

# ΡΥΠΑΝΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΥΔΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΥΘΙΣΜΕΝΗ ΕΞΑΠΛΩΣΗ ΛΥΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΘΕΡΜΟΚΛΙΝΗ ΘΑΛΑΣΣΙΑΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ

**Κωτσοβίνος Νικόλαος, Αγγελίδης Παναγιώτης**

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πολυτεχνική Σχολή, Δ.Π.Θ., Β. Σοφίας 12, Ξάνθη 67100,  
e-mails: [kotsovin@civil.duth.gr](mailto:kotsovin@civil.duth.gr), [pangelid@civil.duth.gr](mailto:pangelid@civil.duth.gr)

**KEYWORDS:** Βυθισμένη εξάπλωση, ρεύμα βαρύτητας, ακτίνα εξάπλωσης

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετάται η ρύπανση επιφανειακών υδάτων από τη διάθεση λυμάτων μέσω οπής διαχυτήρα, σε ακίνητο στρωματισμένο ως προς την πυκνότητα θαλάσσιο περιβάλλον. Η δημιουργούμενη αξισυμμετρική ροή ανέρχεται προς τα πάνω μέχρι το επίπεδο, που επιτρέπει η αρχική ορμή και η ασκούμενη ανωστική δύναμη, οπότε στη συνέχεια εξαπλώνεται βυθισμένα μέσα στη θάλασσα. Ακόμη και τα καλύτερα από τα διατιθέμενα σήμερα μοντέλα προσομοίωσης (CORMIX, VPLUMES, VISJET), αδυνατούν να προσομοιώσουν τη βυθισμένη αυτή εξάπλωση. Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται αναλυτικές εξισώσεις και νομογραφήματα για την πρόβλεψη της εξέλιξης με το χρόνο του πεδίου ρύπανσης με βάση τις αρχικές (γνωστές) παραμέτρους.

## SUBMERGED RADIAL INTRUSION OF WASTEWATER FIELD FROM A DIFFUSER IN A MOTIONLESS STRATIFIED SEA

**Kotsovinos Nikolas, Angelidis Panagiotis**

Department of Civil Engineering, School of Engineering, D.U.TH., V. Sofias 12, Xanthi 67100,  
e-mails: [kotsovin@civil.duth.gr](mailto:kotsovin@civil.duth.gr), [pangelid@civil.duth.gr](mailto:pangelid@civil.duth.gr)

**KEYWORDS:** Submerged radial intrusion, gravity current, spreading rate

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

The basic objective of this paper is to present dimensionless relationships for the growth of the radius of a patch of contaminated water resulting from a submerged intrusion. The flow from a sewage outfall in a stratified sea rises as high as its momentum and buoyancy will carry it, and then it spreads horizontally at its neutral level, forming an intruding axisymmetric gravity current (or patch or slug). It is well known that the available expert software which simulate the dispersion of pollutants (like CORMIX or VPLUMES) fail to give a prediction for this situation. In this paper we present ready to use equations and diagrams that can help the design engineer to estimate the radius of spreading of the submerged waste water field as a function of the time and the initial parameters.

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δημιουργούμενη αξισυμμετρική ροή μέσα σε στρωματισμένη θάλασσα, που προέρχεται από την οπή ενός διαχυτήρα, ανέρχεται προς τα πάνω, μέχρι το επίπεδο που επιτρέπει η αρχική ορμή και η ασκούμενη ανωστική δύναμη, οπότε στη συνέχεια εξαπλώνεται βυθισμένα μέσα στη θάλασσα, σχηματίζοντας ένα αξισυμμετρικό ρεύμα βαρύτητας. Ο υδραυλικός μηχανικός έχει στη διάθεσή του διάφορα μοντέλα για να υπολογίσει τα χαρακτηριστικά της δημιουργούμενης ανωστικής φλέβας (αραίωση, διερχόμενη παροχή, τερματικό ύψος) από την έξοδό της μέχρι το επίπεδο του τερματικού ύψους, όπως π.χ. το έμπειρο σύστημα CORMIX, τα μοντέλα VPLUMES και VISJET, καθώς και ημιεμπειρικές αδιάστατες εξισώσεις [1]. Ωστόσο με τα μοντέλα αυτά καθώς και με τις ημιεμπειρικές εξισώσεις δεν είναι δυνατό να προβλεφθεί η εξέλιξη της ακτίνας οριζόντιας βυθισμένης εξάπλωσης του δημιουργούμενου ρεύματος βαρύτητας, ως συνάρτησης του χρόνου. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση αδιάστατων εξισώσεων για την εξέλιξη της ακτίνας εξάπλωσης του πεδίου ρύπανσης, που δημιουργείται από τη διάθεση λυμάτων μέσω οπής σε στρωματισμένο περιβάλλον.

