Ντετερμινιστικά Συστήματα

Στοιχεία Χαοτικής Ανάλυσης

Χρονοσειρών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
-ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΧΑΟΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

1.1 Δυναμικά συστήματα

1.1.1 Ορισμοί

Κάθε σύστημα του οποίου η εξέλιξη από κάποια αρχική κατάσταση περιγράφεται από ένα σύνολο εξισώσεων καλείται δυναμικό σύστημα [5, 50, 123]. Μια μεγάλη ομάδα δυναμικών συστημάτων μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά από ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{c}) \tag{1.1}$$

Το $\boldsymbol{x}$ είναι ένα διάνυσμα n πραγματικών συναρτήσεων ως προς το χρόνο t, που συνήθως περιγράφεται από την σχέση

$$\boldsymbol{x}(t) \equiv \{(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\} \tag{1.2}$$

ή από τον συμβολισμό $x \in R^n$. Ο χώρος R^n λέγεται χώρος φάσεων ή καταστάσεων. Οι συναρτήσεις x_i $(i=1,...,n)$ συνήθως αντιπροσωπεύουν φυσικές ποσότητες όπως θέση, ταχύτητα, θερμοκρασία, πίεση, αλλά και μεγέθη από άλλους επιστημονικούς κλάδους, όπως χημικές συγκεντρώσεις και πληθυσμοί ειδών κλπ. φάσεων ή χώρος των καταστάσεων. Η σταθερά $\boldsymbol{c} \equiv (c_1,...,c_k)$ είναι εξωγενής μεταβλητή και οι c_i $(i=1,....,k)$ καλούνται παράμετροι ελέγχου του δυναμικού συστήματος. Μεταβάλλοντας την τιμή μιας παραμέτρου ελέγχου είναι δυνατόν να αλλάξει η συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος. Κατά την διάρκεια παρατήρησης της εξέλιξης ενός δυναμικού συστήματος οι παράμετρο ελέγχου παραμένουν σταθερές.

Στο χώρο φάσεων, η κατάσταση του συστήματος σε μια δοσμένη χρονική στιγμή καθορίζεται από ένα σημείο. Το σημείο αυτό κινείται σε σχέση με το χρόνο, δημιουργώντας μια τροχιά στο χώρο φάσεων, με ταχύτητα που προσδιορίζεται από το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$: $R^n \rightarrow R^n$ της σχέσης (1.1). Κάθε σημείο στο χώρο των φάσεων διαγράφει μόνο μια τροχιά που είναι συνέπεια της ντετερμινιστικής φύσεως της περιγραφής του συστήματος. Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι αν κάποια χρονική στιγμή είναι γνωστή μια κατάσταση, τότε με ολοκλήρωση της σχέσης (1.1) γνωρίζουμε και το παρελθόν και το μέλλον.

Στην ειδική περίπτωση ενός σημειακού σωματιδίου η κατάσταση του περιγράφεται από την θέση του (τρεις χωρικές συντεταγμένες) και την ταχύτητα του (τρεις συντεταγμένες ταχύτητας) οπότε ο χώρος φάσεων είναι έξι διαστάσεων. Για ένα σωματίδιο που εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση ο χώρος φάσεων είναι δύο-διαστάσεων, με συντεταγμένες την θέση και την ταχύτητα.

1.1.2 Αυτόνομα και μη αυτόνομα δυναμικά συστήματα

Όταν το πεδίο $\boldsymbol{F}$: $R^n \rightarrow R^n$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο, τότε το δυναμικό σύστημα λέγεται αυτόνομο [5, 50, 123]. Η τύπος του αυτόνομου συστήματος είναι της μορφής

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \tag{1.3}$$

Σε αυτή την περίπτωση οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι δύο τροχιές που αντιστοιχούν στην χρονική εξέλιξη δύο διαφορετικών αρχικών συνθηκών δεν τέμνονται στο χώρο των φάσεων (εκτός από την ειδική περίπτωση που οι τροχιές συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας για $t \rightarrow \infty$). Αυτό είναι μια αναπόφευκτη συνέπεια της ντετερμινιστικής φύσης της περιγραφής του συστήματος. Διαφορετικά για μια μόνο αρχική συνθήκη (το σημείο τομής) θα υπήρχαν δυο διαφορετικές τροχιές, πού συνεπάγεται ότι το σύστημα θα ήταν απρόβλεπτο (μη ντετερμινιστικό) στο σημείο τομής.

Όταν το πεδίο $\boldsymbol{F}$ είναι συνάρτηση του χρόνου το δυναμικό σύστημα λέγεται μη αυτόνομο και περιγράφεται από την εξίσωση (1.1). Σ' αυτή την περίπτωση είναι δυνατόν δύο διαφορετικές τροχιές που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες να διέρχονται από το ίδιο σημείο στο χώρο φάσεων. Αν αυξήσουμε την διάσταση του χώρου φάσεων κατά ένα, θέτοντας το χρόνο ως μεταβλητή, έτσι ώστε οι συντεταγμένες να είναι $x_1(t)$, $x_2(t)$, ...,$x_n(t)$, t τότε το δυναμικό σύστημα μετασχηματίζεται σε αυτόνομο, και οι τροχιές πλέον δεν τέμνονται.

Όταν οι νόμοι που περιγράφουν ένα δυναμικό σύστημα είναι ένα σύνολο από διαφορικές εξισώσεις το σύστημα λέγεται ροή, γιατί η λύση είναι συνεχής στο χρόνο. Το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση (1.1) είναι τέτοιας μορφής. Όταν οι νόμοι είναι ένα σύνολο από εξισώσεις διαφορών με διακριτό χρόνο, το σύστημα λέγεται απεικόνιση και είναι της μορφής

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{f}(x_k) \qquad (1.4)$$

1.1.3 Καταστάσεις ισορροπίας των δυναμικών συστημάτων

1.1.3.1 Γραμμικά δυναμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Ένα δυναμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων λέγεται γραμμικό όταν το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των *μεταβλητών* x_i *(i=1,...,n)*. Ένα γραμμικό σύστημα γράφεται σε διανυσματική μορφή ως

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} \qquad (1.5)$$

όπου $\boldsymbol{A}$ συμβολίζει τον σταθερό, μη ιδιάζοντα (nXn) πίνακα των συντελεστών. Αν όλες οι n ιδιοτιμές λ_i του πίνακα $\boldsymbol{A}$ είναι διαφορετικές, τότε υπάρχουν n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{y}_i$ και η γενική λύση της εξίσωσης (1.5) μπορεί να εκφραστεί με το γραμμικό συνδιασμό

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}\boldsymbol{y}_i \qquad (1.6)$$

όπου οι n σταθερές C_i προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Η κατάσταση $\boldsymbol{x}_s$ του συστήματος για την οποία ισχύει $\dot{\boldsymbol{x}}_s=0$ λέγεται σημείο ισορροπίας και η μελέτη του είναι σημαντική από φυσική άποψη. Ένα σημείο ισορροπίας μπορεί να είναι ασυμπτωτικά σταθερό (καταβόθρα) ή ασταθές (πηγή) αν όλες οι τροχιές που βρίσκονται σε μια γειτονική περιοχή του $\boldsymbol{x_s}$ έλκονται ή απωθούνται από το σημείο ισορροπίας, [5, 50, 123].

Στην ειδική περίπτωση που ο χώρος φάσεων είναι δύο διαστάσεων η μορφή της κατάστασης ισορροπίας εξαρτάται από τις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 του πίνακα ***A*.** Η ταξινόμηση των δυνατών καταστάσεων ισορροπίας σε σχέση με τις ιδιοτιμές είναι:

A. Πραγματικές ιδιοτιμές

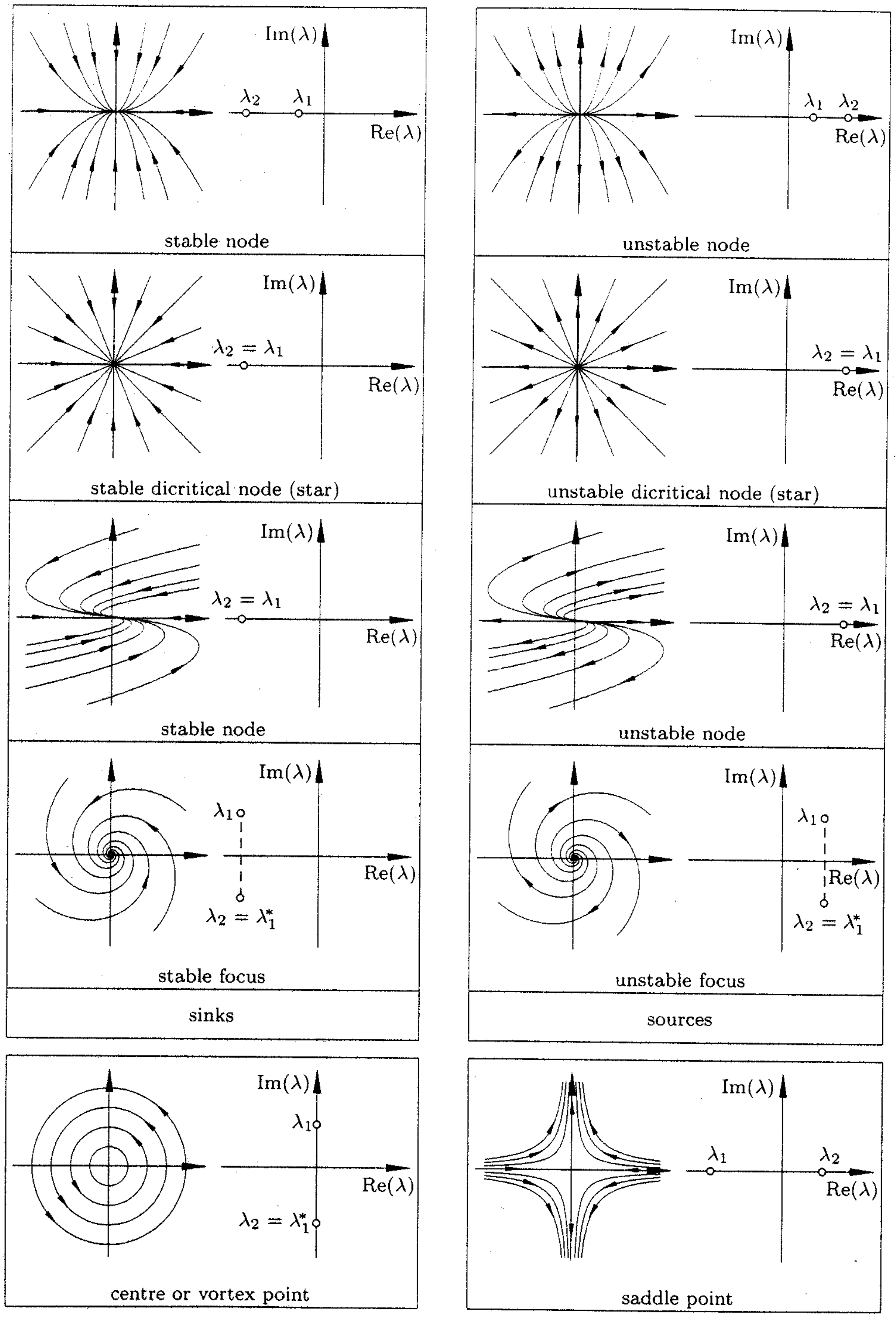
1. Άνισες ιδιοτιμές
    1. Ομόσημες, θετικές για ασταθή κόμβο (unstable node)
    2. Ομόσημες, αρνητικές για σταθερό κόμβο (stable node)
    3. Ετερόσημες για σαγματικό σημείο (suddle point)
2. Ίσες ιδιοτιμές
    1. θετικές για ασταθές αστέρι (unstable (dicritical node or star))
    2. Αρνητικές για σταθερό αστέρι (stable (dicritical node or star))

B. Μιγαδικές ιδιοτιμές ($\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm ib$)

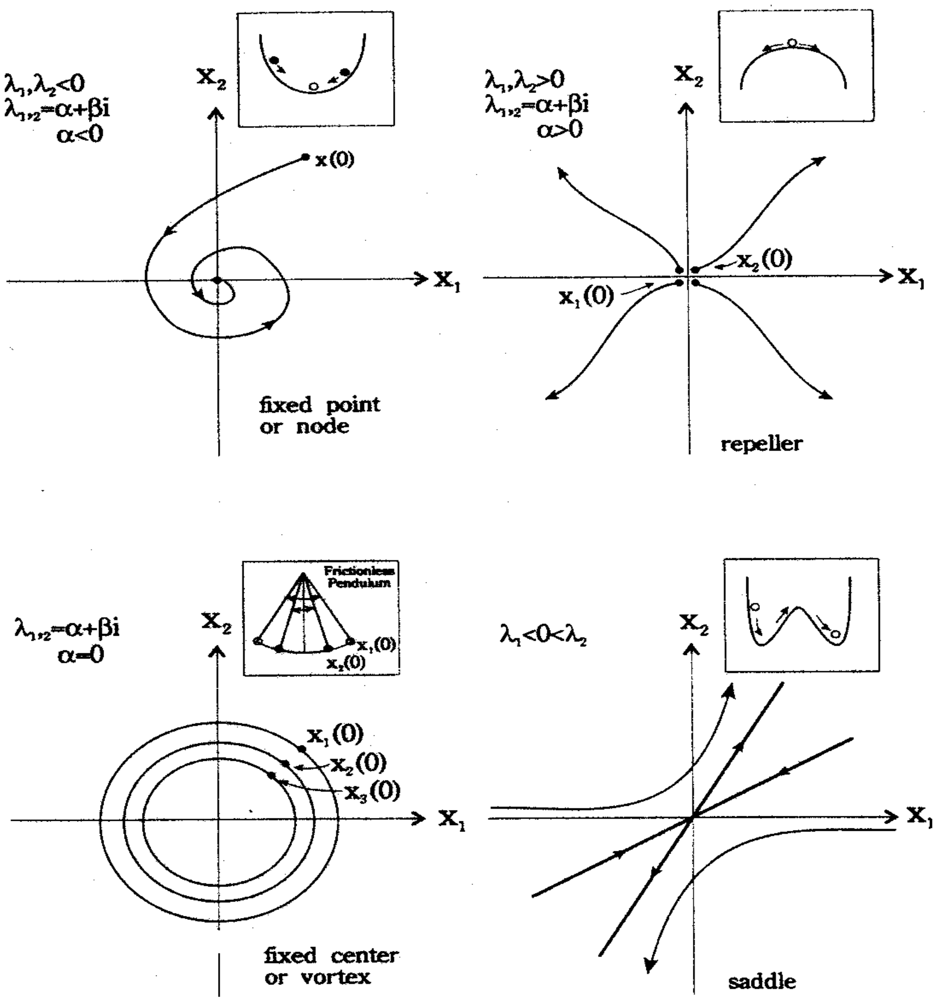
1. Πραγματικό μέρος θετικό για ασταθή εστία (unstable focus)
2. Πραγματικό μέρος αρνητικό για σταθερή εστία (stable focus)
3. Πραγματικό μέρος μηδενικό για σημείο κορυφής (vortex point)

Στο σχήμα 1.1 δείχνονται τα φασικά πορτραίτα των καταστάσεων ισορροπίας όπως περιγράφθηκαν πιο πάνω, ενώ στο σχήμα 1.2 δείχνονται φυσικά συστήματα και οι αντίστοιχες καταστάσεις ισορροπίας τους.

Για το γραμμικό σύστημα δύο μεταβλητών αποδεικνύεται ότι η κατάσταση ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά σταθερή αν και μόνον αν η ορίζουσα του πίνακα ***A*** είναι θετική και το ίχνος του (trace) αρνητικό. Σε κάθε άλλη περίπτωση η κατάσταση ισορροπίας είναι ασταθής.



