβλεψης σημάτων. Τα τυχαία σήματα χ(t) με συνεχές φάσμα ισχύος

$$x(t) = \int c_w e^{-iwt} dw$$

Και γρήγορη απόσβεση της χρονικής των αυτοσυσχέτισης

$$g(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+r)dt = \int \left| c_w \right|^2 e^{-iwt} dt$$

Πριν την ανάπτυξη της θεωρίας του χάους και της πολυπλοκότητας εν γένει εντοπίζονταν με θόρυβο απείρου διάστασης. Η δυναμική των παράξενων ελκυστών μας άνοιξε έναν καινούριο δρόμο προκειμένου να μπορούμε να διακρίνουμε το θόρυβο από το ντετερμινιστικό χάος λίγων βαθμών ελευθερίας. Αυτό σημαίνει ότι σήματα χαοτικά (με τυχαίο χαρακτήρα) που απορρέουν από ντετερμινιστική δυναμική λίγων βαθμών ελευθέρας διακρίνονται από καθαρώς στοχαστικά σήματα (θόρυβος) που είναι είτε λευκός είτε έγχρωμος. Για το σκοπό αυτό στηριζόμενοι στο θεώρημα του Takens το οποίο μας λέει ότι κάθε δυναμική που παράγει σήμα χ(t) διάστασης D (κλασματικής ή ακέραιης) μπορεί να εμβαπτιστεί επαρκώς σε χώρο Rd όπου d $\geq$ 2D + 1 βάσει της σχέσης

$$\vec{x}(t) = (x(t), x(t+\tau), \ldots, x(t+d\tau))$$

Όπου το ο χρόνος δειγματοληψίας του σήματος,. Έτσι, αξιοποιώντας ικανό αριθμό μετρήσεων ενός μεγέθους στον επανακατασκευασμένο χώρο των φάσεων, δημιουργούμε τοπολογικά ισοδύναμη με την πραγματική τροχιά η οποία μας επιτρέπει να υπολογίσουμε γεωμετρικά και δυναμικά χαρακτηριστικά της δυναμικής που παράγει το παρατηρούμενο σήμα. Δηλαδή υπολογίζουμε στην διάσταση D του ελκυστή, του εκθέτες Λιαπούνοφ λj, βάσει της σχέσης

$$\vec{\xi}(t) = \sum_j c_j \hat{e}_j \exp(\lambda, t)$$

Όπου ξ η απόσταση γειτονικών τροχιών, αλλά και πολύ περισσότερο να προβλέψουμε μελλοντικές τιμές x (t+T) του σήματος S.

$$x(t+\tau) = F^T(\vec{x}(t))$$

Όπου F η συνάρτηση πρόβλεψης (predictor function) η οποία υπολογίζεται στον ανακατασκευασμένο χώρο καταστάσεων με ν τυχαίες μεταβλητές.

Βιβλιογραφία

Abarbanel H., The analysis of observed chaotic data in physical systems, Review of modern physics, vol 65, No 4, 1983

Theiler J. Estimating the fractal dimension of chaotic time series, The London Laboratory Journal, vol 3, no 1, 1990

Haken H., Synergetics, Springer – Verlag 1983

Takayasu H., Fractals in the physical science, Manchester University Press 1990

Nicolis G., Introduction to nonlinear science, Cambridge University Press 1995

Linde A.D., Inflation and quantum cosmology, Academic Press 1990

Nikolis G., Prigogine I., Exploring complexity, Freeman and company 1989

Haken H., Information and self-organization, a macroscopic approach to complex systems, Springer-Verlag 1988

Ruelle D., Chance and Chaos, Princeton University Press 1991, ελληνική μετάφραση εκδόσεις Κωσταράκη 1994

Prigogine I., La fin des Certitudes, ελληνική μετάφραση εκδόσεις Κάτοπτρο 1997

Tsonis A., Randomnicity, Rules and Randomness in the Realm of the Infinite, Imperial College Press 2008

Mikhailov A.S., Loskutov A.Yu., Foundations of Synergetics 2, Springer – Verlag 1991