Τα μόνα διαθέσιμα πειραματικά αποτελέσματα που αναφέρονται σε ακτινική εξάπλωση σε στρωματισμένο περιβάλλον, που προέρχονται από συνεχή διάθεση παροχής μέσω οπής, είναι των: α) Zatselin and Shapiro [2], οι οποίοι μελέτησαν στρωτές ροές πλουμίων σε ακίνητο στρωματισμένο περιβάλλον και εξέτασαν μόνο τη μακρινή «ιξώδη» περιοχή, β) των Lemkert and Imberger [3], οι οποίοι διεξήγαγαν δύο σειρές πειραματικών μετρήσεων σε λίμνη στην κοντινή «αδρανειακή» περιοχή του πεδίου ακτινικής εξάπλωσης, και γ) του Kotsovinos [4], ο οποίος έκανε πειράματα με ένα μεγάλο εύρος μεταβολής αρχικών παραμέτρων και κάλυψε τόσο την κοντινή «αδρανειακή» περιοχή όσο και τη μακρινή «ιξώδη» περιοχή.

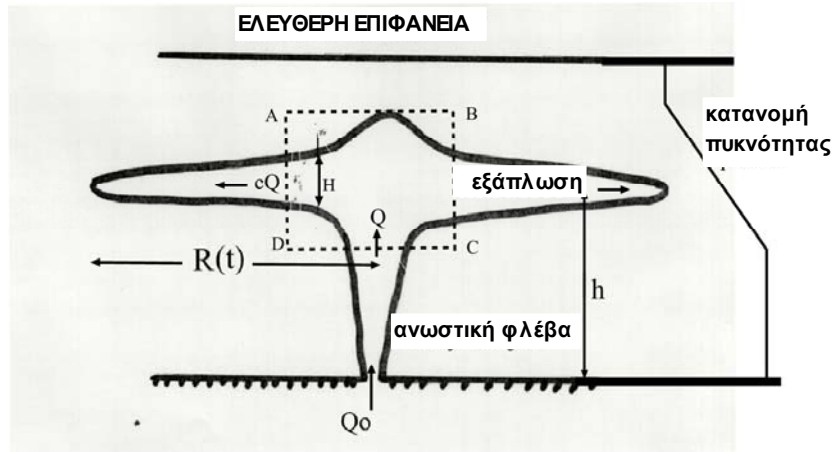
Η οριζόντια βυθισμένη ακτινική εξάπλωση σε στρωματισμένο περιβάλλον έχει μελετηθεί θεωρητικά από τους Chen [5], Zatselin and Shapiro [2], Ivey and Blake [6], Didden and Maxworthy [7], Lister and Kerr [8], Lemkert and Imberger [3], και Kotsovinos [4]. Όλοι αυτοί οι ερευνητές συμφωνούν, ότι για μεγάλους χρόνους υπάρχει μια ισορροπία ανάμεσα στις ασκούμενες στις δύο πλευρές του ρεύματος βαρύτητας διατμητικές (λόγω ιξώδους) δυνάμεις και στις ανωστικές (λόγω πίεσης) δυνάμεις και ότι σε αυτή την περιοχή η ακτίνα εξάπλωσης  $R(t)$  του ρεύματος βαρύτητας αυξάνει με το χρόνο  $t$  ανάλογα με το  $t^{1/2}$ .

