Δυναμικά Συστήματα
και Σήματα Θορύβων

2.1 Κατηγορίες θορύβου

2.1.1 Λευκός θόρυβος

Στην πράξη, σε κάθε πρόβλημα μέτρησης ή πρόβλημα διαβίβασης πληροφορίας, π.χ. σε μια τηλεπικοινωνιακή ζεύξη ή κατά τις μετρήσεις που γίνονται σε ένα ερευνητικό πρόγραμμα, έχουμε συνήθως να κάνουμε με πολύ ασθενή ηλεκτρικά σήματα. Η μέτρηση των σημάτων αυτών γίνεται πάντα με μια αβεβαιότητα που είναι συμφυής στα φυσικά φαινόμενα και στις φυσικές δομές και εμποδίζει την ανάδειξη του κύριου φαινομένου ή της πληροφορίας.

Η χρονικά εξαρτημένη αβεβαιότητα στις φυσικές παραμέτρους αναφέρεται γενικά σαν θόρυβος. Ο θόρυβος είναι μια εντελώς ακανόνιστη διακύμανση που μπαίνει μαζί με την πληροφορία στην είσοδο της μετρητικής διάταξης ή που γεννιέται μέσα στην ίδια τη διάταξη ή στο κανάλι διαβίβασης της πληροφορίας.

Μερικοί από τους θορύβους που μας απασχολούν στην πράξη είναι [56, 96]:

α) Ο θερμικός θόρυβος (thermal noise) που προέρχεται από την εσωτερική αντίσταση μιας πηγής σήματος.

β) Ο θόρυβος που προέρχεται από τα ίδια τα όργανα που χρησιμοποιούμε για το χειρισμό του σήματος.

γ) Ο θόρυβος του περιβάλλοντος που προκαλείται από ποικίλα αίτια, όπως ραδιοηλεκτρικές παρεμβολές, ατμοσφαιρικά παράσιτα κ.λ.π.

δ) Στατιστικές διακυμάνσεις που προέρχονται από την κβαντική φύση της ίδιας της μετρούμενης ποσότητας, π.χ. φάσμα αερίου.

Η πιο απλή μορφή θορύβου είναι ο λεγόμενος λευκός θόρυβος, [56, 92, 96]. Η διακριτή διεργασία $\{w_t\}$ καλείται μία καθαρώς τυχαία ή λευκός θόρυβος (white noise) αν οι τυχαίες μεταβλητές w_t αποτελούν μία ακολουθία αμοιβαία ανεξαρτήτων μεταβλητών με την ίδια κατανομή. Από τον ορισμό προκύπτει ότι η μέση τιμή και η διασπορά είναι σταθερές και ότι η αυτοδιασπορά δίνεται από τη σχέση

$$\gamma(k) = \mathrm{cov}\{w_t, w_{t+k}\} = 0 \quad \text{για } k=\pm1,\pm2,\ldots$$

Καθώς η μέση τιμή και η αυτοδιασπορά είναι ανεξάρτητες από το χρόνο, η διεργασία είναι δευτέρας τάξεως στάσιμη. Στην πραγματικότητα είναι επίσης και αυστηρώς στάσιμη. Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης δίνεται από τη σχέση

$$r(k) = \begin{cases} 1 \text{ αν } k=0 \\ 0 \text{ αν } k=\pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Το φάσμα ισκύος του λευκού θορύβου είναι σταθερό και δεν εξαρτάται από τις τιμές της συχνότητας.

Η χρονοσειρά λευκού θορύβου *w(i), i=1,2,..N,* που χρησιμοποιήθηκε στα πειράματα παράχθηκε από γεννήτρια τυχαίων αριθμών, έχει Γκαουσσιανή κατανομή, με μέση τιμή ίση με το *μηδέν (0)* και διασπορά ίση με *ένα* (*1*). Επίσης επειδή είναι και γραμμικός θόρυβος λόγω της κατανομής επειδή κάθε Γκαουσσιανό σήμα είναι και γραμμικό άρα και η χρονοσειρά θορύβου *w(i)* είναι γραμμική.