Σχήμα 1.1 Επισκόπηση των καταστάσεων ισορροπίας στο φασικό χώρο δύο διαστάσεων, φασικά πορτραίτα και ιδιοτιμές.



Σχήμα 1.2 Φυσικά συστήματα (εντός των πλαισίων) και τα αντίστοιχα φασικά πορτραίτα.

1.1.3.2 Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Ένα δυναμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων λέγεται μη γραμμικό όταν το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}$ είναι μη γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών x_i $(i=1,...,n)$ [5, 50, 123]. Ένα μη γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}(t_o)=\boldsymbol{x}_o \tag{1.7}$$

Για τα μη γραμμικά συστήματα με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεν υπάρχουν γενικές μέθοδοι αναλυτικών λύσεων εκτός από ειδικές περιπτώσεις. Στην περίπτωση αυτή το ενδιαφέρον επικεντρώνεται περισσότερο στην ποιοτική παρά στην ποσοτική μελέτη του συστήματος, όπως για παράδειγμα την εύρεση των σημείων ισορροπίας, πού ορίζονται όπως και στα γραμμικά συστήματα. Αυτό γίνεται ειδικότερα φανερό αν θεωρήσουμε για παράδειγμα το πρόβλημα της ροής ενός υγρού γύρο από ένα σώμα. Είναι πιο σημαντικό να απαντήσουμε στην ερώτηση όπως που δημιουργούνται οι δύνες ή πότε η ροή γίνεται τύρβη, παρά να υπολογίσουμε την θέση και την ταχύτητα ενός ξεχωριστού σωματιδίου του υγρού.

Επιπλέον, ενδιαφερόμαστε αν η συμπεριφορά του συστήματος για $t\rightarrow \infty$, η οποία μπορεί να είναι μια κατάσταση ισορροπίας, μια περιοδική λύση ή ακόμα μια ανώμαλη κίνηση, είναι ευσταθής, όπως για παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε το ηλιακό μας σύστημα του οποίου η εξέλιξη για την περίπτωση $t\rightarrow \infty$, είναι μια πρόκληση για πολλούς φυσικούς και μαθηματικούς επιστήμονες.

Ο προσδιορισμός των καταστάσεων ισορροπίας $\boldsymbol{x}_s$ καθώς και η μορφή των τροχιών στην αντίστοιχη περιοχή δίνουν μια πρώτη γενική άποψη της λύσης του μη γραμμικού συστήματος. Για τον λόγο στο χώρο φάσεων πλησίον του σημείου $\boldsymbol{x}_s$ θεωρούμε ένα σημείο $\boldsymbol{x}$, τέτοιο ώστε:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_s + x' \qquad \text{με} \quad |x'| << 1 \tag{1.8}$$

Αντικαθιστώντας την (1.8) στην (1.7) και δεδομένου ότι $\dot{\boldsymbol{x}}_s$ κατάσταση ισορροπίας καταλήγουμε στην μελέτη του γραμμικού συστήματος

$$\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt} = A'\boldsymbol{x}' \tag{1.9}$$

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι ο πίνακας $\boldsymbol{A}'$ ισούται με την Jacobian του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{F}$ εκτιμούμενη στην κατάσταση ισορροπίας $\boldsymbol{x}_s$. Οπότε οι ιδιοτιμές του A'

καθορίζουν την μορφή ισορροπίας (σταθερή ή ασταθής) στην περιοχή του σημείου ισορροπίας.

1.1.3.3 Απεικονίσεις

Πολλά δυναμικά συστήματα περιγράφονται από ένα σύνολο εξισώσεων διαφορών $\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$, που αναφέρονται και ως απεικονίσεις [50, 123]. Για τα σημεία ισορροπίας $\bar{\boldsymbol{x}}$ ισχύει $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k = \bar{\boldsymbol{x}}$, οπότε μπορούμε να τα υπολογίσουμε από την εξίσωση ισορροπίας

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{1.10}$$

Για να προσδιορίσουμε το είδος της κατάστασης ισορροπίας, μελετάμε την χρονική εξέλιξη μικρών διαταραχών γύρο από αυτά, όπως και στην περίπτωση των ροών και καταλήγουμε σε ανάλογα συμπεράσματα.

1.1.4 Διατηρητικά και καταναλίσκοντα δυναμικά συστήματα

Έστω ένα σύστημα N ελευθέρων σωματιδίων με συντεταγμένες θέσεων $\boldsymbol{q}_i$ (i=1,...N). Σε κάθε σωματίδιο αντιστοιχούν τρεις (*3*) βαθμοί ελευθερίας που περιγράφουν πλήρως την θέση του στον Ευκλείδιο χώρο, και οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος είναι *3N*. Στο χώρο φάσεων η κατάσταση ενός σωματιδίου καθορίζεται από έξι (*6*) ανεξάρτητες μεταβλητές, τρεις (*3*) για τη θέση και τρείς (*3*) για την ορμή, οπότε στα N σωματίδια του συστήματος αντιστοιχούν *6N* μεταβλητές.

Στην κλασσική μηχανική η κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος περιγράφεται από την Hamiltonian *H* που δίνεται από το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας των σωματιδίων του συστήματος

$$H = E_{κιν} + E_{δυν} \tag{1.11}$$

μέσω των εξισώσεων

$$\frac{d\boldsymbol{q}_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{t}} \;, \quad \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} \tag{1.12}$$

Συστήματα των οποίων η Hamiltonian δεν εξαρτάται από το χρόνο ονομάζονται διατηρητικά [123]. Σε αυτά τα συστήματα η ολική ενέργεια διατηρείται σταθερή με την έννοια ότι δεν εμφανίζονται απώλειες ενέργειας λόγω τριβής ή άλλης αιτίας. Εμφανίζουν σημαντικές ιδιότητες, μια από τις οποίες είναι η διατήρηση των όγκων στο χώρο των φάσεων, πού απορρέει από την αρχή διατήρησης της μάζας σε συνδυασμό με την διατήρηση της ενέργειας. Επίσης η δυναμική των διατηρητικών συστημάτων είναι αντιστρεπτή ως προς το χρόνο, π.χ αν το φιλμ της κίνησης της Γης γύρο από τον Ηλιο προβληθεί αντίστροφα δεν θα παρατηρηθεί καμιά διαφορά. Το ηλιακό μας σύστημα καθώς και ένα εκκρεμές χωρίς τριβές μπορούν να θεωρηθούν διατηρητικά συστήματα.

Από την άλλη μεριά συστήματα των οποίων η Hamiltonian εξαρτάται από τον χρόνο ονομάζονται καταναλίσκοντα συστήματα [123]. Αυτά τα συστήματα είναι μη γραμμικά και έχουμε απώλειες ενέργειας λόγω εσωτερικών τριβών. Αν παρατηρήσουμε τον όγκο ενός στοιχείου στο χώρο των φάσεων, τότε για $t \to \infty$ αυτός θα συσταλθεί σε ένα υπόχωρο με διάσταση μικρότερη από εκείνη του χώρου φάσεων. Ο υπόχωρος στον οποίο συγκλίνουν οι τροχιές λέγεται ελκυστής του συστήματος, με την έννοια της έλξης των τροχιών. Ανάλογα με τον τρόπο που συγκλίνουν οι τροχιές, ομαλά ή όχι ο ελκυστής μπορεί να είναι ομαλός (regular) ή παράξενος (strange) όπως θα αναφερθεί στις επόμενες παραγράφους. Ο αποσβενόμενος ταλαντωτής είναι ένα τυπικό παράδειγμα καταναλίσκοντος συστήματος. Τα καταναλίσκοντα συστήματα, μπορεί να έχουν μια πολύ πιο περίπλοκη εξελικτική μορφή από την απλή απόσβεση, ειδικά όταν η δυναμική τους περικλείει τόσο φαινόμενα απόσβεσης όσο και μηχανισμούς που τείνουν να διατηρήσουν την ενέργεια τους.

Για ένα μη γραμμικό καταναλίσκον σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση (1.7), όπως αποδεικνύεται, η ιδιότητα συστολής ενός στοιχειώδους όγκου στον χώρο των φάσεων συνεπάγεται την σχέση: ίχνος$(A')<0$, όπου ο A' είναι ο πίνακας της σχέσης (1.9). Για τα διατηρητικά συστήματα όπου έχουμε διατήρηση των όγκων, η αντίστοιχη σχέση είναι: ίχνος$(A') = 0$.

1. 1.5 Ολοκληρώσιμα και μη ολοκληρώσιμα δυναμικά συστήματα

Ένα δυναμικό σύστημα N εξισώσεων είναι ολοκληρώσιμο, αν με κατάλληλο μετασχηματισμό των μεταβλητών μπορεί να μετασχηματιστεί σε N ανεξάρτητες εξισώσεις. Για παράδειγμα έστω το Χαμιλτωνιανό σύστημα

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -x - 2xy \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -y - y^2 - x^2\end{aligned} \tag{1.13}$$

Αυτό είναι ένα σύστημα δύο μη γραμμικών συνεζευγμένων διαφορικών εξισώσεων. Αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό *x=(m+n)/2* και *y=(n-m)/2* καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned}\frac{d^2n}{dt^2} &= -n - n^2 \\ \frac{d^2m}{dt^2} &= -m + m^2\end{aligned} \tag{1.14}$$

που αποτελείται από δύο μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που είναι ανεξάρτητες, και άρα το Χαμιλτωνιανό σύστημα των εξισώσεων (1.13) είναι ολοκληρώσιμο [123]. Το ηλιακό μας σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ολοκληρώσιμο, αφού η κίνηση κάθε πλανήτη μπορεί να αποσυζευχθεί και να μελετηθεί ανεξάρτητα από τους άλλους πλανήτες.

Από την άλλη μεριά το Χαμιλτωνιανό σύστημα

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -x - 2xy \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -y + y^2 - x^2\end{aligned} \tag{1.15}$$

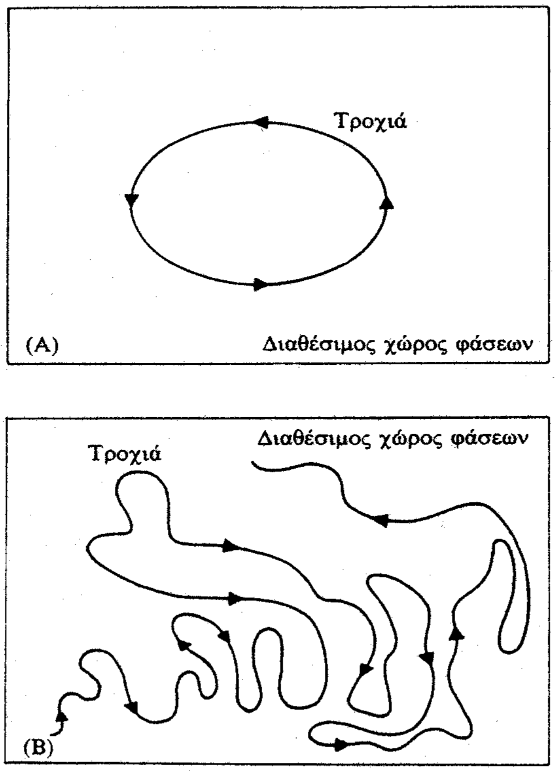
Henon - Heiles σύστημα), που περιγράφει την κίνηση ενός αστέρα μέσα σε ένα γαλαξία, κάτω από την επίδραση των άλλων αστέρων, δεν είναι ολοκληρώσιμο.

Τα ολοκληρώσιμα συστήματα, αν και μπορεί να είναι μη γραμμικά, περιέχουν ομαλές κινήσεις στο χώρο φάσεων. Αντίθετα, τα μη ολοκληρώσιμα συστήματα μπορεί να παρουσιάζουν πολύ πολύπλοκη (που να ομοιάζει σαν τυχαία) κίνηση. Τα καταναλίσκοντα συστήματα είναι όλα μη ολοκληρώσιμα.

1.1.6 Εργοδικά και μη εργοδικά δυναμικά συστήματα

Έστω ένα ιδανικό εκκρεμές που αιωρείται αέναα. Στη διάρκεια μιας περιόδου γίνεται ανταλλαγή ενέργειας από τη δυναμική μορφή, στα άκρα κάθε αιώρησης, στην κινητική μορφή στο κατώτερο σημείο της αιώρησης όταν το εκκρεμές αποκτά την μέγιστη ταχύτητα, και το αντίστροφο. Για μικρές αιωρήσεις το εκκρεμές συνιστά ένα ολοκληρώσιμο σύστημα για το οποίο οι εξισώσεις του Νεύτωνα λύνονται επακριβώς. Το πορτρέτο του εκκρεμούς στο χώρο των φάσεων είναι ένα σημείο που διαγράφει έναν κλειστό , αέναα επαναλαμβανόμενο βρόχο (σχήμα 1.3α) Κάθε περιφορά του σημείου πάνω στο βρόχο αντιστοιχεί στη συμπλήρωση μιας περιόδου της ταλάντωσης του εκκρεμούς. Παρατηρούμε ότι η τροχιά της κίνησης του εκκρεμούς στον χώρο των φάσεων περιορίζεται σε μια πολύ μικρή περιοχή και από αυτή την άποψη το ιδανικό εκκρεμές είναι μη εργοδικό σύστημα.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα πιο πολύπλοκο από το ιδανικό εκκρεμές, όπως για παράδειγμα το σύνολο των μορίων ενός αερίου σε ένα δοχείο. Τα μόρια του αερίου συγκρούονται διαρκώς μεταξύ τους και με τα τοιχώματα του δοχείου με αποτέλεσμα οι ταχύτητές τους να μεταβάλλονται συνέχεια. Ο Boltzmann και ο Gibbs απέδειξαν ότι η τροχιά του συστήματος μετά από αρκετά μεγάλο χρόνο θα έχει καλύψει ολόκληρο τον χώρο φάσεων (σχήμα 1.3β), και από αυτή την άποψη το σύστημα των μορίων ενός αερίου σε ένα κλειστό δοχείο θεωρείται εργοδικό σύστημα, [123]. Κάθε καταναλίσκον δυναμικό σύστημα είναι και εργοδικό ενώ κάθε διατηρητικό μπορεί να είναι και εργοδικό.



Σχήμα 1.3 (α) Πορτραίτο του χώρου φάσεων ενός εκκρεμούς για μικρές αιωρήσεις, όταν αυτό αποτελεί ολοκληρώσιμο δυναμικό σύστημα. Η τροχιά περιορίζεται σε πολύ μικρή περιοχή του χώρου φάσεων. (β) Πορτραίτο του χώρου φάσεων για ένα σύνολο μορίων ενός αερίου. Η τροχιά δοκιμάζει εδώ κάθε μέρος του χώρου φάσεων και η κίνηση είναι εργοδική.

1.2 Μη χαοτικοί ελκυστές

Η χρονική εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος περιγράφεται από την μορφή της τροχιάς του στο χώρο των φάσεων. Ένα φασικό πορτρέτο είναι μια εικόνα που απεικονίζει την εξέλιξη του συστήματος από διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Η τελική κατάσταση ισορροπίας του συστήματος, δηλαδή η μορφή της τροχιάς καθώς $t \rightarrow \infty$, λέγεται οριακό σύνολο.