Για μικρότερους χρόνους σημαντικές είναι οι αδρανειακές δυνάμεις και υπάρχει μια περιοχή, η οποία χαρακτηρίζεται από την ισορροπία αδρανειακών και ανωστικών (λόγω πίεσης) δυνάμεων και θεωρητικά αποδεικνύεται, ότι στην περιοχή αυτή η ακτίνα εξάπλωσης  $R(t) \sim t^m$ . Η τιμή του εκθέτη αυτού  $m$  στην τελευταία σχέση υπήρξε αντικείμενο διαφωνίας μεταξύ των παραπάνω ερευνητών. Ειδικότερα  $m=1/2$  σύμφωνα με τους Ivey and Blake [6],  $m=2/3$  σύμφωνα με τον Chen [5], και  $m=3/4$  σύμφωνα με τους Didden and Maxworthy [7]. Σαφώς οι προαναφερθείσες θεωρητικές προβλέψεις παρουσιάζουν ουσιαστική διαφοροποίηση αναφορικά με την τιμή του εκθέτη  $m$ . Ο Kotsovinos [4] παρουσίασε μια σειρά πειραματικών μετρήσεων συνοδευόμενη από θεωρητική επιβεβαίωση, σύμφωνα με τις οποίες ο σωστός ρυθμός αύξησης της ακτίνας εξάπλωσης στην κοντινή «αδρανειακή» περιοχή είναι  $R(t) \sim t^{3/4}$ . Οι πολύ ενδιαφέρουσες μετρήσεις πεδίου των Lemkert and Imberger [3] υποδεικνύουν μια τιμή  $m=0.72$ , που είναι πολύ κοντά στο  $3/4$ .

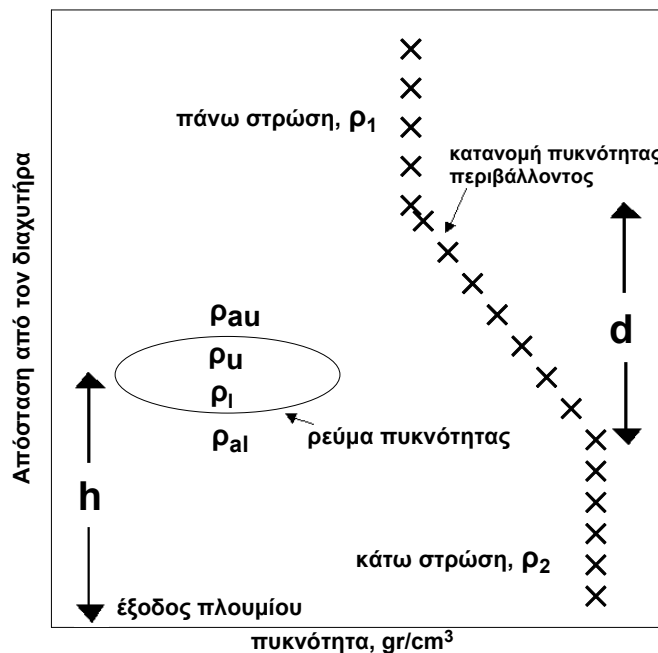
## 2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΚΤΙΝΑ ΕΞΑΠΛΩΣΗΣ

Το εξεταζόμενο πρόβλημα απεικονίζεται σχηματικά στα Σχήματα 1 και 2. Το περιβάλλον ρευστό είναι ακίνητο και στρωματισμένο ως προς την πυκνότητα. Υποτίθεται, ότι μια αξισυμμετρική ανωστική φλέβα ανέρχεται προς τα πάνω μέχρι το επίπεδο που η μεταφερόμενη ορμή και η ασκούμενη ανωστική δύναμη της επιτρέπουν, και στη συνέχεια εξαπλώνεται οριζόντια στο επίπεδο

του τερματικού της ύψους. Υποτίθεται, ότι το σχηματιζόμενο με τον τρόπο αυτό ρεύμα βαρύτητας είναι αξισυμμετρικό. Αυτό είναι ακριβές με την υπόθεση ακίνητου περιβάλλοντος και εκροή λυμάτων μόνο από μία κυκλική οπή. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη τα πολύ μεγάλα μήκη οριζόντιας εξάπλωσης, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα της παρούσας ανάλυσης και για οριζόντια βυθισμένη εξάπλωση, που δημιουργείται από εκροή μέσω διαχυτήρα.



Σχήμα 1. Σχηματική απεικόνιση ρεύματος βαρύτητας προερχόμενου από αξισυμμετρική ροή σε ακίνητο στρωματισμένο περιβάλλον.



Σχήμα 2. Τυπική κατανομή πυκνοτήτων οριζόντια εξαπλούμενου ρεύματος βαρύτητας. Με x συμβολίζεται η κατανομή πυκνότητας του περιβάλλοντος ρευστού.