2.1.2 Έγχρωμος θόρυβος

Στην παράγραφο αυτή περιγράφονται απλές κατηγορίες εγχρώμων θορύβων με φάσμα ισχύος της μορφής *P(ω)* της μορφής $\omega^{-\alpha}$ που έχουν καθορισμένη κλασματική διάσταση [74, 81, 94, 123, 124, 141].

Τέτοιοι θόρυβοι είναι της μορφής

$$X(t_i) = \sum_{i=1}^{M/2} C_k \cos(\omega_k t_i + \varphi_k), \quad i = 1, \ldots, M \tag{1.1}$$

όπου οι φάσεις φ_k είναι τυχαία κατανεμημένες στο διάστημα *[0, 2π]* και C_k είναι σταθερές σχετιζόμενες με το φάσμα ισχύος $P(\omega_k)$ μέσου της σχέσης

$$C_k = \left[P(\omega) \frac{2\pi}{\mathrm{M}} \frac{1}{\Delta \mathrm{t}} \right]^{1/2} \tag{1.2}$$

Όπως υπολογίζεται πειραματικά μέσου της ανακατασκευής του χώρου φάσεων με βάση την θεωρία εμβάπτισης οι τυχαίες αυτές χρονοσειρές βρέθηκε να έχουν διάσταση συσχέτισης D σχετιζόμενη με το α μέσου της σχέσης $D = 2/(\alpha\text{-}1)$, με $1 < \alpha < 3$ σύμφωνα με τους Osborne και Provenzale *(1989).*

Η χαμηλή τιμή της διάστασης συσχέστισης δημιουργεί ερωτήματα ως προς την ερμηνεία της δεδομένου ότι αντιστοιχεί σε μια τυχαία τροχιά στο χώρο φάσεων που έχει την ιδιότητα της αυτομοιότητας. Με σκοπό την βαθύτερη κατανόηση των παραπάνω αναφέρουμε την έννοια της αυτοσυγγένειεας (self-affinity) για ένα σήμα. Ένα σήμα $x(t_i)$ $i = 1,2 \ldots N$ λέγεται ότι είναι αυτοσυγγενές (self-affine) αν η σχέση

$$x(t_i + b\Delta t) - x(t_i) \overset{d}{=} b^H [x(t_i + \Delta t) - x(t_i)] \tag{1.3}$$

ισχύει ανεξάρτητα του χρόνου. Το σύμβολο $\overset{d}{=}$ σημαίνει ισότητα για τις μέσες τιμές ενώ το H είναι γνωστό ως εκθέτης κλιμάκωσης. Αν το σήμα $x(t)$ είναι τυχαίο και $H = 0.5$ τότε η τροχιά στο χώρο φάσεων αντιστοιχεί σε καθαρή Brownian κίνηση. Για κάθε άλλη τιμή του H η τροχιά λέγεται φράκταλ Brownian (fractal Brownian motion, fBm). Για $0 < H < 1$, m ανεξάρτητα αυτοσυγγενή σήματα $x_n(t_i)$) $n = 1,2 \ldots m$, $i = 1,2 \ldots N$ μπορούν να σχηματίσουν τροχιά με αυτομοιότητα στον m-διάστατο χώρο. Σύμφωνα με τον Mandelbrot (1982) για μια τέτοια τροχιά η κλασματική διάσταση δίνεται από τη σχέση

$$D_H = \min(1/H, m) \tag{1.4}$$

Επίσης είναι θεωρητικά τεκμηριωμένο ότι ένα αυτοσυγγενές σήμα έχει φάσμα ισχύος $P(f) \propto f^{\alpha}$ και ισχύει $\alpha = 2H+1$. Έτσι με βάση τη σχέση 1.4 αποδείχνεται η σχέση $D = 2/(\alpha\text{-}1)$, που δηλώνει ότι η διάσταση συσχέτισης εξαρτάται από τον συντελεστή α και είναι ανεξάρτητη των φάσεων φ_κ του σήματος.

Για ένα αυτοσυγγενές σήμα $x(t)$ μπορεί να αποδειχτεί ότι $E[\Delta(x)] = 0$ $Var[\Delta(x)] \propto (\Delta t)^{2H}$. Αυτό σημαίνει ότι τα αυτοσυγγενή σήματα αν και έχουν χαμηλή διάσταση δεν είναι στάσιμα όπως συμβαίνει με τα χαοτικά σήματα.