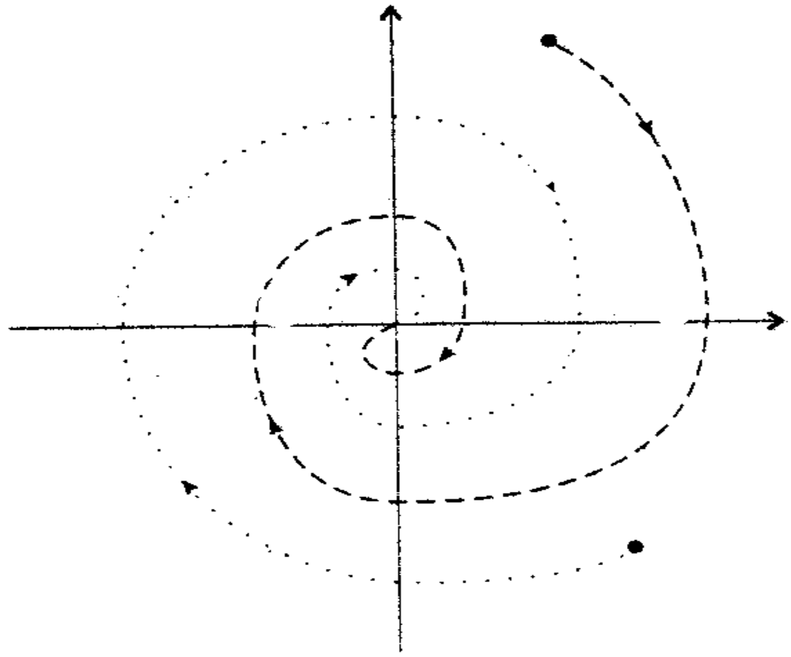
Έχουμε ήδη αναφέρει κατηγορίες οριακών συνόλων, στην παράγραφο για την μελέτη της ισορροπίας των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, όπως το σαγματικό σημείο το κόμβο, το σημείο κορυφής και την εστία [5, 50, 123]. Από αυτές τις κατηγορίες η σταθερή εστία, (stable focus) και ο σταθερός κόμβος (stable node) έλκουν τις τροχιές.

Εξ' ορισμού ένα οριακό σύνολο που έλκει τις τροχιές καλείται ελκυστής. Το σύνολο των αρχικών συνθηκών (τιμών) για τις οποίες παρατηρείται η έλξη λέγεται βάση έλξης του ελκυστή. Ένας ελκυστής ανάλογα με τις ιδιότητες που έχει μπορεί να χαοτικός η μη χαοτικός. Οι ελκυστές προέρχονται από καταναλίσκοντα δυναμικά συστήματα, ενώ τα διατηρητικά δυναμικά συστήματα δεν έχουν αυτή την ικανότητα. Μαθηματικά οι μη χαοτικοί ελκυστές είναι ομαλές τοπολογικές υποπολλαπλότητες του χώρου φάσεων. Οι ελκυστές αυτοί χαρακτηρίζονται από ακέραια διάσταση ίση με την τοπολογική διάσταση του υπόχωρου του χώρου φάσεων. Δεν παρουσιάζουν την ιδιότητα της ευαισθησίας ως προς τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή δυο πολύ κοντινές τροχιές παραμένουν τέτοιες για μεγάλο χρονικό διάστημα. Είναι προφανές ότι η εξέλιξη των μη χαοτικών ελκυστών είναι απολύτως προβλέψιμη για οσοδήποτε μεγάλο χρονικό διάστημα. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην ταξινόμηση και περιγραφή των μη χαοτικών ελκυστών.

Ένας μη χαοτικός ελκυστής μπορεί να είναι οριακό σημείο (σταθερός κόμβος, σταθερή εστία), οριακός κύκλος ή δακτύλιος.

1.2.1 Οριακό σημείο

Ένα ιδανικό εκκρεμές, που κινείται χωρίς τριβή, είναι ένα διατηρητικό σύστημα και η τροχιά του δεν διαταράσσεται. Σε ένα φυσικό εκκρεμές που υπάρχουν τριβές, η ενεργεία του μετασχηματίζεται σε θερμότητα, η ταχύτητα ελαττώνεται σταδιακά και

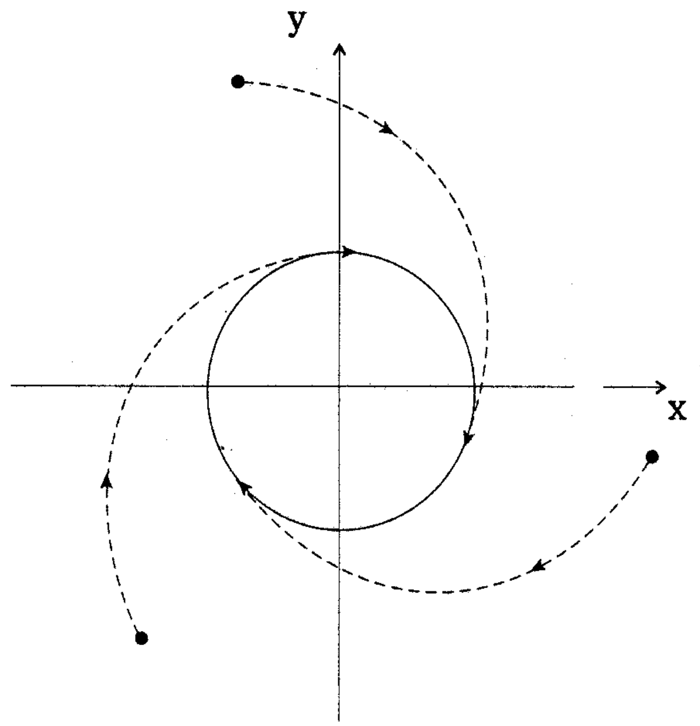


Σχήμα 1.4 Φασικό πορτραίτο για εκκρεμές με τριβές. Οι τελείες αντιπροσωπεύουν τις αρχικές συνθήκες.

τελικά το εκκρεμές σταματάει σε ένα σταθερό σημείο ισορροπίας. Στο σχήμα 1.4 απεικονίζεται η εξέλιξη της τροχιάς στον χώρο των φάσεων που περιγράφεται από την θέση και την ταχύτητα. Όπως φαίνεται στο σχήμα η τροχιά συγκλίνει και τελικά σταματά στο σημείο μηδέν. Οποιαδήποτε άλλη τροχιά που αντιστοιχεί σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες της θέσης και ταχύτητας θα συγκλίνει πάλι στο σημείο μηδέν, το οποίο είναι ο ελκυστής του εκκρεμούς στο χώρο των φάσεων και λέγεται οριακό σημείο. Γενικά οι ελκυστές συστημάτων που φτάνουν σε κατάσταση ισορροπίας είναι οριακά σημεία.

1.2.2 Οριακός κύκλος

Εκτός από ένα σημείο και ένας κύκλος μπορεί να είναι ελκυστής για μια τροχιά στο χώρο των φάσεων. Για παράδειγμα ένας τέτοιος ελκυστής είναι η κίνηση του εξαναγκασμένου εκκρεμούς, στο οποίο η απώλεια ενεργείας λόγω τριβής, αναπληρώνεται από ένα διεγέρτη. Το εκκρεμές εκτελεί περιοδική κίνηση με περίοδο ίση με εκείνη του διεγέρτη, που στο χώρο των φάσεων θέση-ταχύτητας, είναι ένας κύκλος (οριακός



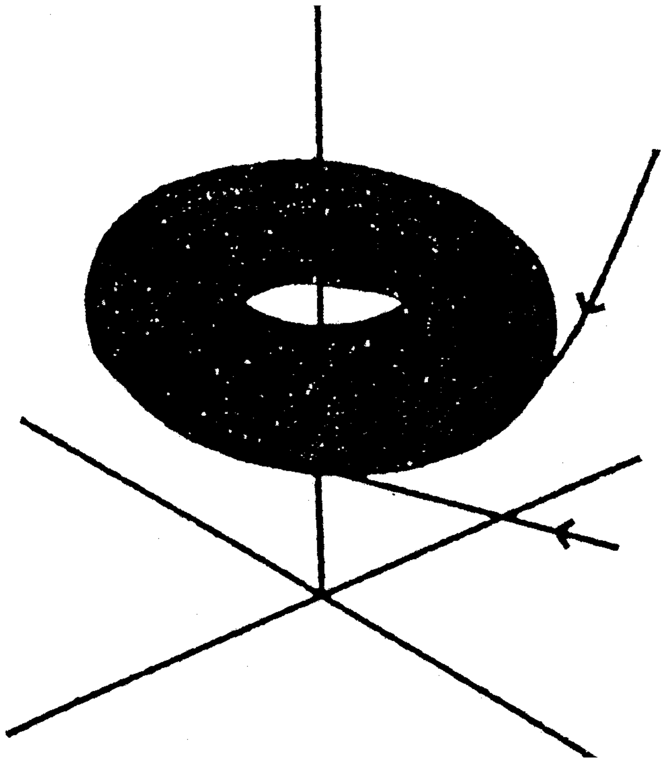
Σχήμα 1.5 Φασικό πορτραίτο συστήματος δύο διαστάσεων που έχει οριακό κύκλο ως ελκυστή. Τροχιές από διαφορετικές αρχικές συνθήκες έλκονται και μένουν πάνω στον κύκλο. Η εξέλιξη του συστήματος είναι περιοδική.

κύκλος). Αν διαταράξουμε την κίνηση του εκκρεμούς μετά από σύντομο χρονικό διάστημα θα επανέλθει στην αρχική του τροχιά (σχήμα 1.5). Ένα άλλο σύστημα που το φασικό του πορτρέτο είναι οριακός κύκλος είναι η καρδιά μας. Ο κτύπος της καρδιάς είναι περιοδικός, αλλά κάτω από ορισμένες συνθήκες (έντασης, πόνου κλπ) η περιοδικότητα διαταράσσεται, αλλά σύντομα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση.

1.2.3 Δακτύλιος

Μια άλλη μορφή μη χαοτικού ελκυστή είναι ο δακτύλιος (τόρος) διάστασης r $(r \geq 2)$ που μπορεί να προέλθει από την εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος με r γραμμικά ανεξάρτητες συχνότητες, δηλαδή ο λόγος δύο τυχαίων συχνοτήτων του συστήματος είναι άρρητος αριθμός.

Ένα τέτοιο σύστημα είναι το αποτελούμενο από δύο εξαναγκασμένους, ασύζευκτους ταλαντωτές που ο λόγος των συχνοτήτων τους είναι άρρητος. Η κίνηση του συστήματος δεν είναι περιοδική, λέγεται ημιπεριοδική (quasi-periodic), η τροχιά στο χώρο των φάσεων



Σχήμα 1.6 Ελκυστής με μορφή δακτυλίου. Δύο αρχικά κοντινές τροχιές παραμένουν στην επιφάνεια του δακτυλίου για πάντα το ίδιο κοντινές.

δεν είναι κλειστή και καλύπτει την επιφάνεια ενός δακτυλίου (σχήμα 1.6). Ημιπεριοδικές κινήσεις συμβαίνουν συχνά στην φύση. Η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι μια ημιπεριοδική μεταβλητή με δύο διακριτές συχνότητες, 2π/24 ώρες και 2π/365 ημέρες.

1.3 Στοιχεία κλασσικής ανάλυσης χρονοσειρών

1.3.1 Ορισμοί

Με τον όρο χρονοσειρά ορίζουμε μια συλλογή από παρατηρήσεις που λαμβάνουν χώρα διαδοχικά στο χρόνο, [96].

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα χρονοσειρών, όπως φυσικές, οικονομικές, τηλεπικοινωνιακών δεδομένων, κλπ.

Μια χρονοσειρά συμβολίζεται με συνήθως με την μεταβλητή $x(t)$, όπου ο δείκτης t δηλώνει χρόνο.

Μια χρονοσειρά λέγεται διακριτή (συνεχής), όταν ο δείκτης t λαμβάνει τιμές στο σύνολο των φυσικών αριθμών (στο σύνολο των πραγματικών αριθμών).

Οι χρονοσειρές που αναλύονται ευκολότερα είναι αυτές που αποτελούνται από παρατηρήσεις που λαμβάνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα και οι χρονοσειρές που αναλύουμε ανήκουν σ' αυτή την κατηγορία.

1.3.2 Συντελεστής αυτοσυσχέτισης

Η συνάρτηση αυτοδιασποράς $\gamma(\tau)$ μιας χρονοσειράς $x(t)$ με μέση τιμή μ δίνεται από τη σχέση

$$\gamma(\tau)= E\{[x(t+\tau)-\mu][x(t)-\mu]\} \tag{3.1}$$

Όταν η μέση τιμή της χρονοσειράς είναι μηδέν, τότε η συνάρτηση αυτοδιασποράς λέγεται συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function). Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης περιγράφει ιδιότητες μιας χρονοσειράς στο πεδίο του χρόνου, [96].

Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ρ(τ) μιας χρονοσειράς δίνεται από τη σχέση

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} \tag{3.2}$$

και περιγράφει την γραμμική συσχέτιση μεταξύ των τιμών $x(t)$ και $x(t+\tau)$ της χρονοσειράς. Για τον συντελεστή αυτοσχέτισης ισχύουν οι σχέσεις, $\rho(0)=1$ και $|\rho(\tau)| \leq 1$. Είναι δυνατόν δύο χρονοσειρές που δεν έχουν κανονική κατανομή να έχουν τον ίδιο συντελεστή αυτοσυσχέτισης και αυτό δημιουργεί πρόβλημα όσο αφορά την μελέτη μιας χρονοσειράς με βάση τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης.

Ο εκτιμητής του συντελεστή αυτοσυσχέτισης για μια χρονοσειρά με Ν μετρήσεις δίνεται από τη σχέση

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k}[x(t+k)-\bar{x}][x(t)-\bar{x}]}{\sum_{t=1}^{N-k}[x(t)-\bar{x}]^2} \tag{3.3}$$

για $k = 0,1,2,...m$, όπου $\bar{x}$ είναι ο μέσος του x(t). Στην πράξη η τιμή του m δεν υπερβαίνει την τιμή $N/4$.

Πειραματικά οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης υπολογίζονται από τους συντελεστές αυτοδιασποράς c_k που ορίζονται από τη σχέση

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}[x(t+k)-\bar{x}][x(t)-\bar{x}] \tag{3.4}$$

οπότε

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \tag{3.5}$$

Η γραφική παράσταση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης r_k σε σχέση με την καθυστέρηση k λέγεται συσχετόγραμμα και είναι αρκετά χρήσιμη στο αρχικό στάδιο του αλγορίθμου της ανάλυσης χρονοσειρών.

Για μια τελείως τυχαία χρονοσειρά είναι $r_k = 0$ για όλες τις τιμές του k που είναι διάφορες του μηδενός. Για περιοδικές χρονοσειρές ο r_k είναι περιοδικός με την ίδια περίοδο. Αν οι τιμές μιας χρονοσειράς εναλλάσσονται, τότε και οι τιμές του r_k θα εναλλάσσονται, ενώ αν μια χρονοσειρά περιέχει μια κλίση οι τιμές του r_k θα μηδενίζονται μόνο για μεγάλες τιμές του k. Για τις περισσότερες χρονοσειρές που παρουσιάζουν μικρής διάρκειας συσχέτιση οι πρώτες λίγες τιμές του r_k είναι σημαντικά μεγαλύτερες του μηδενός ενώ οι υπόλοιπες τείνουν στο μηδέν καθώς το k αυξάνεται.

1.3.3 Στασιμότητα

Μια χρονοσειρά λέγεται αυστηρά στάσιμη αν η συνάρτηση κατανομής των μετρήσεων είναι ανεξάρτητη του χρόνου, [96].