Έστω ότι η παροχή της ανωστικής φλέβας στην έξοδό της είναι  $Q_0$ , η οποία αυξάνεται σε  $Q$  στο επίπεδο ουδέτερης ισορροπίας (τερματικό ύψος). Οι περισσότεροι από τους διαχυτήρες επιτυγχάνουν αραιώσεις της τάξεως του 300 έως 1000. Αυτό σημαίνει, ότι η παροχή που θα αρχίσει να εξαπλώνεται οριζόντια στο επίπεδο του τερματικού ύψους, θα είναι 300 έως 1000 φορές μεγαλύτερη από την αρχική παροχή διάθεσης από τον διαχυτήρα, δηλαδή πρόκειται για μια μεγάλη παροχή. Για παράδειγμα μια εξερχόμενη από τον διαχυτήρα αρχική παροχή λυμάτων της τάξεως των  $10 \text{ m}^3/\text{s}$  (πόλη της Αθήνας) δημιουργεί μια παροχή στο επίπεδο του τερματικού ύψους της τάξεως των  $3000 \text{ m}^3/\text{s}$ , η οποία είναι συγκρίσιμη με την πλημμυρική παροχή του ποταμού Νέστου.

Διακρίνονται δύο περιοχές: α) η περιοχή πρόσκρουσης, που περιλαμβάνεται σε έναν όγκο ABCD (Σχήμα 1), όπου η ροή είναι γενικά τυρβώδης και χαρακτηρίζεται από σημαντική εισροή από το περιβάλλον ρευστό· πρόκειται για την περιοχή μιας φλέβας που εξαπλώνεται ακτινικά, β) η κυρίως περιοχή οριζόντιας εξάπλωσης, που βρίσκεται έξω από τον όγκο ABCD. Κατά μέσο όρο, η εισροή από το περιβάλλον στον όγκο ABCD είναι ανάλογη της εισερχόμενης παροχής  $Q$ , και γενικά η ακτινικά εξερχόμενη από τον όγκο ABCD παροχή είναι  $cQ$ , όπου  $c$  είναι μια σταθερά μεγαλύτερη της μονάδας, που εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της ροής και της στρωμάτωσης πυκνότητας. Η σταθερά  $c$  τείνει στη μονάδα, όταν η ανωστική φλέβα φθάνει με πολύ μικρή κατακόρυφη ορμή στο επίπεδο ουδέτερης ανωστικότητας, και αυξάνει με την αύξηση της ορμής.

Εξαιτίας της μίξης στα όρια του εξαπλούμενου με τη μορφή σφήνας ρεύματος βαρύτητας είναι αναμενόμενο, ότι ο όγκος της σφήνας αυτής αυξάνεται και προσεγγιστικά μετά από χρόνο  $t$  δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\text{Όγκος ρεύματος βαρύτητας έξω από τον όγκο (ABCD)} \approx c Q t^{1+\alpha} \approx c Q (1+\alpha) t \quad (1)$$

όπου  $\alpha$  είναι μια παγκόσμια σταθερά, που ονομάζεται συντελεστής εισροής και που για τη βυθισμένη εξάπλωση είναι πολύ μικρότερη της μονάδας, δηλαδή  $\alpha \ll 1$ . Αν υποθεθεί, ότι οι τυπικές διαστάσεις της εξαπλούμενης σφήνας ρευστού κατακόρυφα και οριζόντια είναι  $H$  και  $R$  αντίστοιχα, τότε από την εξίσωση (1) προκύπτει:

$$HR^2 \approx Q t^{1+\alpha} \approx (1+\alpha) Q t \quad (2)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (1) και (2) υποθέτουν, ότι ο συντελεστής εισροής  $\alpha$  είναι μια παγκόσμια σταθερά, η οποία δίνει τον όγκο του εισρέοντος ρευστού ως σταθερό λόγο του όγκου της εξαπλούμενης σφήνας, δηλαδή ο συνολικός εισρέων όγκος σε χρόνο  $t$  ισούται με  $\alpha Q t$ .