Το παράδειγμα έγχρωμου θορύβου που αναφέρθηκε δεν είναι βέβαια η μόνη κατηγορία θορύβου που δίνει πεπερασμένη κλασματική διάσταση. Όπως έχει δειχθεί (Provenzale et al. (1991) οι χρονοσειρές που παράγονται από μια γραμμική ή μη γραμμική διεργασία που δίνεται αντίστοιχα από τη σχέση

$$\frac{dx(t)}{dt} = \theta x(t) + w(t) \qquad (1.5)$$

και

$$\frac{dx(t)}{dt} = (a - 0.5)b - x(t) + [2bx(t)]^{1/2} w(t) \qquad (1.6)$$

όπου *w(t)* είναι τυπική Gaussian διεργασία λευκού θορύβου, είναι στάσιμοι έγχρωμοι θόρυβοι. Για $\theta = -0.9$, και $\alpha = \beta = 1$ τα δύο σήματα έχουν πολύ όμοιο φάσμα (της μορφής $P(\omega) \sim \omega^{-2}$) ενώ η κλασματική διάσταση τους είναι λίγο μεγαλύτερη από την τιμή που δίνεται από την σχέση $D = 2/(\alpha-1)$ όταν $\alpha = 2$.

2.2 Θεώρημα αποσύνθεσης Wold

Το θεώρημα αποσύνθεσης Wold είναι το βασικό θεώρημα της γραμμικής ανάλυσης των χρονοσειρών. Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα μια στάσιμη με μηδενική μέση τιμή διεργασία (γραμμική ή μη γραμμική) μπορεί να αποσυντεθεί σε ένα άθροισμα από δύο ασυσχέτιστες συνιστώσες: μια ντετερμινιστική και μια μη ντετερμινιστική (μη προσδιορίσιμη), [51, 92, 121]. Δηλαδή

$$x_t = z_t + u_t \qquad (2.1)$$

όπου η γραμμική ντετερμινιστική συνιστώσα z_t μπορεί να μοντελοποιηθεί με ένα (πιθανά άπειρο) γραμμικό συνδυασμό από παρελθούσες τιμές

$$z_t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_{t-i} \qquad (2.2)$$

ενώ η μη ντετερμινιστική συνιστώσα u_t μπορεί να μοντελοποιηθεί από ασυσχέτιστο θόρυβο

$$u_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i e_{t-i} \qquad (2.3)$$

Οι ποσότητες e_i είναι ασυσχέτιστες αλλά δεν είναι αναγκαία ανεξάρτητες. Αυτό σημαίνει ότι $\langle e_t e_{t'} \rangle = 0$ για $t \neq t'$ αλλά όχι ότι $P(e_t, e_{t'}) = P(e_t)P(e_{t'})$. Επίσης αναφέρονται ως θόρυβος στην γραμμική ανάλυση αλλά μπορεί να αντιστοιχούν σε μια μη γραμμική ντετερμινιστική διεργασία. Το θεώρημα αποσύνθεσης Wold είναι γενικό και ισχύει για όλες τις στάσιμες διεργασίες που περιέχουν χαμηλή χαοτική δυναμική.

Η αυτοσυσχέτιση $A_z(T)$ της ντετερμινιστικής συνιστώσας της χρονοσειράς είναι μη μηδενική για αυθαίρετα μεγάλο T, ενώ η αυτοσυσχέτιση $A_u(T)$ της μη ντετερμινιστικής συνιστώσας τείνει στο μηδέν καθώς το T γίνεται μεγάλο. Άρα σύμφωνα με την αποσύνθεση κατά Wold μια χρονοσειρά έχει πεπερασμένο (αντίστοιχα άπειρο) χρόνο αποσυσχέτισης αν και μόνον αν η ντετερμινιστική συνιστώσα είναι μηδενική (αντίστοιχα μη μηδενική).