Μια χρονοσειρά λέγεται δευτέρας-τάξεως στάσιμη (ή ασθενώς στάσιμη), αν η μέση τιμή της είναι σταθερή και αν αυτοδιασπορά εξαρτάται μόνο από την καθυστέρηση

$$E\{x(t)\} = \mu \ \ \text{και} \ \ Cov\{x(t+\tau),x(t)\} = \gamma(\tau) \tag{3.6}$$

Η κανονική κατανομή καθορίζεται πλήρως από την μέση τιμή και την αυτοδιασπορά. Άρα αν μια χρονοσειρά έχει κανονική κατανομή και είναι δευτέρας τάξεως στάσιμη, τότε θα είναι και αυστηρά στάσιμη.

1.3.4 Φάσμα Ισχύος

Με το φάσμα ισχύος μελετάμε μια χρονοσειρά στο πεδίο των συχνοτήτων. Το φάσμα ισχύος και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι δύο ισοδύναμοι μέθοδοι για την μελέτη μιας στάσιμης χρονοσειράς, και παρέχουν την ίδια πληροφορία, αν και σε μερικές περιπτώσεις η περιγραφή στο πεδίο του των συχνοτήτων είναι προτιμότερη από την αντίστοιχη περιγραφή στο πεδίο του χρόνου και αντιστρόφως [95].

Τα φάσμα ισχύος ορίζεται από την συνάρτηση φασματικής κατανομής *F(λ),* [96]. Μπορεί να αποδειχτεί ότι για μια στάσιμη διακριτή χρονοσειρά με συνάρτηση αυτοδιασποράς *γ(k)* υπάρχει μια μονοτονικά αύξουσα συνάρτηση *F(λ)* τέτοια ώστε

$$\gamma(k) = \int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} dF(\lambda) \tag{3.7}$$

όπου $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Η τιμή *F(λ)* ισούται με την διασπορά που αντιστοιχεί στις συνιστώσες του σήματος με συχνότητες στο διάστημα *(-π, λ)* και άρα η τιμή *F(π)* ισούται με την ολική διασπορά της χρονοσειράς.

Η συνάρτηση φάσμα ισχύος ή φασματική συνάρτηση πυκνότητας *f(λ)* ορίζεται από τη σχέση

$$f(\lambda) = \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \tag{3.8}$$

Το φυσικό νόημα του φάσματος ισχύος είναι ότι η ποσότητα *f(λ)dλ* ισούται με την διασπορά των συνιστωσών του σήματος που έχουν συχνότητες στο διάστημα *(λ, λ+dλ)* και άρα το ολοκλήρωμα της συνάρτησης *f(λ)* δίνει την ολική διασπορά. Από τις σχέσεις (3.7) και (3.8) βρίσκουμε

$$\gamma(k) = \int_{\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda) d\lambda \tag{3.9}$$

οπότε αντιστρέφοντας την (3.9) παίρνουμε τη σχέση

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i\lambda k} \tag{3.10}$$

που δείχνει ότι το φάσμα ισχύος είναι ο μετασχηματισμός Fourier της *γ(k).*

Ένας εκτιμητής του φάσματος ισχύος είναι η συνάρτηση του περιοδογράμματος που δίνεται από τη σχέση

$$I(\lambda_j) = \frac{1}{\pi N}\left\{\left[\sum_{t=1}^{N} x_t \cos\frac{2\pi jt}{N}\right]^2 + \left[\sum_{t=1}^{N} x_t \sin\frac{2\pi jt}{N}\right]^2\right\} \tag{3.11}$$

Αποδεικνύεται ότι το περιοδόγραμμα είναι ο πεπερασμένος μετασχηματισμός της συνάρτησης αυτοδιασποράς, δηλ.

$$I(\lambda_j) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-(N-1)}^{k=N-1} c_k e^{-i\lambda_j k} \tag{3.12}$$

Το περιοδόγραμμα είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος εκτιμητής επειδή η μέση τιμή του τείνει στην τιμή του φάσματος ισχύος καθώς το $N\rightarrow\infty$, όμως αποδεικνύεται ότι η διασπορά του είναι σταθερή και δίνεται από τη σχέση $Var[I(\lambda)]=\sigma^2/\pi^2$, δεν τείνει στο μηδέν για $N\rightarrow\infty$, και επομένως το περιοδόγραμμα δεν είναι συνεπής εκτιμητής του φάσματος ισχύος.

Ένας συνεπής εκτιμητής του φάσματος ισχύος δίνεται από τη σχέση

$$\widehat{f}(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi}\left\{w_0 c_0 + 2\sum_{k=1}^{M} w_k c_k \cos\left(\frac{2\pi jk}{M}\right)\right\} \tag{3.13}$$

όπου w_k είναι το σύνολο βαρών (Tukey, Parzen, κλπ) και M μικρότερο του N είναι το σημείο αποκοπής των συντελεστών αυτοδιασποράς.

1.4 Χαοτικά συστήματα-Μέτρα χαοτικών συστημάτων

1.4.1 Περί χαοτικών συστημάτων

Η λύση ενός δυναμικού συστήματος στο χώρο των φάσεων απεικονίζεται από τις διαδοχικές θέσεις του διανύσματος των καταστάσεων που αντιπροσωπεύουν την συμπεριφορά του συστήματος σε γεωμετρική μορφή. Για τα καταναλίσκοντα δυναμικά συστήματα αναφέραμε ότι η τροχιά για ορισμένη περιοχή του χώρου φάσεων, που λέγεται βάση έλξεως, έλκεται και παραμένει σε ένα υπόχωρο του χώρου φάσεων που λέγεται ελκυστής. Μέχρι στις αρχές της δεκαετίας του *1960* οι μόνοι γνωστοί ελκυστές ήταν το οριακό σημείο, ο οριακός κύκλος και ο δακτύλιος (τόρος). Το *1963* ο E. Lorenz ανακάλυψε ένα μη γραμμικό δυναμικό σύστημα με τρεις βαθμούς ελευθερίας, που επιδείκνυε σύνθετη συμπεριφορά, διαφορετική με την αντίστοιχη των μέχρι τότε γνωστών ελκυστών. Η τροχιά του συστήματος αν και για ένα σύνολο αρχικών συνθηκών (βάση έλξης) κατέληγε και παρέμεινε σε ένα υπόχωρο του αρχικού 3-διάστατου χώρου φάσεων, δεν έμοιαζε με καμία από τις ομαλές τροχιές του οριακού σημείου, οριακού κύκλου και τόρου εμφανίζοντας διάφορες παράξενες για εκείνη την εποχή ιδιότητες. Ο ελκυστής που είδε ο Lorenz ήταν το πρώτο παράδειγμα χαοτικού ή παράξενου ελκυστή, και το αντίστοιχο δυναμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων το πρώτο παράδειγμα χαοτικού συστήματος.

Τα χαοτικά συστήματα ανήκουν στην κατηγορία των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων που δεν επιλύονται αναλυτικά. Οι μέχρι τότε γραμμικές τεχνικές που εφαρμοζόταν στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες, ήταν ανεπαρκείς για την μελέτη των χαοτικών συστημάτων. Αν και ο Poincare μελετώντας το πρόβλημα των τριών σωμάτων είχε έλθει αντιμέτωπος με το χάος καταλήγοντας στο συμπέρασμα ″...είναι δυνατόν να συμβεί, ότι μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες παράγουν πολύ μεγαλύτερες στα τελικά φαινόμενα. Ένα μικρό λάθος (αβεβαιότητα) στην αρχή θα παράγει ένα τεράστιο λάθος (αβεβαιότητα) αργότερα. Η πρόβλεψη γίνεται αδύνατη και έχουμε ένα απρόοπτο φαινόμενο. ″, μόνο με την είσοδο των υπολογιστών στον χώρο της επιστήμης κατά την δεκαετία του 60 έγινε δυνατή η ευρεία και σε βάθος μελέτη μιας σειράς χαοτικών συστημάτων. Μετά από εντατική έρευνα δύο και πλέον δεκαετιών τόσο σε μαθηματικά μοντέλα και σε εργαστηριακά πειράματα όσο και στην ανάλυση φυσικών δεδομένων (χρονοσειρών) που εμφάνιζαν ανάλογη συμπεριφορά με εκείνη του πρώτου χαοτικού συστήματος του Lorenz, εξήχθηκε ένα σύνολο από συμπεράσματα που αποτέλεσαν την βάση της νέας επιστήμης που καλείται *επιστήμη του χάους* ή απλά *χάος*. Αν και στην πορεία αυτή πολλά ερωτήματα απαντήθηκαν και πολλά φαινόμενα ερμηνεύτηκαν, η επιστήμη του χάους είναι μια νέα επιστήμη που εξελίσσεται δυναμικά θέτοντας και αντιμετωπίζοντας νέα και πιο πολύπλοκα προβλήματα.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε χαρακτηριστικά γνωρίσματα των χαοτικών συστημάτων και των αντίστοιχων παράξενων ελκυστών τους. Μέχρι στις αρχές της δεκαετίας του 60 τα δυναμικά συστήματα ταξινομούταν σε δύο ξεχωριστές και κατανοήσιμες κατηγορίες. Στα ντετερμινιστικά που περιγράφονται από νόμους που είναι πλήρως κατανοητοί, και στα στοχαστικά που ένα μέρος τους εξηγείται επικαλούμενοι την τυχαιότητα. Ήταν πιστευτό ότι η εξέλιξη ενός ντετερμινιστικού συστήματος είναι τελείως καθορισμένη όταν δύνονται οι αρχικές συνθήκες, ενώ η εξέλιξη ενός στοχαστικού συστήματος είναι απρόβλεπτη και αντιμετωπίζεται με στατιστικές μεθόδους ανάλυσης, όπως ο υπολογισμός της μέσης τιμής μιας ποσότητας.

Τα χαοτικά συστήματα αποτελούν μια ξεχωριστή αυτοδύναμη κατηγορία δυναμικών συστημάτων, που μπορεί να τοποθετηθεί μεταξύ ντετερμινιστικών και στοχαστικών συστημάτων [123, 138]. Αν και φαίνονται στοχαστικά όταν παρατηρούνται, παρ' όλα αυτά περιγράφονται μαθηματικά από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (ροές) ή από μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών (απεικονίσεις) και ανήκουν στην κατηγορία των μη γραμμικών καταναλισκόντων συστημάτων. Η τροχιά τους για ένα σύνολο αρχικών συνθηκών που αποτελούν την βάση ελκυσμού, περιορίζεται σε ένα υπόχωρο του χώρου φάσεων που στην προκριμένη περίπτωση επειδή εμφανίζει πρωτότυπες (παράξενες) ιδιότητες λέγεται παράξενος ελκυστής. Αν και ο χώρος που εξελίσσεται η τροχιά είναι περιορισμένος, αυτή δεν διέρχεται ποτέ από το αυτό σημείο δύο φορές, δηλαδή δεν κόβει τον εαυτό της, έχει άπειρο μήκος, είναι απεριοδική και τούτο φαίνεται καθαρά στο φάσμα ισχύος μια μεταβλητής του συστήματος που είναι συνεχές. Επίσης φαίνεται να περιφέρεται τυχαία, δηλαδή οι μελλοντικές θέσεις της να μην σχετίζονται με τις παρελθούσες, για αυτό και ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης μια μεταβλητής ενός χαοτικού συστήματος μηδενίζεται σε σχετικά μικρό χρονικό διάστημα.

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα των χαοτικών συστημάτων είναι η πολύ μεγάλη ευαισθησία τους από τις αρχικές συνθήκες. Δύο τροχιές με σχεδόν ταυτόσημες αρχικές συνθήκες μένουν μόνο για μικρό χρονικό διάστημα γειτονικές και αποκλίνουν γρήγορα εκθετικά. Άρα μικροσκοπικές διαταραχές μεγεθύνονται ραγδαία και επηρεάζουν την μακροσκοπική συμπεριφορά του συστήματος. Αυτή η συμπεριφορά είναι ποιοτικά διαφορετική για μη χαοτικούς ελκυστές, όπου οι γειτονικές τροχιές παραμένουν πλησίον η μια στην άλλη και οι μικρές διαταραχές δεν αυξάνονται. Εξ' αιτίας του φαινομένου της απόκλισης γειτονικών τροχιών ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov (που είναι ένα μέτρο της μέσης απόκλισης δύο γειτονικών τροχιών) ενός χαοτικού συτήματος είναι πάντα θετικός.

Το κλειδί για την κατανόηση της χαοτικής συμπεριφοράς έγκειται στην κατανόηση μιας απλής διαδικασίας τεντώματος και διπλώματος, που λαμβάνει χώρα στο χώρο φάσεων. Η εκθετική απόκλιση είναι μια τοπική ιδιότητα, καθόσον οι ελκυστές έχουν πεπερασμένο μέγεθος και δύο τροχιές ενός χαοτικού ελκυστή δεν μπορούν να αποκλίνουν εκθετικά για πάντα. Άρα ο ελκυστής πρέπει να αναδιπλώνεται στον εαυτό του. Αν και οι τροχιές αποκλίνουν και ακολουθούν διαφορετικές κατευθύνσεις, επανέρχονται τελικά πάλι η μία πλησίον της άλλης. Μέσω αυτής της διαδικασίας οι τροχιές του ελκυστή αναμιγνύονται όπως ο χαρτοπαίχτης αναμιγνύει τα χαρτιά μια τράπουλας. Η τυχαιότητα των χαοτικών τροχιών είναι αποτέλεσμα αυτής της ανάμειξης. Η διαδικασία του τεντώματος και διπλώματος των τροχιών επαναλαμβάνεται συνεχώς, δημιουργώντας διπλώσεις μέσα σε άλλες διπλώσεις επ’ άπειρον. Με άλλα λόγια ένας χαοτικός ελκυστής είναι ένα μορφοκλασματικό (fractal) αντικείμενο, το οποίο αποκαλύπτει περισσότερες λεπτομέρειες όσο μεγεθύνεται και έχει τυπικά μη ακέραια κλασματική διάσταση, [123].

Η ιδιότητα της ευαισθησίας των χαοτικών συστημάτων από τις αρχικές συνθήκες έχει ως αποτέλεσμα την περιορισμένη χρονικά πρόβλεψή τους. Κατ’ αρχήν ένα χαοτικό σύστημα είναι ντετερμινιστικό με την έννοια ότι περιγράφεται από συγκεκριμένες μαθηματικές εξισώσεις και άρα γνωρίζοντας ***ακριβώς*** την αρχική συνθήκη είναι δυνατόν να βρεθούν οι επόμενες τιμές και βασικά το σύστημα να προβλεφθεί για άπειρο χρονικό διάστημα. Όμως στην πράξη προσκρούομε σε δύο αξεπέραστα προβλήματα. Πρώτα από όλα ποτέ σχεδόν δεν γνωρίζουμε τελείως μια αρχική συνθήκη, λόγω των σφαλμάτων που υπεισέρχονται κατά την διαδικασία της μέτρησης. Σχεδόν πάντα υπάρχει μια μικρή απόκλιση από την πραγματική αρχική συνθήκη, που δημιουργεί ένα αρχικό μικρό σφάλμα, έτσι ώστε αν και γνωρίζουμε ακριβώς τους νόμους της εξέλιξης του συστήματος, εξ’ αιτίας της εκθετικής απόκλισης των τροχιών (πραγματικής και προβλεπόμενης) το σφάλμα μεγεθύνεται και η προβλεπτικότητα του συστήματος χάνεται μετά από λίγες προβλεπόμενες τιμές. Επιπλέον ακόμη και αν γνωρίζαμε ακριβώς την αρχική συνθήκη, λόγω καθαρά υπολογιστικών προβλημάτων είναι αδύνατη μια μακρόχρονη πρόβλεψη, επειδή καθώς οι προβλεπόμενες τιμές θα αυξάνονται ο υπολογιστής είναι υποχρεωμένος να εκτελεί πράξεις με αριθμούς που αποτελούνται από συνεχώς αυξανόμενα ψηφία, το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο. Έτσι σε κάποιο σημείο της διαδικασίας λόγω αποκοπής ψηφίων θα υπεισέλθει ένα μικρό σφάλμα το οποίο πάλι θα αυξάνει εκθετικά σε σχέση με τον χρόνο με αποτέλεσμα την απώλεια της πρόβλεψης.