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση της ορμής κατά την κατακόρυφη διεύθυνση επί του ρεύματος βαρύτητας, αγνοώντας τους όρους μικρής τάξεως, και υποθέτοντας ότι η πυκνότητα του ρευστού μέσα στην εξαπλούμενη σφήνα είναι σταθερή και ίση με  $\rho_s$ , προκύπτει (βλέπε [4]) η ακόλουθη σχέση μεταξύ των πυκνοτήτων περιβάλλοντος και εξαπλούμενου ρευστού:

$$\rho_s = (\rho_{al} + \rho_{au}) / 2 \quad (3)$$

όπου  $\rho_{au}$  και  $\rho_{al}$  είναι αντίστοιχα οι πυκνότητες στο περιβάλλον ρευστό στην πάνω και στην κάτω πλευρά της εξαπλούμενης σφήνας. Εφόσον το ρεύμα πυκνότητας είναι ουδέτερο από πλευράς ανωστικότητας στο τερματικό ύψος στο οποίο εξαπλώνεται οριζόντια, η ασκούμενη συμπίεση στην πάνω και κάτω πλευρά της εξαπλούμενης σφήνας από τις αντίστοιχες πιέσεις  $p_u$ ,  $p_l$  εξαναγκάζει τη σφήνα να εξαπλώνεται. Για γραμμική στρωμάτωση πυκνότητας στο περιβάλλον ρευστό και σταθερή πυκνότητα  $\rho_s$  μέσα στη σφήνα μπορεί να αποδειχτεί, ότι η πίεση μέσα στη σφήνα είναι μεγαλύτερη από την πίεση στο περιβάλλον ρευστό. Η ισορροπία των δυνάμεων που προκαλούν ή επιβραδύνουν την εξάπλωση του ρεύματος πυκνότητας καταδεικνύουν την ύπαρξη δύο βασικών περιοχών: α) της περιοχής «μικρών χρόνων», όπου η δύναμη λόγω πίεσης εξισορροπείται από την αδρανειακή δύναμη, και β) της περιοχής «μεγάλων χρόνων», όπου η δύναμη λόγω πίεσης εξισορροπείται από τη διατμητική δύναμη αντίστασης λόγω ιξώδους, που αναπτύσσεται στη διεπιφάνεια. Η επίδραση της δύναμης coriolis αγνοείται στην παρούσα μελέτη.

Για γραμμική κατανομή πυκνότητας περιβάλλοντος ρευστού και σταθερή πυκνότητα  $\rho_s$  μέσα στο ρεύμα πυκνότητας αποδεικνύεται, ότι η εσωτερική πίεση  $p_s$  είναι μεγαλύτερη από την εξωτερική

πίεση, και ως εκ τούτου η δύναμη  $F_p$  λόγω υπερβάλλουσας πίεσης κατά την οριζόντιο (συνήθως καλούμενη «άνωση»), που δημιουργεί την εξάπλωση, δίνεται από τη σχέση:

$$F_p = \rho' g H^2 R \quad (4)$$

όπου

$$\rho' = \frac{\rho_{ai} - \rho_{au}}{12} \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας (2), η δύναμη  $F_p$  λόγω πίεσης που δίνεται από την εξίσωση (4) γίνεται:

$$F_p = \rho' g Q^2 R^{-3} t^2 \quad (6)$$

Όπως προαναφέρθηκε, η δύναμη που προκαλεί τη ροή είναι η δύναμη  $F_p$  λόγω πίεσης. Οι δυνάμεις που ανθίστανται στη ροή είναι δύο: η αδρανειακή δύναμη στο εξαπλούμενο ρεύμα βαρύτητας  $F_i$  και η διατμητική δύναμη αντίστασης λόγω ιξώδους  $F_{sh}$ , που αναπτύσσεται λόγω διεύθυνσης του ρεύματος πυκνότητας. Η τάξη μεγέθους των δύο αυτών δυνάμεων είναι:

$$F_i = \text{ρυθμός μεταβολής της αδράνειας του εντός του ρεύματος βαρύτητας ρευστού} = O(\rho_s R^3 H t^{-2}) = O(\rho_s R Q t^{-1}) \quad (7)$$

$$F_{sh} = \text{δύναμη αντίστασης λόγω ιξώδους} = O(\mu U H^{-1} R^2) = O(\mu R^3 H^{-1} t^{-1}) = O(\mu R^5 Q^{-1} t^{-2}) \quad (8)$$

όπου  $\mu$  είναι το δυναμικό ιξώδες. Για να ακριβολογούμε η εξίσωση (8) ισχύει μόνο για στρωτή ροή. Ωστόσο μπορεί να εφαρμοστεί προσεγγιστικά και για την περίπτωση της τυρβώδους εξάπλωσης, αφού αντικατασταθεί το κινηματικό ιξώδες με το δυναμικό ιξώδες (βλέπε [3]).