Από το θεώρημα αποσύνθεσης Wold έπεται ότι μια στάσιμη διεργασία μπορεί να προσεγγιστεί από ένα μικτό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο (autoregressive moving average model, ARMA) [92, 96]

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_{t-i} \tag{2.4}$$

Μια μη ντετερμινιστική χρονοσειρά είναι δυνατόν να γραφεί ως ένα καθαρό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο (autoregressive model, AR)

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{t-i} + \sigma e_t \tag{2.5}$$

ή ως ένα μοντέλο μετακινούμενου μέσου όρου (moving average model, MA) [92, 96]

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_{t-i} \tag{2.6}$$

2.3 Ταξινόμηση δυναμικών συστημάτων διαταραγμένων με θόρυβο

Έστω ένα δυναμικό σύστημα συνεχές ή διακριτό στο χρόνο που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, t) \qquad \text{ή} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\lambda}, n)$$

όπου $\boldsymbol{x} \in R^r$, $\boldsymbol{x}_n \in R^r$ είναι διανύσματα, $\boldsymbol{\mu} \in R^k$, $\boldsymbol{\lambda} \in R^v$ είναι παράμετροι, $t \in R$ και $n \in N$.

2.3.1 Δυναμικός θόρυβος

Όταν ο θόρυβος παρεμβάλλεται στη εξέλιξη της δυναμικής του συστήματος καλείται δυναμικός θόρυβος. Ο γενικός του τύπος για την περίπτωση ενός συνεχούς ή διακριτού στο χρόνο σύστημα είναι

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, t, \boldsymbol{w}) \qquad \text{ή} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\lambda}, n, \boldsymbol{w}_n)$$

όπου $\boldsymbol{w}$ είναι μια συνάρτηση θορύβου και $\boldsymbol{w}_n$ είναι ένα διάνυσμα με συνιστώσες τιμές του θορύβου, [6, 9]. Ο όρος δυναμικός θόρυβος αναφέρεται στην [63].

Ένας θόρυβος δύναται να είναι αθροιστικού ή πολλαπλασιαστικού τύπου αναλόγως τις τιμές των παραμέτρων από τις οποίες εξαρτάται η εμφάνιση του στις εξισώσεις του δυναμικού συστήματος.

Για ένα συνεχές ή διακριτό στο χρόνο σύστημα η γενική μορφή του δυναμικού αθροιστικού θορύβου δίνεται από τις εξισώσεις [6, 9]

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, t) + \boldsymbol{w} \qquad \text{ή} \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\lambda}, n) + \boldsymbol{w}_n$$

Η έννοια του δυναμικού αθροιστικού θορύβου στα διακριτά συστήματα συναντάται στις εργασίες [27, 75] για την απεικόνιση Henon και 2-διάστατου δακτυλίου αντίστοιχα. Επίσης η ίδια περίπτωση για διακριτά στο χρόνο συστήματα συναντάται και στις εργασίες [33, 71, 94].

Η γενική μορφή του δυναμικού πολλαπλασιαστικού θορύβου για την περίπτωση του συνεχούς ή διακριτού στο χρόνο σύστημα δύνεται από τις εξισώσεις

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{w})\ t) \qquad \text{ή} \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n, \gamma(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}_n)\ n)$$

όπου $\boldsymbol{g}$ είναι διανυσματική συνάρτηση και γ είναι μια συνάρτηση πινάκων. Η περίπτωση του δυναμικού πολλαπλασιαστικού θορύβου για την λογιστική απεικόνιση αναφέρεται και στις εργασίες [30, 54, 68].

2.3.2 Εξωτερικός θόρυβος

Επίσης θεωρούμε και την περίπτωση του εξωτερικού θορύβου ο οποίος δεν επηρεάζει την εξέλιξη της δυναμικού συστήματος. Η γενική μορφή του $\boldsymbol{X(t)}$ (αντίστοιχα $\boldsymbol{X}_n$) για την περίπτωση ενός συνεχούς (αντίστοιχα διακριτού) στο χρόνο δυναμικού συστήματος δίνεται από τις σχέσεις [6, 9]

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}(t),t,\boldsymbol{w}) \quad ή \qquad (3.5)$$
$$\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_n,n,\boldsymbol{w}_n)$$

όπου $\boldsymbol{x}(t)$, x_n είναι οι λύσεις του συστήματος (4.1) όπου $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{G}$ διανυσματικές συναρτήσεις.