1.4.2 Εκθέτες Lyapunov

1.4.2.1 Φυσική ερμηνεία

Η μελέτη του φάσματος των εκθετών Lyapunov είναι από τα πλέον χρήσιμα εργαλεία για να αποφανθούμε αν ένα δυναμικό σύστημα είναι χαοτικό ή όχι. Εξ' ορισμού ένα ντετερμινιστικό δυναμικό σύστημα είναι χαοτικό όταν έχει τουλάχιστον ένα θετικό εκθέτη Lyapunov. Ένα δυναμικό σύστημα *n* διαστάσεων έχει *n* εκθέτες Lyapunov, που περιγράφουν την δράση της δυναμικής που προσδιορίζει την εξέλιξη των τροχιών στο χώρο των φάσεων. Οι εκθέτες Lyapunov εκφράζουν τον μέσο ρυθμό σύγκλισης ή απόκλισης δύο γειτονικών τροχιών στο χώρο των φάσεων. Θετικός εκθέτης Lyapunov συνεπάγεται εκθετική απόκλιση δύο γειτονικών τροχιών (ευαισθησία ως προς τις αρχικές συνθήκες) και άρα απώλεια ικανότητας προβλεπτικότητας μετά από μικρό χρονικό διάστημα. Όσο μεγαλύτερος είναι ο εκθέτης Lyapunov σε μια περιοχή ενός δυναμικού συστήματος τόσο μικρότερη είναι η προβλεψημότητα σ' αυτή την περιοχή. Αφού ο ελκυστής βρίσκεται σε περιορισμένο τμήμα του χώρου φάσεων (είναι φραγμένος) άρα εκθετική απόκλιση δεν είναι δυνατή προς όλες τις κατευθύνσεις. Συστολές και αναδιπλώσεις πρέπει να συμβαίνουν και αυτή η συμπεριφορά αντιστοιχεί σε αρνητικό εκθέτη Lyapunov. Αν η δυναμική ενός συστήματος περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις τότε αποδεικνύεται ότι ένας εκθέτης θα είναι μηδέν, που αντιστοιχεί σε μια διαταραχή κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου που εφάπτεται της τροχιάς.

Τα πρόσημα των εκθετών Lyapunov δίνουν μια ποιοτική εικόνα της δυναμικής ενός συστήματος. Σε ένα τρισδιάστατο χώρο φάσεων οι πιθανοί τύποι ελκυστών και τα αντίστοιχα φάσματα αυτών είναι:

α) οριακό σημείο με φάσμα (-,-,-)

β) οριακός κύκλος με φάσμα (0,-,-)

γ) Διδιάστατος τόρος με φάσμα (0,0,-)

δ) Παράξενος ελκυστής με φάσμα (+,0,-)

Όταν ένα χαοτικό σύστημα έχει δύο ή περισσότερους θετικούς εκθέτες Lyapunov τότε χαρακτηρίζεται από υπερχάος.

Αν θεωρήσουμε μια διαταραχή $\Delta V(0)$ ενός αρχικού όγκου V στο χώρο των φάσεων τότε αποδεικνύεται ότι η εξέλιξη της διαταραχής θα δίνεται από τη σχέση

$$\Delta V(t)=\Delta V(0)e^{Ct} \tag{4.1}$$

όπου $C=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n$ είναι το άθροισμα των εκθετών Lyapunov. Για ένα καταναλίσκον σύστημα και άρα για ένα χαοτικό επειδή συμβαίνει συστολή της του όγκου ΔV δηλαδή $\Delta V \to 0$ όταν $t \to \infty$, έπεται ότι $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n<0$,δηλαδή το άθροισμα των εκθετών Lyapunov ενός χαοτικού συστήματος είναι αρνητικό. Για ένα διατηρητικό σύστημα όπου δεν υπάρχει συστολή όγκου των τροχιών ισχύει $\Delta V(t)= \Delta V(0)$ και άρα $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=0$, δηλαδή το άθροισμα των εκθετών Lyapunov είναι μηδέν, [1,5,123].

1.4.2.2 Ορισμός του φάσματος των εκθετών Lyapunov

Δοσμένου ενός συνεχούς δυναμικού συστήματος σε ένα n-διάστατο χώρο φάσεων καταγράφουμε την εξέλιξη μιας αρχικής σφαίρας που αντιστοιχεί σε ένα σύνολο αρχικών συνθηκών. Παρατηρούμε ότι η σφαίρα γίνεται ένα n-διάστατο ελλειψοειδές εξ' αιτίας της τοπικής φύσης της ροής του συστήματος που δρα παραμορφωτικά πάνω σ' αυτή. Ο i^ος^ εκθέτης Lyapunov ορίζεται από τη σχέση

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left[\frac{P_i(t)}{P_i(0)}\right] \tag{4.2}$$

όπου P_i είναι ο $i^{ος}$ κύριος άξονας του ελλειψοειδούς. Οι εκθέτες Lyapunov είναι διατεταγμένοι από τον μεγαλύτερο προς τον μικρότερο δηλ. $\lambda_1>\lambda_2>...>\lambda_n$. Ο μεγαλύτερος άξονας του ελλειψοειδούς αντιστοιχεί στην πλέον ασταθή κατεύθυνση της ροής και ο ασυμπτωτικός ρυθμός διαστολής του εκφράζει τον μέγιστο εκθέτη Lyapunov. Οι εκθέτες Lyapunov μπορούν να θεωρηθούν σαν μέτρα του ρυθμού αύξησης των υποχώρων του χώρου φάσεων. Ο λ_1 μετρά πόσο γρήγορα αυξάνουν οι γραμμικές αποστάσεις, ενώ το άθροισμα των λ_1, λ_2 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής μιας επιφάνειας. Γενικά ο ρυθμός μεταβολής ενός d-διάστατου όγκου εκφράζεται σε σχέση με το άθροισμα των d πρώτων εκθετών, [1, 5, 54, 123, 135].

1.4.2.3 Προσδιορισμός των εκθετών Lyapunov

Έστω ένα συνεχές δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από ένα σύνολο συνήθων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}), \qquad \boldsymbol{x} \in R^n \tag{4.3}$$

όπου $\boldsymbol{x(t)}$ είναι των διάνυσμα των δυναμικών μεταβλητών και $\boldsymbol{c}$ διάνυσμα παραμέτρων. Αν $\boldsymbol{\xi}$ είναι μια μικρή διαταραχή της τροχιάς του διανύσματος $\boldsymbol{x(t)}$ τότε η εξέλιξή της περιγράφεται από το n-διάστατο γραμμικό σύστημα

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{\xi} \tag{4.4}$$

όπου $\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x}(t))$ είναι ένας nXn πίνακας με στοιχεία $[\partial F_i(\boldsymbol{x}(t))]/\partial x_j]$, $i,j=1,2,...,n$.

Η λύση της *(4.4)* μπορεί να γραφεί ως

$$\xi(t)=\boldsymbol{A}(t,0)\xi(0) \tag{4.5}$$

όπου ο πίνακας $\boldsymbol{A}(t,0)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{A} \tag{4.6}$$

με αρχική συνθήκη $\boldsymbol{A}(0,0)=\boldsymbol{I}$, όπου $\boldsymbol{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας.

Οι εκθέτες Lyapunov του συστήματος σχετίζονται με τους λογαρίθμους των ιδιοτιμών του συμμετρικού πίνακα

$$\boldsymbol{\Lambda} = \lim_{t\to\infty}\{[\boldsymbol{A}(t)^T\boldsymbol{A}(t)]^{1/2}\} \tag{4.7}$$

όπου $\boldsymbol{A}(t)^T$ είναι ο ανάστροφος του $\boldsymbol{A}$. Οι ιδιοτιμές του $\boldsymbol{\Lambda}$ έχουν την μορφή $e^{\lambda j\, t}$ όπου λ_j, j=1,2...n είναι οι εκθέτες Lyapunov, [1, 5, 54, 123, 135].

1.4.3 Διαστάσεις των παράξενων ελκυστών

Ένας παράξενος ελκυστής που παράγεται από ένα χαοτικό σύστημα είναι ένα μορφοκλασματικό (fractal) αντικείμενο,η διάσταση του είναι συνήθως κλασματική, μεγαλύτερη από την τοπολογική του διάσταση και μικρότερη από την διάσταση του αντίστοιχου Ευκλείδιου χώρου. Η διάσταση του ελκυστή κλασματική ή ακέραια, αν και αντιμετωπίζει τον ελκυστή σαν ένα στατικό γεωμετρικό αντικείμενο αγνοώντας το γεγονός της ύπαρξης ροής, υποδεικνύει τον ελάχιστο αριθμό μεταβλητών που συμμετέχουν στην εξέλιξη του συστήματος. Υπάρχουν διάφορες γενικευμένες κλασματικές διαστάσεις αλλά θα αναφέρουμε τις πιο γνωστές που είναι η διάσταση χωρητικότητας, η διάσταση πληροφορίας και η διάσταση συσχέτισης.

1.4.3.1 Διάσταση χωρητικότητας

Έστω ένα σύνολο S σημείων στον χώρο R^n. Έστω $N(\varepsilon)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός υπερκύβων με πλευρά μήκους ε (όγκου ε^n) που απαιτούνται για την κάλυψη των σημείων του συνόλου. Προφανώς για ένα μικρό ε ο αριθμός $N(\varepsilon)$ θα είναι αντιστρόφως ανάλογος του ε^d δηλαδή

$$N(\varepsilon)=\frac{A}{\varepsilon^d} \tag{4.8}$$

Από τη σχέση *(4.8)* έχουμε

$$d=-\frac{log(N(\varepsilon)}{log(\varepsilon)}+\frac{log(A)}{log(\varepsilon)} \tag{4.9}$$

Η διάσταση χωρητικότητας D_0 υπολογίζεται από την σχέση (4.9) παίρνοντας το όριο $\varepsilon \to 0$ και είναι

$$D_0=-\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{log(N(\varepsilon))}{log(\varepsilon)} \tag{4.10}$$

Η διάσταση χωρητικότητας D_0 προσδιορίζει την γεωμετρική μορφή του ελκυστή χωρίς να λαμβάνει υπ' όψη τη συχνότητα με την οποία η τροχιά διέρχεται από μια περιοχή του ελκυστή. Ένας υπερκύβος πλευράς ε που έχει K σημεία έχει το ίδιο βάρος στον υπολογισμό της D_0 από ένα άλλο με λιγότερα ή περισσότερα σημεία, [1, 123].

1.4.3.2 Διάσταση Πληροφορίας

Σε αντίθεση με την διάσταση χωρητικότητας η διάσταση πληροφορίας εξαρτάται από την σχετική συχνότητα που μια τροχιά διέρχεται από ένα στοιχειώδες υπερκύβο. Έστω το σύνολο S που έχει N σημεία καλύπτεται από $N(\varepsilon)$ n-διάστατους υπερκύβους πλευράς ε και ο i^os^ υπερκύβος έχει N_i σημεία, οπότε η αντίστοιχη πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο στον δοσμένο υπερκύβο είναι $P_i=N_i/N$. Η διάσταση πληροφορίας ορίζεται από τη σχέση

$$D_1=\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i log P_i}{log(\varepsilon)} \tag{4.11}$$

όπου $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i log P_i$ εκφράζει την ποσότητα της πληροφορίας που απαιτείται για να καθοριστεί η κατάσταση του συστήματος με ακρίβεια ε, και ο λόγος που ορίζει την διάσταση δηλώνει πόσο γρήγορα αυτή η απαιτούμενη πληροφορία αυξάνει καθώς το ε ελαττώνεται.

Σημειώνεται ότι, όταν $P_i=1/N$ για όλα τα i, τότε $D_1=D_0$. Αλλά όταν όλες οι πιθανότητες P_i δεν είναι ίσες (όπως συνήθως συμβαίνει) τότε $D_1<D_0$, [1, 123].

1.4.3.3 Διάσταση συσχέτισης

Η διάσταση συσχέτισης ορίζεται από τη σχέση

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2}{\log(\varepsilon)} \tag{4.12}$$

όπου η P_i^2 είναι η πιθανότητα να βρεθούν δύο σημεία σε ένα δοσμένο n-διάστατο υπερκύβο. Ισχύει ότι $D_2 \le D_1 \le D_0$, [1, 123].

Το 1983 οι Grassberger και Procaccia [40] πρότειναν ότι η ποσότητα $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2$ που απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό χρόνο, μπορεί να εκτιμηθεί πολύ πιο γρήγορα από το ολοκλήρωμα συσχέτισης

$$C(\varepsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \Theta\left(\varepsilon - \left\| \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j \right\|\right) \tag{4.13}$$

όπου Θ(x) είναι η Heavyside συνάρτηση $(\Theta(x)=0$ αν $x<0$ και $\Theta(x)=1$ αν $x\geq 0)$ και $\|.\|$ είναι μια μετρική της απόστασης.

Η διάσταση συσχέτισης είναι το πλέον χρησιμοποιούμενο εργαλείο για την εξερεύνηση του χάους σε πολλούς κλάδους της επιστήμης, όπως η γεωφυσική, η φυσιολογία, η μετεωρολογία, η μηχανική των ρευστών και η οικονομία.

1.5 Πειραματική ανίχνευση παράξενων ελκυστών και χαοτική ανάλυση χρονοσειρών

1.5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τα μεγέθη με την σειρά όπως τα υπολογίζουμε στην ανάλυση μιας χρονοσειράς για να εξακριβώσουμε αν προέρχεται ή όχι από χαοτικό σύστημα, με πόσες εξισώσεις (βαθμούς ελευθερίας) περιγράφεται το σύστημα και τέλος την δυνατότητα πρόβλεψης της χρονικής εξέλιξης του συστήματος. Μερικά από αυτά τα μεγέθη, όπως το φάσμα ισχύος, είναι γνωστά από την εφαρμογή τους στην κλασσική ανάλυση χρονοσειρών, καθώς και μερικά άλλα (όπως κλασματική διάσταση) ήταν γνωστά σαν καθαρά μαθηματικά μεγέθη, [50, 123]. Όλα αυτά τα μεγέθη καθώς και νέα που ανακαλύφθηκαν στην ερευνητική πορεία πάνω στα χαοτικά συστήματα, αξιολογήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν ανάλογα με την ποσότητα πληροφορίας που παρέχουν, υπό το πρίσμα της χαοτικής ανάλυσης.