Για τα περισσότερα πρακτικά προβλήματα διασποράς λυμάτων η αρχική ακτινική ορμή μπορεί να αγνοηθεί και συνεπώς ο ρυθμός εξάπλωσης ακολουθεί δύο περιοχές: την κοντινή «αδρανειακή» περιοχή και την μακρινή «ιξώδη» περιοχή (βλέπε [4]). Στην κοντινή «αδρανειακή» περιοχή η προκαλούσα την κίνηση δύναμη πίεσης είναι πολύ μεγαλύτερη από τη δύναμη λόγω ακτινικής ροής ορμής, και η επιβραδύνουσα την κίνηση δύναμη λόγω αδράνειας είναι πολύ μεγαλύτερη από τη διατμητική δύναμη αντίστασης λόγω ιξώδους. Συνεπώς υπάρχει μια ισορροπία της προκαλούσας την κίνηση δύναμης πίεσης  $F_p$  και της ανθιστάμενης αδρανειακής δύναμης  $F_i$ : δηλαδή  $F_p = F_i$ . Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (6) και (7) προκύπτει ότι:

$$R_3 = C_3 (\rho' g Q / \rho_s)^{1/4} t^{3/4} \quad (9)$$

όπου  $C_3$  είναι μια πειραματική σταθερά. Η πειραματική αυτή σταθερά σύμφωνα με τον Kotsovinos [4], όπου λήφθηκαν υπόψη πειραματικές μετρήσεις και άλλων ερευνητών [3], ισούται με 0.9. Η τελευταία εξίσωση ισχύει για  $t < T_{tr}$ , όπου  $T_{tr}$  είναι ο χρόνος κατά τον οποίο η εξάπλωση αλλάζει συμπεριφορά και μεταβαίνει από την κοντινή «αδρανειακή» περιοχή στη μακρινή «ιξώδη» περιοχή. Ο χρόνος αυτός θα προσδιοριστεί στη συνέχεια.

Για μεγάλους χρόνους, δηλαδή για  $t > T_{tr}$ , η εξάπλωση ελέγχεται από την ισορροπία των δυνάμεων λόγω πίεσης  $F_p$  και των διατμητικών δυνάμεων αντίστασης λόγω ιξώδους  $F_{sh}$ . Σε αυτή την περιοχή ισχύει  $F_p = F_{sh}$ . Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (6) και (8) προκύπτει για  $t > T_{tr}$ :

$$R_4 = C_4(\rho'gQ^3/\nu\rho_2)^{1/8}t^{1/2} \quad (10)$$

όπου  $C_4$  είναι μια πειραματική σταθερά. Σύμφωνα με τον Kotsovinos [4], που έλαβε υπόψη και τις πειραματικές μετρήσεις των Zatselin and Shapiro [2], για την πλειονότητα των πρακτικών προβλημάτων  $C_4 = 0.5$ .

Η συχνότητα Brunt – Vaissala, που εκφράζει τη βαθμίδα στρωμάτωσης, ορίζεται από τη σχέση:

$$N = \left[ \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 d} \right]^{1/2} = \left[ \frac{g(\rho_{al} - \rho_{au})}{\rho_2 H} \right]^{1/2} \quad (11)$$

όπου  $d$  είναι το πάχος της στρώσης με γραμμική κατανομή πυκνότητας εντός του οποίου λαμβάνει χώρα η βυθισμένη εξάπλωση (βλέπε Σχήμα 2), και  $H$  το ύψος της εξαπλούμενης σφήνας. Το μέσο ύψος του ρεύματος βαρύτητας δίνεται από την ακόλουθη σχέση (βλέπε Kotsovinos [4]):

$$H = 1.7 \frac{Q^{1/5} \nu^{1/5}}{N^{2/5}} \quad (12)$$

Συνεπώς συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5), (11) και (12) βρίσκουμε ότι η πυκνότητα  $\rho'$  η οποία απαιτείται για τον υπολογισμό της ακτίνας εξάπλωσης στις εξισώσεις (9) και (10) μπορεί να εκφραστεί από την ακόλουθη σχέση:

$$\rho' = \frac{\rho_2 N^2 H}{12g} = \frac{\rho_2 N^2}{12g} 1.7 \frac{Q^{1/5} \nu^{1/5}}{N^{2/5}} = 0.14 \frac{\rho_2 Q^{1/5} \nu^{1/5} N^{8/5}}{g} \quad (13)$$