Η γενική μορφή του εξωτερικού αθροιστικού θορύβου για την περίπτωση ενός συνεχούς ή διακριτού στο χρόνο δυναμικό σύστημα δίνεται από τις σχέσεις

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{w} \quad ή \qquad (3.6)$$
$$\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{x}_n +\boldsymbol{w}_n$$

Η γενική μορφή του εξωτερικού πολλαπλασιαστικού θορύβου για την περίπτωση ενός συνεχούς ή διακριτού στο χρόνο δυναμικό σύστημα δίνεται από τις σχέσεις

$$\boldsymbol{X}(t) =\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{w}) \quad ή \qquad (3.7)$$
$$\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_n ,\boldsymbol{w}_n)$$

όπου $\boldsymbol{H}$ είναι μια συνάρτηση και $\boldsymbol{h}$ μια απεικόνιση. Ο όρος εξωτερικός θόρυβος (output noise) συναντάται στη βιβλιογραφία της θεωρίας των ηλεκτρικών κυκλωμάτων [56]. Επίσης η ειδική περίπτωση του εξωτερικού αθροιστικού θορύβου για διακριτά στο χρόνο συστήματα αναφέρεται και στις εργασίες [19, 44, 45, 109, 123].

2.4 Αναγνώριση και διάκριση ντετερμινιστικού χάους από στοχαστική συμπεριφορά

2.4.1 Κριτήριο Theiler

Σύμφωνα με την εξίσωση (*5.7*) του κεφαλαίου 1 οι ιδιότητες κλιμάκωσης του ολοκληρώματος συσχέτισης όταν $r \to 0$ και ο κορεσμός του εκθέτη κλιμάκωσης $d(m) \to D$ καθώς το m αυξάνει, είναι οι αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη χαμηλοδιάστατης δυναμικής στις πειραματικές χρονοσειρές. Παρ' όλα αυτά, έχει δειχτεί ότι αυτές οι συνθήκες δεν είναι επαρκείς για να συμπεράνουμε χαμηλοδιάστατη δυναμική από μια πειραματική χρονοσειρά με συνεχές φάσμα, καθώς αυτές μπορούν να επιτευχθούν επίσης από στοχαστικά συστήματα, [74, 93]. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Theiler [118] η ιδέα της χαμηλής διάστασης συσχέτισης (κλασματικής ή ακεραίας) μπορεί να εφαρμοστεί στις χρονοσειρές με δύο διακριτούς τρόπους. Ο πρώτος δηλώνει τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας στην υποκείμενη δυναμική και ο δεύτερος ποσοτικοποιεί την αυτομοιότητα της τροχιάς δια μέσου του χώρου φάσεων. Στην πρώτη περίπτωση, η κλιμάκωση και ο κορεσμός προκαλούνται από την χαρακτηριστική ιδιότητα της επαναφοράς της ανακατασκευασμένης τροχιάς, δηλαδή από τα χρονικά ασυσχέτιστα και χωρικά συσχετισμένα διανύσματα καταστάσεων. Στην δεύτερη περίπτωση, προκαλούνται από τα χρονικά συσχετισμένα διανύσματα καταστάσεων στο χώρο φάσεων. Με σκοπό να διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις, γνωστές ως δυναμική και γεωμετρική χαμηλή διάσταση, περιορίζουμε το άθροισμα της εξίσωσης *(5.8)* του κεφαλαίου 1 σε ζεύγη $(\mathbf{x}(i), \mathbf{x}(j))$ *με* $|i - j| > w$ με την παράμετρο του Theirer w μεγαλύτερη από τον χρόνο αποσυσχέτισης της χρονοσειράς.