Αναφέρουμε ότι κανένα από τα μεγέθη που χρησιμοποιούνται στην χαοτική ανάλυση των χρονοσειρών δεν μπορεί μόνο του να δηλώσει αν ένα σύστημα είναι χαοτικό ή όχι. Βέβαια η εύρεση μερικών μεγεθών, όπως η κλασματική διάσταση και ο θετικός εκθέτης Lyapunov είναι αναγκαία όχι όμως και ικανή συνθήκη για να είναι μια χρονοσειρά χαοτική. Απαιτείται η εφαρμογή μιας σειράς μεθόδων και η συνολική μελέτη μιας σειράς μεγεθών, που άλλα στοχεύουν να ενισχύσουν τις ενδείξεις ότι το σήμα είναι χαοτικό και άλλα ότι δεν ανήκει σε μη χαοτικά σήματα, όπως για παράδειγμα είναι ο έγχρωμος θόρυβος. Ο αλγόριθμος της χαοτικής ανάλυσης είναι κατά κάποιο τρόπο μη γραμμικός (όπως μη γραμμικά είναι και τα σήματα που εφαρμόζεται με θετικά αποτελέσματα), με την έννοια ότι καθώς ο αλγόριθμος εξελίσσεται τα νέα αποτελέσματα ενισχύουν ή αναιρούν τα προηγούμενα και αντιστρόφως. Μπορούμε να πούμε ότι ο αλγόριθμος που εφαρμόζεται στην χαοτική ανάλυση, αν και διέπεται από βασικές αρχές, δεν είναι ένα στατικό εργαλείο που μπορεί ο καθένας να χρησιμοποιήσει, για την μελέτη μιας χρονοσειράς. Απαιτείται, όπως συμβαίνει και σε όλες τις επιστήμες, η πείρα και η γνώση του ειδικού επιστήμονα που θα τον χρησιμοποιήσει κατά τον καλύτερο τρόπο για την εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων. Η θέση αυτή δεν είναι σε αντίθεση με την κοινή πλέον διαπίστωση ότι ο αλγόριθμος χαοτικής ανάλυσης χρονοσειρών, παρά τις ορισμένες αδυναμίες του, είναι ότι καλύτερο και πληρέστερο εργαλείο, διαθέτουμε αυτή τη στιγμή για την μελέτη μη γραμμικών και εν γένει χαοτικών σημάτων, τα οποία αποτελούν και την μεγαλύτερη κατηγορία πειραματικών και φυσικών σημάτων.

Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου της χαοτικής ανάλυσης αφορά βασικά χαρακτηριστικά του σήματος όπως είναι το πλήθος και το είδος των μετρήσεων, την στασιμότητα του, το φάσμα ισχύος και τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης. Ακολουθεί η μέθοδος της ορθής ανακατασκευής του χώρου φάσεων από το σήμα, με βάση το θεώρημα ανακατασκευής που είναι το βασικό οικοδόμημα της χαοτικής ανάλυσης και ο υπολογισμός της κλασματικής διάστασης και του φάσματος των εκθετών Lyapunov. Η πρόβλεψη του σήματος μπορεί να ενταχθεί στο ίδιο βήμα. Ακολουθούν τα κριτήρια που ελέγχουν τη μη γραμμικότητα του σήματος και την παρουσία θορύβου στο σήμα. Μια σειρά φίλτρων ενδέχεται να εφαρμοστούν για τον καθαρισμό του σήματος από τον θόρυβο και η όλη διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί για το φιλτραρισμένο σήμα. Επίσης είναι χρήσιμο και απαραίτητο τις περισσότερες φορές, αν γνωρίζουμε το φυσικό σύστημα (πχ Μαγνητόσφαιρα της Γης) καθώς και το είδος του σήματος (πχ μαγνητικό πεδίο) να μελετάμε και να παίρνουμε υπ’ όψη τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους. Ακολουθεί η διατύπωση συμπερασμάτων και προοπτικών για πληρέστερη ανάλυση του σήματος.

1.5.2 Έλεγχος των δεδομένων

Έστω δίνεται ένα σύνολο μετρήσεων για ανάλυση. Κατ’ αρχή το σύνολο πρέπει να αποτελεί χρονοσειρά, δηλαδή οι μετρήσεις εξαρτώνται μόνο από το χρόνο και όχι από τον χώρο. Άρα πρέπει να ελέγξουμε αν οι μετρήσεις έγιναν στο ίδιο σημείο του φυσικού ή εργαστηριακού συστήματος.

Ο χρόνος δειγματοληψίας των μετρήσεων πρέπει να είναι σταθερός προκειμένου να υπολογιστούν διάφορα μεγέθη. Αν ορισμένες μετρήσεις απέχουν περισσότερο χρονικό διάστημα από τον χρόνο δειγματοληψίας τότε οι αντίστοιχες κενές θέσεις μπορεί να καλυφτούν με κάποια μέθοδο παρεμβολής. Το πλήθος των σημείων που μπορούμε να παρεμβάλουμε χωρίς να αλλοιώσουμε την δομή του σήματος εξαρτάται από το είδος του. Όσο πιο τυχαίο φαίνεται το σήμα τόσα πιο λίγα σημεία μπορούμε να παρεμβάλουμε. Ένα ερώτημα είναι πόσος μεγάλος μπορεί να είναι ο χρόνος δειγματοληψίας ώστε και πληροφορία να μην χάνουμε και περιττές μετρήσεις που επιβαρύνουν τον υπολογιστικό χρόνο να μην έχουμε.

Ακόμη ελέγχουμε αν υπάρχουν μετρήσεις με τιμές κατά πολύ μεγαλύτερες ή μικρότερες από τις υπόλοιπες, που πιθανόν οφείλονται σε σφάλματα των οργάνων δειγματοληψίας και καταγραφής και τις απορρίπτουμε.

Επίσης ένα ερώτημα είναι το ελάχιστο πλήθος των μετρήσεων που απαιτούνται για την ανάλυση της χρονοσειράς. Για πολλά γνωστά χαοτικά συστήματα, όπως του Lorenz μερικές χιλιάδες σημεία αρκούν. Ένα κριτήριο είναι η μέση περίοδος της τροχιάς του σήματος [123, 138]. Όσο πιο μεγάλη είναι η μέση περίοδος τόσο πιο πολλές μετρήσεις απαιτούνται για να ελεγχθούν οι ιδιότητες της τροχιάς του πιθανού ελκυστή. Για τις περισσότερες φυσικές χρονοσειρές έχει δειχθεί εμπειρικά ότι μερικές δεκάδες χιλιάδες μετρήσεις αρκούν.

1.5.3 Στασιμότητα

Ένας παράξενος ελκυστής πού η τροχιά του έχει αναπτυχθεί πλήρως στο χώρο φάσεων έχει δομή ανεξάρτητη από το χρόνο, καταλαμβάνει ένα ορισμένο υπόχωρο του χώρου φάσεων, και υπ’ αυτή την έννοια δεν μετατοπίζεται στο χώρο φάσεων και ο όγκος του χώρου που διέρχονται οι τροχιές του είναι σταθερός. Γενικότερα οι ιδιότητες του ελκυστή, όπως κλασματική διάσταση, εκθέτες Lyapunov παραμένουν ανεξάρτητες από το χρόνο, [1, 123]. Έτσι αν η χρονοσειρά που μελετάμε περιγράφει κάποια μεταβλητή ενός χαοτικού συστήματος, οφείλει να είναι στάσιμη, δηλαδή η κατανομή της να είναι αμετάβλητη ως προς το χρόνο.

Σταθερή μέση τιμή και διασπορά συνεπάγεται στασιμότητα δευτέρας τάξεως. Η σταθερότητα της μέσης τιμής ελέγχεται είτε από την γραφική παράσταση τις χρονοσειράς, όπου τυχόν μεγάλες κλίσεις μπορεί εύκολα να ανιχνευθούν είτε συγκρίνοντας τις μέσες τιμές του πρώτου μισού και του δεύτερου μισού της χρονοσειράς, που πρέπει να είναι ίσες.

Ομοίως ελέγχεται η σταθερότητα της διασποράς. Διασπορά σταθερή σημαίνει ότι οι διακυμάνσεις του σήματος έχουν κατά μέσο όρο σταθερό πλάτος, που μπορεί να ελεγχθεί από την γραφική παράσταση του σήματος. Ακριβέστερος έλεγχος μπορεί να γίνει συγκρίνοντας τις διασπορές του πρώτου και δεύτερου μισού τμήματος της χρονοσειράς που πρέπει να είναι ίσες, [96].

Τέλος μια εικόνα της πλήρους στασιμότητας της χρονοσειράς δίνει το ιστόγραμμα πού είναι ένας εκτιμητής του συνάρτησης κατανομής του μεγέθους που μελετάμε. Η μορφή του ιστογράμματος πρέπει να παραμένει αμετάβλητη με το χρόνο και άρα το πρώτο και το δεύτερο μισό τμήμα της χρονοσειράς πρέπει να έχουν την ίδια μορφή ιστογράμματος.

Αν η μη στασιμότητα της χρονοσειράς οφείλεται στην μεταβαλλόμενη μέση τιμή της λόγω κλίσεως, μπορούμε με διάφορα φίλτρα (γραμμικά) να απομακρύνουμε την κλίση και να την μετατρέψουμε σε στάσιμη. Επίσης η στασιμότητα μιας χρονοσειράς μπορεί να βελτιωθεί με μεθόδους της ανάλυσης ιδιαζόντων τιμών (SVD).

1.5.4 Συντελεστής αυτοσυσχέτισης

Ο υπολογισμός και η μελέτη του συντελεστή αυτοσυσχέτισης είναι από τα πρώτα βήματα της ανάλυσης μιας χρονοσειράς. Αν η γραφική παράσταση του σε σχέση με την παράμετρο καθυστέρησης είναι περιοδική τότε και το σήμα μας είναι περιοδικό, ή τουλάχιστον έχει μια ισχυρή περιοδική συνιστώσα. Το αντίστοιχο δυναμικό σύστημα πιθανόν να είναι μονοδιάστατος ταλαντωτής, ελεύθερος ή εξαναγκασμένος, με τροχιά ένα κύκλο ή ένα οριακό κύκλο στο χώρο φάσεων και περίοδο ταλάντωσης ίση με την περίοδο του συντελεστή αυτοσυχέτισης.

Όμοια αν η καμπύλη του συντελεστή αυτοσυσχέτισης εμφανίζει δύο η περισσότερες περιόδους τότε το σήμα περιέχει συνιστώσες με τις ίδιες περιόδους, και πιθανόν να προέρχεται από ένα δυναμικό σύστημα τόρου.

Όταν ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης έχει σταθερή τιμή ίση με την μονάδα τότε το σήμα προέρχεται από οριακό σημείο.

Συντελεστής αυτοσυσχέτισης που μηδενίζεται για τιμές της παραμέτρου καθυστέρησης $k \geq 1$ είναι πιθανόν να οφείλεται σε λευκό θόρυβο, μολονότι είναι δυνατόν ένα χαοτικό σύστημα (όπως ο ελκυστής του Henon) να έχει παρόμοια συμπεριφορά..

Οι έγχρωμοι θόρυβοι λόγω της μεγάλης συσχέτισης των μετρήσεων έχουν συντελεστή αυτοσυσχέτισης που μηδενίζεται πολύ αργά, [74].

Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης μιας χαοτικής χρονοσειράς μηδενίζεται αρκετά γρήγορα, καθότι είναι ένα εκτιμητής της γραμμικής συσχέτισης μετρήσεων που προέρχονται από μη γραμμικά συστήματα, [123].

Επίσης ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης σημάτων που έχουν μεταβαλλόμενη με το χρόνο διασπορά (μη στάσιμα σήματα) αυξάνεται σε σχέση με το πλήθος των σημείων του σήματος, [96].

1.5.5 Φάσμα ισχύος

Η τροχιά ενός χαοτικού ελκυστή εξελίσσεται συνέχεια σε ένα υπόχωρο του χώρου φάσεων χωρίς ποτέ να κόβει τον εαυτό της, δηλαδή είναι απεριοδική. Συνέπεια αυτής της ιδιότητας είναι η απεριοδικότητα του φάσματος ισχύος μια μεταβλητής του χαοτικού συστήματος.

Το φάσμα ισχύος μιας χαοτικής χρονοσειράς είναι πρώτα από όλα συνεχές, ή τουλάχιστον έχει πάντα μια συνεχή συνιστώσα, σε αντίθεση με το φάσμα ενός περιοδικού ή ημιπεριοδικού σήματος που είναι διακριτό αποτελούμενο από τις συχνότητες του σήματος.

Το φάσμα ισχύος ενός λευκού θορύβου είναι επίπεδο γιατί η ισχύς ισοκατανέμεται σε όλες τις συσχνότητες, ενώ το φάσμα χαοτικής χρονοσειράς έχει συνήθως μια κλίση παίρνοντας μικρότερες τιμές στις μεγάλες συχνότητες.

Όμοιο φάσμα με τις χαοτικές χρονοσειρές εμφανίζουν και η χρονοσειρές που αντιστοιχούν σε έγχρωμο θόρυβο και άρα η φασματική ανάλυση δεν μπορεί να διακρίνει ένα χαοτικό σύστημα από ένα σύστημα παραγωγής έγχρωμου θορύβου [1, 74, 96, 123].

1.5.6 Θεωρία εμβαπτίσεως και ανακατασκευή του χώρου φάσεων

Η σύνδεση μιας πειραματικής χρονοσειράς $x(i)=x(t_i)$ (για διακριτό χρόνο t_i) με την υποκείμενη δυναμική $\boldsymbol{s(t)=f^t(s_0)}$ του αντίστοιχου δυναμικού συστήματος, έχει θεμελιωθεί δια της ανακατασκευής του χώρου φάσεων με βάση το θεώρημα των Ruelle και Takens, [99], που βασίζεται στο θεώρημα του Witney [134], ότι μία d-διάστατη πολλαπλότητα $\boldsymbol{M}$ μπορεί να εμβαπτιστεί (εμβιθυστεί) στον $\boldsymbol{R}^m$ αν $m \geq 2d+1$, δηλαδή υπάρχει μια ομαλή απεικόνιση $\boldsymbol{\Phi: M \to R^m}$.

Έστω $x(t)=\boldsymbol{\Phi(s(t))}$ είναι τα σημεία της ανακατασκευασμένης τροχιάς για την συνάρτηση εμβάπτισης $\boldsymbol{\Phi}$. Τότε η δυναμική επί του πραγματικού ελκυστή αντανακλάται ισοδύναμα στην δυναμική της ροής $x(t)=\mathbf{G}^t(x_o)$ του ανακατασκευασμένου χώρου φάσεων $\boldsymbol{R}^m$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\boldsymbol{G^{t}(x_0)=\Phi(s)\, f^{t}(s_0)\Phi^{-1}(x)}. \tag{5.1}$$

Δηλαδή, η συνάρτηση εμβάπτισης ***Φ*** είναι ένας διαφορομορφισμός που αντιστοιχεί τις τροχιές $\boldsymbol{f}^{t}(\mathbf{s}_0)$ της πολλαπλότητας ***M*** (για μια αρχική κατάσταση $\mathbf{s}_0$) στις τροχιές $\boldsymbol{G}^{t}(\boldsymbol{x}_0)$ του χώρου R^m, διατηρώντας τον προσανατολισμό τους και άλλα τοπολογικά χαρακτηριστικά όπως οι ιδιοτιμές, οι εκθέτες Lyapunov και οι διαστάσεις του ελκυστή.

Στην εργασία αυτή αποδεικνύεται ότι η μέθοδος ανακατασκευής του χώρου φάσεων διατηρεί την σημαντικότητά της ακόμα και όταν το παρατηρούμενο σήμα παράγεται από μια στοχαστική διαδικασία.

Υποθέτοντας ότι το παρατηρούμενο σήμα είναι $x(i)=h(\boldsymbol{s}(t_i))$, όπου h είναι η μετρούμενη συνάρτηση και χρησιμοποιώντας την μέθοδο των καθυστερήσεων, τα διανύσματα της ανακατασκευασμένης τροχιάς θα δίνονται από τη σχέση

$$\boldsymbol{x}(i)=[x(i),x(i+\tau), \ldots, x(i-(m-1)\tau)]^T \tag{5.2}$$

όπου τ είναι ο χρόνος καθυστέρησης (delay time).

Η θεωρία εμβαπτίσεως αποτελεί την βάση της χαοτικής ανάλυσης των πειραματικών χρονοσειρών, επιτρέποντας την εξαγωγή πληροφορίας για την δυναμική του αρχικού χώρου φάσεων μελετώντας την δυναμική του ανακατασκευασμένου χώρου φάσεων.