2.4.2 Η μέθοδος των αναδιαμορφωμένων δεδομένων

Αν μετά την εφαρμογή του κριτηρίου Theiler η διάσταση παραμένει χαμηλή ως δυναμικό χαρακτηριστικό του συστήματος, τότε πρέπει να αποφασίσουμε μεταξύ της γραμμικότητας και της μη γραμμικότητας και στη συνέχεια μεταξύ της χαοτικότητας και της στοχαστικότητας. Με το όρο χαοτικότητα εννοούμε την περίπτωση εκείνη όπου η ντετερμινιστική συνιστώσα της διαδικασίας υπερισχύει και αποκαλύπτει χαοτική δυναμική. Για μια στοχαστική διαδικασία, η ντετερμινιστική συνιστώσα μπορεί να αντιστοιχεί σε μια χαμηλή, ακόμη και σε μη γραμμική και χαοτική δυναμική, αλλά η επίδρασή της μπορεί δύσκολα να παρατηρηθεί καθώς η παρατηρούμενη διαδικασία είναι οδηγούμενη από θόρυβο. Λόγω αυτού εστιάζουμε την προσοχή μας στο πρώτο πρόβλημα, δηλαδή αν η εξεταζόμενη χρονοσειρά είναι γραμμική ή μη γραμμική. Αυτό επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας την μέθοδο των αναδιαμορφομένων δεδομένων [119, 120].

Η μέθοδος των αναδιαμορφομένων δεδομένων περικλείει την παραγωγή ενός συνόλου από δεδομένων τα οποία συμφωνούν με μια μηδενική υπόθεση. Σύμφωνα με [120] η πρώτη μορφή της μηδενικής υπόθεσης είναι ο γραμμικά συσχετισμένος θόρυβος ο οποίος μιμείται την αρχική χρονοσειρά στους όρους της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, διασποράς, και μέσης τιμής. Η δεύτερη και πλέον γενική μορφή της μηδενικής υπόθεσης, υποθέτει ότι η παρατηρούμενη χρονοσειρά δύναται να είναι μια μη γραμμική μονοτονική στατική παραμόρφωση ενός στοχαστικού σήματος.

Κάθε Γκαουσιανή διαδικασία είναι γραμμική, ενώ μια μη Γκαουσιανή διαδικασία μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική. Μια πειραματική χρονοσειρά μπορεί να δείχνει μη γραμμικότητα, σε όρους μιας μη Γκαουσιανής διαδικασίας, η οποία μπορεί να οφείλεται σε ένα μη γραμμικό μετασχηματισμό μιας γραμμικής υποκείμενης δυναμικής. Σε αυτή την περίπτωση, τα παραγόμενα μη "γραμμικά"αναδιαμορφωμένα δεδομένα μιμούνται την αρχική χρονοσειρά στους όρους της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και της συνάρτησης πυκνότητας πυθανότητας. Είναι πάντοτε δυνατόν για μια μη περιοδική χρονοσειρά πεπερασμένου μήκους να είναι μια πραγματοποίηση μια διαδικασίας θορύβου ή μιας χαμηλοδιάστατης ντετερμινιστικής διαδικασίας. Άρα η διάκριση μιας μη γραμμικής ντετερμινιστικής διαδικασίας από μια γραμμική στοχαστική διαδικασία είναι ένα πρόβλημα στατιστικής. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε ως διακρίνουσα στατιστική μια ποσότητα Q παραγόμενη με μια μέθοδο ευαίσθητη στην μη γραμμικότητα, όπως είναι η διάσταση συσχέτισης. Η διακρίνουσα στατιστική Q υπολογίζεται για την αρχική χρονοσειρά και για τα αναδιαμορφωμένα δεδομένα και η μηδενική υπόθεση επιβεβαιώνεται η απορρίπτεται σύμφωνα με την τιμή της ποσότητας S

$$S = \frac{\mu_{obs} - \mu_{sur}}{\sigma_{sur}}$$

όπου μ_{sur} και σ_{sur} είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της Q για τα αναδιαμορφωμένα δεδομένα και μ_{obs} είναι η μέση τιμή της Q για τα αρχικά δεδομένα. Για μια μοναδική χρονοσειρά μ_{obs} είναι η μοναδική τιμή Q.

Όταν το S παίρνει τιμές μεγαλύτερες από *2-3* τότε η πιθανότητα ότι η παρατηρούμενη χρονοσειρά δεν ανήκει στην ίδια οικογένεια με τα αναδιαμορφωμένα δεδομένα της είναι μεγαλύτερη από *0.95-0.99* αντίστοιχα.

Για να ελέγξουμε την δεύτερη και πλέον γενική μηδενική υπόθεση που περιγράψαμε παραπάνω εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Theiler [120] όπως και τον αλγόριθμο των Schreiber και Schmitz [104]. Αμφότεροι οι αλγόριθμοι δημιουργούν στοχαστικά σήματα τα οποία έχουν την ίδια αυτοσυσχέτιση και συνάρτηση κατανομής με την αρχική χρονοσερά.

Σύμφωνα με τον πρώτο αλγόριθμο, πρώτα ένας λευκός θόρυβος με κατανομή Gauss αναδιατάσσεται ώστε να προσαρμόζεται στην τάξη της αρχικής χρονοσειράς. Στη συνέχεια οι φάσεις αυτού του σήματος τυχαιοποιούνται (ώστε να καταστραφεί οποιαδήποτε μη γραμμική δομή). Τελικά το αρχικό σήμα αναδιατάσσεται ώστε να προσαρμόζεται στην τάξη του παραπάνω δημιουργημένου έγχρωμου θορύβου (για να ξαναπάρουμε την αρχική κατανομή). Η παραγόμενη ανακατεμένη χρονοσειρά είναι η αναδιαμορφωμένη χρονοσειρά.

Ο αλγόριθμος του Theiler βελτιώθηκε από τους Schreiber και Schmitz με σκοπό τα αναδιαμορφωμένα δεδομένα να ταιριάζουν περισσότερο με την αρχική χρονοσειρά στην συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και τη συνάρτηση κατανομής. Αρχίζοντας με ένα σήμα λευκού θορύβου, τα πλάτη του κατά Fourier ανάλυση αντικαθιστώνται από τα αντίστοιχα πλάτη της αρχικής χρονοσειράς. Η τάξη κλίμακας του παραγόμενου στοχαστικού σήματος χρησιμοποιείται για την αναδιάταξη της αρχικής χρονοσειράς. Δια μέσου αυτής της αναδιάταξης, επιτυγχάνεται το ταίριασμα της συνάρτησης κατανομής, αλλά το ταίριασμα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης που επιτυγχάνεται στο πρώτο βήμα μεταβάλλεται. Εξ' αυτού η διαδικασία των δύο βημάτων επαναλαμβάνεται αρκετές φορές ώστε η προσαρμογή των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης να είναι το απαιτούμενη.

Ως ποσότητα Q μπορεί να χρησιμοποιηθούν χαρακτηριστικά μεγέθη των χαοτικών χρονοσειρών όπως είναι η διάσταση συσχέτισης, ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov και η προβλεπτικότητα. Επίσης νέες ποσότητες όπως η τυπική απόκλιση S_{dev}, το μήκος κλιμάκωσης L_{scal} και η αθροιστική απόκλιση των κλίσεων F_{dis} όπως ορίζονται στο μέρος Γ είναι περισσότερο ευαίσθητες από την διάσταση συσχέτισης όταν χρησιμοποιούνται ως διακρίνουσα στατιστική.

2.5 Η ανάλυση ιδιαζόντων τιμών (SVD) ως φίλτρο θορύβου

Μια χρονοσειρά μπορεί να αντιστοιχεί σε ένα χαμηλοδιάστατο σύστημα και να μην έχει χαμηλή διάσταση λόγω της ισχυρής παρουσίας θορύβου. Η ανάλυση ιδιαζόντων τιμών έχει αποδειχτεί ότι αποτελεί ισχυρό εργαλείο στην ανάλυση χρονοσειρών όταν χρησιμοποιείται σαν φίλτρο για τον καθαρισμό του σήματος από τον θόρυβο.