1.5.6.1 Επιλογή του χρόνου καθυστέρησης

Σύμφωνα με το θεώρημα ανακατασκευής του χώρου φάσεων Takens και Ruelle και τη μέθοδο ανακατασκευής η τιμή της παραμέτρου τ μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα. Στην πράξη η επιλογή της χρονικής καθυστέρησης τ και της διάστασης εμβάπτισης m είναι καθοριστικής σημασίας για την ορθή εξαγωγή συμπερασμάτων, όσον αφορά την δυναμική του υπό μελέτη συστήματος. Στη συνέχεια περιγράφουμε τις πιο βασικές χρησιμοποιούμενες μεθόδους για την επιλογή του χρόνου καθυστέρησης.

Α) Συντελεστής αυτοσυσχέτισης

Αν το τ είναι πολύ μεγάλο τότε οι συνιστώσες θα είναι τελείως ανεξάρτητες μεταξύ τους με αποτέλεσμα η τροχιά του ελκυστή να προβάλλεται στο χώρο των φάσεων σε δύο άσχετες κατευθύνσεις. Αν το τ είναι πολύ μικρό τότε οι συνιστώσες $x(n+jT)$, $x(n+(j+1)T)$ του διανύσματος $\boldsymbol{x}(n)$ έχουν σχεδόν την ίδια τιμή, ώστε στην ουσία να μην είναι ανεξάρτητες. Μια πρώτη εκλογή του τ θα μπορούσε ο χρόνος μηδενισμού του συντελεστή αυτοσυσχέτισης της χρονοσειράς. Άλλες προσεγγίσεις θεωρούν το τ ίσο με την τιμή της παραμέτρου καθυστέρησης *k* για την οποία ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ισούται με *0.5* η *1/e*. Παρ' όλα αυτά συντελεστής αυτοσυσχέτισης υπολογίζει την γραμμική εξάρτηση μεταξύ δύο σημείων και ίσως να μην είναι η πλέον κατάλληλη μέθοδος όταν τα δεδομένα προέρχονται από μη γραμμική δυναμική. Έχει προταθεί ότι μια κατάλληλη εκλογή του *τ* θα μπορούσε να γίνει από την θεωρία της πληροφορίας, [1, 123].

Β) Αμοιβαία πληροφορία

Τα χαοτικά συστήματα μπορούν να περιγραφούν χρησιμοποιώντας την θεωρία της πληροφορίας. Για αυτό το σκοπό υποθέτουμε ότι η τυχαία συμπεριφορά του συστήματος ερμηνεύεται στα πλαίσια της θεωρίας του Shannon για μια εργοδική πηγή πληροφορίας, [1, 38, 107, 108].

Αν *S* είναι κάποια ιδιότητα του δυναμικού συστήματος και $\{s_i, i=1,2...\}$ πιθανές τιμές της *S* τότε η μέση ποσότητα πληροφορίας που παίρνουμε από μια μέτρηση που προσδιορίζει την *S* δίνεται από την εντροπία *H(S)*

$$H(S) = \sum_i \mathrm{P}(s_i)\log \mathrm{P}(s_i) \tag{5.3}$$

όπου $P(s_i)$ είναι η πιθανότητα η *S* να ισούται με s_i και υπολογίζεται από τον λόγο $n(s_i)/n_T$, όπου $n(s_i)$ είναι το πλήθος των παρατηρήσεων με τιμή s_i και n_T ο ολικός αριθμός των μετρήσεων. Η ίδια ιδέα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμήσουμε πόση πληροφορία κερδίζουμε για μια μέτρηση μιας παρατηρούμενης ιδιότητα *S* από την μέτρηση μια άλλης παρατηρούμενης ιδιότητας *Q*. Αυτή η ιδέα είναι η βάση του ορισμού της αμοιβαίας πληροφορίας. Για μια χρονοσειρά θεωρούμε το ζεύγος *(S,Q)* με $Q=\{x(i)\}$ και $S=\{x(i+\tau)\}$, όπου $x(i)$, $x(i+\tau)$ αντιστοιχούν σε βαθμωτά μεγέθη του δυναμικού συστήματος στους διακριτούς χρόνους t_i και $t_{i+\tau}$. Η ποσότητα δια της οποίας μια μέτρηση της *Q* περιορίζει την αβεβαιότητα της *S* λέγεται αμοιβαία πληροφορία και δίνεται από τη σχέση

$$I_{SQ} = H(S)-H(S/Q)=H(S)+H(Q)-H(Q,S) \tag{5.4}$$

που όταν εφαρμοστεί σε μια χρονοσειρά οδηγεί στη σχέση

$$+\sum_{x(i)}\sum_{x(i-\tau)}\mathrm{P}(x(i),x(i-\tau))\log_2\mathrm{P}(x(i),x(i-\tau)) \tag{5.5}$$

Η αμοιβαία πληροφορία υπολογίζει την γενική εξάρτηση μεταξύ δύο δειγματοληψιών και παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, I_{max})$, όπου $I_{max} = I(0)$ είναι η εντροπία πληροφορίας_ $H(x)$. Αν τα δείγματα $\{Q\equiv x(i)\}$ και $\{S\equiv x(i+\tau)\}$ είναι στατιστικά ανεξάρτητα τότε η αμοιβαία πληροφορία για αυτό το τ θα είναι μηδέν. Δηλαδή καμία γνώση δεν μπορούμε να πάρουμε για το δεύτερο δείγμα αν γνωρίζουμε το πρώτο. Από την άλλη μεριά αν το πρώτο δείγμα ορίζει κατά μοναδικό τρόπο το δεύτερο δείγμα τότε $I(\tau)= I_{max}$, που συμβαίνει συνήθως για $\tau=0$.

Αν ο χρόνος καθυστέρησης τ εκλεγεί έτσι ώστε η αμοιβαία πληροφορία $I(\tau)$ να γίνεται για πρώτη φορά ελάχιστη, τότε η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ των διανυσμάτων του ανακατασκευασμένου χώρου φάσεων θα είναι ελάχιστη. Αν και το μόνο πρόβλημα είναι ότι απαιτεί μεγάλο αριθμό δεδομένων και άρα μεγάλο υπολογιστικό χρόνο, η αμοιβαία πληροφορία είναι η πλέον κατάλληλη μέθοδος για την εκτίμηση του χρόνου καθυστέρησης.

1.5.6.2 Επιλογή της διάστασης εμβάπτισης

Το θεώρημα εμβάπτισης των Takens - Ruelle [99] περιορίζεται στην διατήρηση των τοπολογικών ιδιοτήτων του συστήματος όπως απέδειξε ο Whitney to *1936* [134] και είναι στην πραγματικότητα ανεξάρτητο της δυναμικής του συστήματος. Ο σκοπός του θεωρήματος της ανακατασκευής είναι να προτείνει ένα Ευκλείδιο χώρο R^m αρκετά μεγάλης διάστασης m τέτοιο ώστε η τροχιά του ελκυστή διάστασης D, να ξεδιπλωθεί πλήρως στο χώρο R^m. Αυτό σημαίνει ότι αν δύο σημεία της τροχιάς βρίσκονται το ένα πλησίον του άλλου σε κάποια διάσταση εμβάπτισης m, είναι γιατί αυτό είναι μια ιδιότητα της τροχιάς του ελκυστή και όχι λόγω της μικρής τιμής m της διάστασης του χώρου εμβάπτισης.

Το θεώρημα εμβάπτισης προτείνει μια επαρκή τιμή της διάστασης εμβάπτισης $m> 2D$, αλλά η επαρκής τιμή m δεν είναι πάντα και η αναγκαία. Έτσι για παράδειγμα για το σύστημα του Lorenz που έχει κλασματική διάσταση συσχέτισης $D=2.06$ η ελάχιστη τιμή $m=5$ είναι επαρκής για πλήρη εμβάπτιση. Όμως το σύστημα του Lorenz περιγράφεται από τρεις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και άρα μπορεί να εμβαπτιστεί πλήρως στον R^3, δηλαδή η τιμή η επαρκής τιμή $m=5$ είναι μεγαλύτερη της αναγκαίας $m_0=3$.

Αν και για το θεώρημα εμβάπτισης δεν έχει σημασία η τιμή της διάστασης εμβάπτισης m, αρκεί αυτή να πληροί τη συνθήκη εμβάπτισης $m>2D+1$, από πλευράς φυσικής χρειάζεται περισσότερη προσοχή. Δύο προβλήματα προκύπτουν στην πράξη όταν εργαζόμαστε με διαστάσεις εμβάπτισης μεγαλύτερες της αναγκαίας m_0. Πρώτο πρόβλημα είναι ότι όσο αυξάνει η m τόσο αυξάνει και ο υπολογιστικός χρόνος για τον υπολογισμό διαφόρων μεγεθών. Δεύτερο πρόβλημα είναι ότι οι επί πλέον διαστάσεις που είναι μεγαλύτερες από m_0 καλύπτονται από θόρυβο που συνήθως υπάρχει στο παρατηρούμενο σήμα, και όχι από την δυναμική του σήματος που ενυπάρχει στην αναγκαία διάσταση.

Στη συνέχεια περιγράφουμε τις πιο βασικές χρησιμοποιούμενες μεθόδους για τον υπολογισμό της αναγκαίας διάστασης εμβάπτισης.

Α) Κορεσμός των κλίσεων - Υπολογισμός της διάστασης συσχέτισης

Η ελάχιστη διάσταση εμβάπτισης m_0 είναι θεωρητικά ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από την διάσταση συσχέτισης D του ελκυστή (αν και στην πράξη η m_0 παίρνει μεγαλύτερες τιμές εξαρτώμενες από τον χρόνο καθυστέρησης τ). Άρα υπολογίζοντας την διάσταση συσχέτισης D μπορούμε να εκτιμήσουμε την m_0.

Η διάσταση συσχέτισης ορίζεται από τη σχέση

$$D = \lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{d}[\ln C(r)]}{\mathrm{d}[\ln(r)]} \tag{5.6}$$

όπου $C(r)$ είναι το καλούμενο ολοκλήρωμα συσχέτισης για μια ακτίνα. Όταν υπάρχει ελκυστής για μικρές τιμές του r ισχύει η σχέση

$$C(r) \sim r^d \quad \text{για } r \to 0 \tag{5.7}$$

Για μια χρονοσειρά, το ολοκλήρωμα συσχέτισης εξαρτάται από την διάσταση εμβάπτισης του ανακατασκευασμένου χώρου φάσεων και ισχύει

$$C(\boldsymbol{r}, m) = \frac{2}{N(n-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Theta(\boldsymbol{r} - \|\boldsymbol{x}(i) - \boldsymbol{x}(j)\| \tag{5.8}$$

όπου $\Theta(\alpha)=1$ αν $\alpha>0$ και $\Theta(\alpha)=0$ αν $\alpha<1$ και N είναι ο αριθμός των διανυσμάτων στον ανακατασκευασμένο χώρο φάσεων. Σ' αυτή την περίπτωση ο εκθέτης κλιμάκωσης d αυξάνεται, αυξανομένης της διάστασης εμβάπτισης m, μέχρι μια τελική τιμή D, για μια αρκούντως μεγάλη διάσταση εμβάπτισης m_0 , [123, 138].

Για περιοδικούς ή ημιπεριοδικούς ελκυστές η διάσταση συσχέτισης D είναι ίση με την τοπολογική διάσταση d της πολλαπλότητας $\boldsymbol{M}$, που περιέχει τον ελκυστή. Συνήθως για ένα ελκυστή η D έχει κλασματική τιμή.

B) Ψευδογείτονες

Εκτός από την διάσταση συσχέτισης και η μέθοδος των ψευδογειτόνων μπορεί επίσης να δώσει μια εκτίμηση για την μικρότερη διάσταση εμβάπτισης m_0. Όταν η τροχιά του συστήματος είναι ανακατασκευασμένη σε ένα χώρο χαμηλής διάστασης, τότε είναι δυνατό η τροχιά να αυτοτέμνεται λόγω της μικρής διάστασης του ανακατασκευασμένου χώρου φάσεων. Το αποτέλεσμα εξ' αιτίας αυτού είναι να υπάρχουν διανύσματα που είναι κοντινά μεταξύ τους και λέγονται ψευδογείτονες. Καθώς αυξάνεται η διάσταση εμβάπτισης η ανάπτυξη της τροχιάς του ελκυστή γίνεται πιο πλήρης και οι ψευδογείτονες λιγοστεύουν, μέχρις όπου να εξαφανιστούν για μια αρκετά μεγάλη διάσταση εμβάπτισης m_0.

Έστω $\boldsymbol{x(j)}$ είναι το κοντινότερο διάνυσμα στο $\boldsymbol{x(i)}$ για μια διάσταση εμβάπτισης m. Τότε η απόστασή τους δίνεται από τη σχέση

$$r_m^2(i,j)=\left[x(i)-x(j)\right]^2+\ldots+\left[x(i+(m-1)\tau)-x(j+(m-1)\tau)\right]^2$$

Περνώντας από την m στην $m+1$ διάσταση εμβάπτισης η απόστασή τους γίνεται

$$r_{m+1}^2(i,j)=r_m^2(i,j)+\left[x(i+m\tau)-x(j+m\tau)\right]^2 \tag{5.9}$$

Τότε αν ισχύει η σχέση

$$\frac{\left|x(i+m\tau)-x(j+m\tau)\right|}{r_m}>R_T \tag{5.10}$$

οι κοντινότατοι γείτονες $\boldsymbol{x(j)}$, $\boldsymbol{x(i)}$ λέγονται ψευδογείτονες, [1]. Η τιμή R_T όπως έχει εκτιμηθεί παίρνει τιμές στο διάστημα $[10, 50]$. Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο καθώς η διάσταση εμβάπτισης m αυξάνει προς μια χαρακτηριστική τιμή m_0 το ποσοστό των ψευδογειτόνων τείνει προς το μηδέν.

Γ) Ανάλυση Ιδιαζόντων τιμών

Η ανάλυση ιδιαζόντων τιμών έχει αποδειχτεί ότι αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για την σύγχρονη ανάλυση χρονοσειρών, τόσο για τον υπολογισμό της αναγκαίας διάστασης εμβάπτισης m_0 όσο και σαν φίλτρο για τον καθαρισμό του σήματος από τον θόρυβο, [23, 35].

Η ανάλυση ιδιαζόντων τιμών εφαρμόζεται στον πίνακα διανυσμάτων της ανακατασκευασμένης τροχιάς

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x(t_1),x(t_1),...(x(t_1+(m-1)\tau) \\ x(t_2),x(t_2),...(x(t_2+(m-1)\tau) \\ . \quad . \quad ... \quad . \\ x(t_N),x(t_N),...(x(t_N+(m-1)\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^T \\ \boldsymbol{x}_2^T \\ . \\ \boldsymbol{x}_N^T \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

όπου $x(t_i)$ είναι η παρατηρούμενη χρονοσειρά και τ ο χρόνος καθυστέρησης για την ανακατασκευή του χώρου φάσεων. Οι γραμμές του πίνακα τροχιάς $\boldsymbol{x}_i^T$ αποτελούν τα διανύσματα των καταστάσεων στην ανακατασκευασμένη τροχιά του χώρου εμβαπτισης R^m. Αφού κατασκευαστούν τα N διανύσματα καταστάσεων στον χώρο εμβάπτισης R^m το πρόβλημα είναι να βρεθεί το σύνολο των γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων στον R^m τα οποία μπορούν επαρκώς τον ελκυστή εντός του χώρου φάσεων σύμφωνα με τη θεωρία ανακατασκευής. Τα ζητούμενα διανύσματα αποτελούν μέρος μιας πλήρους ορθοκανονικής βάσης $\{c_i \; i=1,2,...m\}$ στον R^m και βρίσκονται από τη σχέση

$$\boldsymbol{s}_i^T \boldsymbol{X} = \sigma_\iota \boldsymbol{c}_i^T \qquad i=1,2,...m_0 \tag{5.12}$$

όπου $\boldsymbol{s}_i^T$ είναι ορθονοκανονικά διανύσματα του χώρου R^N.