Έστω $\boldsymbol{X}$ ο πίνακας των διανυσμάτων της ανακατασκευασμένης τροχιάς, από μια παρατηρούμενη χρονοσειρά *x(t)*, στο χώρο φάσεων ενός δυναμικού συστήματος. Αν $\boldsymbol{c}_i$ $(i = 1,2 \ldots n)$ είναι τα ιδιοδυανύσματα του covariance matrix $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ της τροχιάς τότε μπορούμε να ανακατασκευάσουμε τον αρχικό πίνακα τροχιάς $\boldsymbol{X}$ από τη σχέση

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{X}\boldsymbol{c}_i)\boldsymbol{c}_i^T \tag{5.1}$$

Το μέρος του πίνακα τροχιάς που περιέχει όλη την πληροφορία για τη ντετερμινιστική συνιστώσα της τροχιάς αντιστοιχεί στον περιορισμένο πίνακα

$$\boldsymbol{X}_d = \sum_{i=1}^{n'} (\boldsymbol{X}\boldsymbol{c}_i)\boldsymbol{c}_i^T \tag{5.2}$$

που υπολογίζεται αθροίζοντας μόνο για τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{c}_i$ που αντιστοιχούν σε μη μηδενικές ιδιοτιμές.

Από την σχέση (5.1) μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την αρχική χρονοσειρά *x(t)* χρησιμοποιώντας *n* νέες χρονοσειρές *V(t)* σύμφωνα με την σχέση

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} V_i(t) \tag{5.3}$$

όπου κάθε $V_i(t)$ δίνεται από την πρώτη στήλη του πίνακα $(\boldsymbol{X}\boldsymbol{c}_i)\,\boldsymbol{c}_i^T$. Οι χρονοσειρές $V_i(t)$ είναι γνωστές ως SVD ανακατασκευασμένες συνιστώσες [36].

Η ανίχνευση εξωτερικού θορύβου μέσου της ανάλυσης SVD περιγράφεται από τους Broomhead and King (1986) για το λευκό θόρυβο και από τους Elsner and Tsonis [36] για τον έγχρωμο θόρυβο. Στην περίπτωση του λευκού θορύβου οι ιδιοτιμές $\{\sigma_i\}$ του πίνακα $\boldsymbol{X}$ μετατοπίζονται ομοιόμορφα σύμφωνα με την σχέση

$$\sigma_\iota^2 = \bar{\sigma}_\iota^2 + \left\langle \xi^2 \right\rangle \tag{5.4}$$

όπου $\bar{\sigma}_i$ είναι οι ιδιοτιμές του αδιατάραχτου σήματος και $<\xi^2>$ είναι η διαταραχή του συναλλοίωτος $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$. Η σχέση (5.4) δηλώνει ότι στην απλή περίπτωση του λευκού θορύβου η ύπαρξη ενός σταθερού μη μηδενικού υπόβαθρου ή επίπεδου θορύβου στο φάσμα των ιδιοτιμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διακρίνουμε την ντετερμινιστική συνιστώσα. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να πάρουμε την ντετερμινιστική συνιστώσα της παρατηρούμενης χρονοσειράς από την σχέση

$$\boldsymbol{X}_d = \sum_{\sigma_i \rangle noise} (\boldsymbol{X}\boldsymbol{c}_i)\boldsymbol{c}_i^T \tag{5.5}$$

όπου σ_i αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές πάνω από το υπόβαθρο θορύβου. Επίσης η παραπάνω σχέση (5.5) δείχνει ότι στην περίπτωση του λευκού θορύβου η διαταραχή των ιδιοτιμών είναι ανεξάρτητη από την τιμή τους.

Αντίθετα όπως δείχνεται στο μέρος Γ στην περίπτωση του έγχρωμου θορύβου η διαταραχή των ιδιοτιμών είναι κατά πολύ ισχυρότερη για την πρώτη ιδιοτιμή σ_1 σε σχέση με τις υπόλοιπες. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο δεδομένου ότι ο έγχρωμος θόρυβος περικλείει χαμηλής διάστασης ντετερμινισμό ενώ ο λευκός θόρυβος είναι ένα απειροδιάστατο σήμα. Η παραπάνω διαφορά μεταξύ λευκού και έγχρωμου θορύβου είναι σημαντική διότι κάνει την SVD ανάλυση ικανή να διακρίνει συνιστώσες του αρχικού σήματος με διαφορετική δυναμική.