Σύμφωνα με το SVD θεώρημα μπορεί να αποδειχτεί ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{s}_i$ και $\boldsymbol{c}_i$ είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα δομής (stucture matrix) $\boldsymbol{XX}^T$ και του συναλλοίωτου πίνακα (covariance matrix) $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ της τροχιάς σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\boldsymbol{XX}^T\boldsymbol{s}_i = \sigma_i^2 \boldsymbol{s}_i \qquad \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{c}_i = \sigma_i^2 \boldsymbol{c}_i \tag{5.13}$$

Τα διανύσματα $\boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{c}_i$ καλούνται ιδιάζοντα διανύσματα και οι σ_i ιδιάζουσες τιμές του $\boldsymbol{X}$, ενώ η SVD ανάλυση του X μπορεί να γραφεί

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S\Sigma C}^T$$

όπου $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,...\boldsymbol{s}_m]$, $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2, ...\boldsymbol{c}_m]$ και $\boldsymbol{\Sigma}=διαγ[\sigma_1,\sigma_2,...\sigma_m]$ με $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_m$. Επί πλέον σύμφωνα με το SVD θεώρημα οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του πίνακα δομής (stucture matrix) ισούται με τις μη μηδενικές ιδιοτιμές του συναλλοίωτου πίνακα (covariance matrix). Αυτό σημαίνει ότι αν m_0 (όπου $m_0 \leq m$) είναι ο αριθμός των μη μηδενικών ιδιοτιμών τότε $rank\boldsymbol{X}=\mathrm{rank}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T=rank\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}=m_0$.

Παρουσία θορύβου αναμένεται οι m_0 πρώτες ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στην δυναμική του συστήματος να είναι διαφορετικές από τις υπόλοιπες m-m_0 ιδιοτιμές που οφείλονται στον θόρυβο και έχουν περίπου την ίδια τιμή.

1.5.7 Εκτίμηση του φάσματος των εκθετών Lyapunov

Το φάσμα των εκθετών Lyapunov μπορεί να εκτιμηθεί από μια χρονοσειρά, ακολουθώντας την εξέλιξη μικρών διαταραχών της ανακατασκευασμένης δυναμικής και προσεγγίζοντας γραμμικά την δυναμική. Η εξέλιξη ενός διανύσματος $\boldsymbol{w}(i)$, που αντιστοιχεί σε μια μικρή διαταραχή του διανύσματος $\boldsymbol{x}(i)$ δίνεται από την εξίσωση

$$\boldsymbol{w}(i+n)=\boldsymbol{DG}^{\,n}(\boldsymbol{x}(i))\boldsymbol{w}(i) \tag{5.14}$$

όπου $\boldsymbol{DG}$ είναι η παράγωγος του πίνακα $\boldsymbol{G}$ στην θέση $\boldsymbol{x}(i)$. Μια προσέγγιση του $\boldsymbol{DG}^{\,n}$ στο $\boldsymbol{x}(i)$ μπορεί να γίνει επιλύνοντας τη σχέση

$$\min_{A_i} S = \min_{A_i} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \left\| \boldsymbol{w}_j(i+n) - \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{w}_j(i) \right\|^2 \tag{5.15}$$

όπου k είναι ο αριθμός των γειτόνων του $\boldsymbol{x}(i)$ που θεωρούνται ως k διαφορετικές διαταραχές $\boldsymbol{w}_j$, $j=1,...k$, τέτοιες ώστε $||\boldsymbol{w}_j||< \varepsilon$ όπου ε είναι η ακτίνα μιας σφαίρας με κέντρο το $\boldsymbol{x}(i)$ και $t_p=n\Delta t$ είναι ο χρόνος διάδοσης (propagator time). Τα διανύσματα $\boldsymbol{w}_j$ χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του $\boldsymbol{A}_i \equiv \boldsymbol{DG}^{\,n}$ στο σημείο $\boldsymbol{x}(i)$.

Το φάσμα των εκθετών Lyapunov βρίσκεται επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για όλα τα N διανύσματα του ανακατασκευασμένου χώρου φάσεων, από τη σχέση

$$\lambda_j = \frac{1}{Nt_p} \sum_{i=1}^{N} log \left\| \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e}_j^i \right\| \tag{5.16}$$

όπου $\boldsymbol{e}_j^i$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων στην κατάσταση $\boldsymbol{x}(i)$ που αντικαθίστανται από τα $\boldsymbol{e}_j^{i+n} = \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e}_j^i$ μετά από χρόνο t_p, [47, 55, 139].

Για την εκτίμηση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov χρησιμοποιείται και η μέθοδος Wolf, [135]. Έστω $\boldsymbol{x}(1)$ το πρώτο διάνυσμα της ανακατασκευασμένης τροχιάς, και $L(1)$ η απόσταση του από το πλέον γειτονικό διάνυσμα. Μετά από καθορισμένο χρόνο $t_p=n\Delta t$ το μήκος *L(1)* θα έχει εξελιχθεί σε μήκος *L΄(1)*, οπότε η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τα διανύσματα *x(1+k•n), k=1,...,M* όπου *M* είναι το πλήθος των αντικαταστάσεων. Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov δίνεται από τη σχέση

$$L_{\max} = \frac{1}{Mt_p}\sum_{k=1}^{M} \ln \frac{L'(k+1)}{L(k)} \tag{5.17}$$

1.6 Μοντελοποίηση και πρόβλεψη

Η μοντελοποίηση και η πρόβλεψη ενός δυναμικού συστήματος είναι το πρόβλημα που συγκεντρώνει το περισσότερο ενδιαφέρον. Η βασική ιδέα είναι ότι αφού γνωρίζουμε την χρονική εξέλιξη ενός διανύσματος ***x(t)*** της τροχιάς στον ανακατασκευασμένο χώρο φάσεων και αφού η τροχιά βρίσκεται πάνω σε έναν έλκυστη, άρα και κάθε γειτονικό διάνυσμα ως προς το ***x(t)*** θα εξελίσσεται με την ίδια δυναμική. Αυτή η διαπίστωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σκοπό την μοντελοποίηση ή την πρόβλεψη, βρίσκοντας απεικονίσεις ***G: x(i)→x(i+1)*** (ή παίρνοντας μόνο την πρώτη βαθμωτή συνιστώσα *G* της απεικόνισης). Ο πειραματικός υπολογισμός της *G* για μια προβλεπόμενη τιμή, και της G^T για *T* προβλεπόμενες τιμές, γίνεται προσδιορίζοντας ένα σύνολο από παραμέτρους ***α***, [1, 123].

Αφού επιλεχθεί η μορφή της *G* η οποία μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική, ο προσδιορισμός των παραμέτρων ***α*** γίνεται χρησιμοποιώντας κάποια μέθοδο ελαχιστοποίησης του σφάλματος μεταξύ της πραγματικής ***x(i+T)*** και της προβλεπόμενης $\boldsymbol{x}' = G^T(\boldsymbol{x}(i),\boldsymbol{\alpha})$ τιμής. Αναλόγως του αριθμού των διανυσμάτων που θα χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή της απεικόνισης G^T στη κατάσταση ***x(i)***, η μέθοδος μπορεί να είναι τοπική (local), σφαιρική, η και ενδιάμεση, όπου η τοπική αντιστοιχεί σε λίγα γειτονικά διανύσματα και η σφαιρική στο σύνολο των διανυσμάτων της ανακατασκευασμένης τροχιάς. Στην μοντελοποίηση γίνεται χρήση όλων των διαθεσίμων δεδομένων για την κατασκευή του μοντέλου, ενώ στην πρόβλεψη ένα μέρος των δεδομένων χρησιμοποιείται για την κατασκευή του μοντέλου (περιοχή μάθησης) και το υπόλοιπο για πρόβλεψη (περιοχή ελέγχου) με βάση το εκτιμούμενο μοντέλο, [1, 123, 130].

Για να ελεγχθεί η ικανότητα του μοντέλου για πρόβλεψη ή μοντελοποίηση συνήθως υπολογίζονται δύο ποσότητες. Η πρώτη είναι η τετραγωνική ρίζα του κανονικοποιημένου μέσου σφάλματος, NRMSE (normalized root mean square error) που δίνεται από τη σχέση

$$NRMSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{M}\left[x(k)-x'(k)\right]^2}{\sum_{k=1}^{M}\left[x(k)-\langle x\rangle\right]^2}} \tag{6.1}$$

όπου M είναι το πλήθος των προβλεπόμενων (μοντελοποιημένων) τιμών, και $\langle x\rangle$ η μέση τιμή τους τιμή. Αν NRMSE ≅ 0 τότε το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε είναι τέλειο, και αν NRMSE >1 οι προβλεπόμενες (μοντελοποιημένες) τιμές είναι χειρότερες από τη μέση τιμή, αν η τελευταία θεωρηθεί ως μοντέλο.

Η δεύτερη ποσότητα είναι ο συντελεστής συσχέτισης CC (correlation coefficient) που εκτιμάει την συσχέτιση μεταξύ των εκτιμούμενων (προβλεπομένων, πραγματικών) και των αντιστοίχων πραγματικών τιμών και δίνεται από τη σχέση

$$CC = \frac{\sum_{k=1}^{M}[x(k)-\bar{x}][x'(k)-\langle x'\rangle]}{\sqrt{\sum_{k=1}^{M}[x(k)-\bar{x}]^2\sum_{k=1}^{M}[x'(k)-\langle x'\rangle]^2}} \tag{6.2}$$

όπου $\bar{x}$, $\langle x'\rangle$ είναι η μέση τιμή των πραγματικών και εκτιμούμενων τιμών αντίστοιχα. Ο CC παίρνει τιμές στο διάστημα *[-1,1]*. Όταν ο *CC ≅1* το μοντέλο είναι τέλειο, ενώ όταν παίρνει τιμές αρνητικές ή κοντά στο μηδέν η χρήση του έχει φτωχά αποτελέσματα.

Στην ανάλυση δεδομένων χρησιμοποιήσαμε τοπικά γραμμικά και σφαιρικά πολυωνυμικά (μη γραμμικά) μοντέλα.

1.6.1 Σφαιρικά πολυωνυμικά μοντέλα

Μια απλή προσέγγιση της απεικόνισης G^T μπορεί να γίνει με ένα απλό πολυώνυμο αποτελούμενο από γραμμικούς ή μη γραμμικούς όρους βαθμού *q*. Βέβαια ένα πολυώνυμο μικρού βαθμού *q*, με *m* μεταβλητές, το οποίο συμβολίζουμε με p_q^T δεν μπορεί να αναπαραστήσει μια σύνθετη δυναμική και για μια καθαρά χαοτική δυναμική είναι πολύ πιθανόν να είναι ανεπαρκές. Παρ' όλα αυτά, όταν ένα τέτοιο μοντέλο εφαρμοστεί σε πραγματικά δεδομένα, μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα, μοντελοποιώντας μόνο την προφανή δυναμική του συστήματος, και αφήνοντας την υπόλοιπη που πιθανόν να έχει αποκρυφτεί από θόρυβο.

Η γενική μορφή του πολυωνύμου p_q^T όπου $x'_{i+T} = p_q^T(\boldsymbol{x}_i)$ $\boldsymbol{x}_i \in R^m$, δίνεται από την σειρά Voltera-Wiener [92] βαθμού *q* και μνήμης *m*

$$x'(i+T)= a_0 + a_1 x(i-\tau)+...+ a_m(i-(m-1)\tau)+...+ a_{m+1}x^2(i)+ a_{m+2}x(i)x(i-\tau)+... \\ + a_M x^q(i-(m-1)\tau) \tag{6.3}$$

όπου M=(m+q)!/(m!q!).

1.6.2 Τοπικά μοντέλα

Η ιδέα για τη χρήση τοπικών μοντέλων είναι ότι στα ντετερμινιστικά συστήματα, γειτονικές τροχιές εξελίσσονται ομοιόμορφα, και η ιδιότητα αυτή ισχύει τουλάχιστον για ένα μικρό χρονικό διάστημα αν το σύστημα είναι χαοτικό. Έτσι σε ένα ανακατασκευασμένο ελκυστή, για κάποιο σημείο ***x(i)*** μπορεί η απεικόνιση G^T να προσεγγιστεί τοπικά χρησιμοποιώντας τους *k* κοντινότερους γειτόνους *{**x**(i(1)),...**x**(i(k)}* του ***x**(i).*

1.6.2.1 Μέση τιμή τοπικού βάρους (Local weighted averaging)

Αυτό είναι μια γεωμετρική μη παραμετρική μέθοδος και βασίζεται στην ιδέα ότι σημεία τα οποία είναι γειτονικά στο χώρο, θα πρέπει να παραμένουν γειτονικά και μετά από T χρονικά βήματα μπροστά. Σε κάθε ένα από τα γειτονικά διανύσματα *{**x**(i(1)),...**x**(i(k)}* του ***x***(i) τοποθετούνται συντελεστές (βάρη) , που σχετίζονται με την αντίστοιχη απόσταση από το ***x**(i).* Η εκτιμούμενη τιμή ***x**(i+T)* βρίσκεται έτσι ώστε οι αποστάσεις της από τα διανύσματα *{**x**(i(1+T)),...**x**(i(k+T)}* σχετίζονται με τις αποστάσεις του ***x***(i) από τα *k* γειτονικά διανύσματα, [1, 112].

1.6.2.2 Τοπική γραμμική απεικόνιση με τη συνήθη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

Η τοπική προσέγγιση της G^T μπορεί να γίνει με μια γραμμική απεικόνιση, $x'(i+T)= \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}(i)$. Υποθέτοντας ότι το μοντέλο είναι αρκετά καλό για μια γειτονιά του ***x**(i),* δηλαδή η παραπάνω εξίσωση ισχύει επίσης για την απεικόνιση *k* γειτόνων, με *k*>*m* όπου *m* η διάσταση του ανακατασκευασμένου χώρου φάσεων. Οι *m+1* παράμετροι

{a_0, a}, υπολογίζονται επιλύνοντας ένα σύστημα *k* εξισώσεων με *m+1* άγνωστες μεταβλητές χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, OLS (ordinary least squeres). Ακολούθως οι υπολογισμένες τιμές των παραμέτρων χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της προβλεπόμενης τιμής $x'(i+T)$, [26, 36].

1.6.2.3 Τοπική γραμμική απεικόνιση με την κανονικοποιημένη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

Το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφτηκε παραπάνω μπορεί να επιλυθεί διαφορετικά εισάγοντας κάποιες κανονικοποιήσεις στην συνήθη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων *OLS* (ordinary least squeres), δηλαδή απαιτώντας μείωση της διάστασης του παραμετρικού χώρου. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μπορούν να επιτευχθούν καλύτερα αποτελέσματα, ειδικά για μεγάλες διαστάσεις εμβάπτισης και για δεδομένα που έχουν θόρυβο. Στην ανάλυση δεδομένων εφαρμόσαμε μια απλή μέθοδο κανονικοποιήσης της *OLS* χρησιμοποιώντας παλινδρόμηση κυρίων συνιστωσών (Principal Components Regression *(PCR)*), [138, 140]. Χρησιμοποιώντας την *PCR* η ελάττωση της διάστασης έγινε παίρνοντας μόνο τους πρώτους *q* από τους *m* principal components, και συμβολίζουμε τη μέθοδο με *PCR(q).*