Είναι προφανές, ότι το άνω όριο της πυκνότητας  $\rho'$  δίνεται από την εξίσωση:

$$\rho' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{12} \quad (14)$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την παραπάνω εξίσωση (13) στην εξίσωση (9), η οποία δίνει την ακτίνα εξάπλωσης για  $t < T_{tr}$  (κοντινή «αδρανεϊακή» περιοχή), και να παράγουμε μια εξίσωση που συνδέεται απευθείας με τις βασικές παραμέτρους του προβλήματος:

$$R_3 = 0.9 \left( \frac{\rho' g Q}{\rho_2} \right)^{1/4} t^{3/4} = 0.9 \left( 0.14 \frac{\rho_2 Q^{1/5} \nu^{1/5} N^{8/5}}{g} \right)^{1/4} \left( \frac{g Q}{\rho_2} \right)^{1/4} t^{3/4}$$

ή

$$R_3 = 0.55 \left( Q^{6/5} \nu^{1/5} N^{8/5} \right)^{1/4} t^{3/4} \quad \text{για } t < T_{tr} \quad (15)$$

Ομοίως αντικαθιστώντας την εξίσωση (13) στην εξίσωση (10), η οποία δίνει την ακτίνα εξάπλωσης για  $t > T_{tr}$  (μακρινή «ιξώδης» περιοχή), μπορούμε να παράγουμε μια αναλυτική σχέση, που συνδέεται απευθείας με τις βασικές παραμέτρους:

$$R_4 = 0.5(\rho'gQ^3/\nu\rho_2)^{1/8}t^{1/2} = 0.39 \frac{Q^{2/5} N^{1/5}}{\nu^{1/10}} t^{1/2} \quad \text{για } t > T_{tr} \quad (16)$$

### 3. ΧΡΟΝΟΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΕΞΑΠΛΩΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΟΝΤΙΝΗ «ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΗ» ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΤΗ ΜΑΚΡΙΝΗ «ΙΞΩΔΗ» ΠΕΡΙΟΧΗ

Ένα βασικό ερώτημα, που τίθεται, είναι σε ποιο χρόνο η οριζόντια βυθισμένη εξάπλωση αλλάζει συμπεριφορά και από την κοντινή «αδρανειακή» περιοχή μεταβαίνει στην μακρινή «ιξώδη» περιοχή. Με βάση διαστατική ανάλυση και τα πειραματικά αποτελέσματα του Kotsovinos [4] συμπεραίνουμε, ότι για τις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις, που ο αριθμός Reynolds είναι μεγάλος, η μεταβατική ακτίνα εξάπλωσης  $R_{tr}$  από την «αδρανειακή» στην ιξώδη περιοχή δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$R_{tr} = 0.12 \left[ \frac{Q^5}{(\rho'gv^3 / \rho_2)} \right]^{1/8} = 0.15 \left[ \frac{Q^3}{v^2N} \right]^{1/5} \quad (17)$$

Ο αντίστοιχος χρόνος  $T_{tr}$  μετάβασης από την «αδρανειακή» στην «ιξώδη» περιοχή δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$T_{tr} = 0.068 \left[ \frac{Q}{(\rho'gv / \rho_2)} \right]^{1/2} = 0.18 \left[ \frac{Q^2}{v^3N^4} \right]^{1/5} \quad (18)$$

Στα Σχήματα 3α και 3β, που ακολουθούν, έχουν σχεδιαστεί αντίστοιχα η μεταβατική ακτίνα εξάπλωσης  $R_{tr}$  και ο χρόνος  $T_{tr}$ , που αντιστοιχούν στη μετάβαση της εξάπλωσης από την «αδρανειακή» στην «ιξώδη» περιοχή, ως συναρτήσεις της παροχής και για διάφορες συχνότητες Brunt – Vaissala από  $N=0.01\text{sec}^{-1}$  έως  $0.25\text{sec}^{-1}$ .

### 4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΠΑΡΟΧΗΣ ΕΞΑΠΛΩΣΗΣ

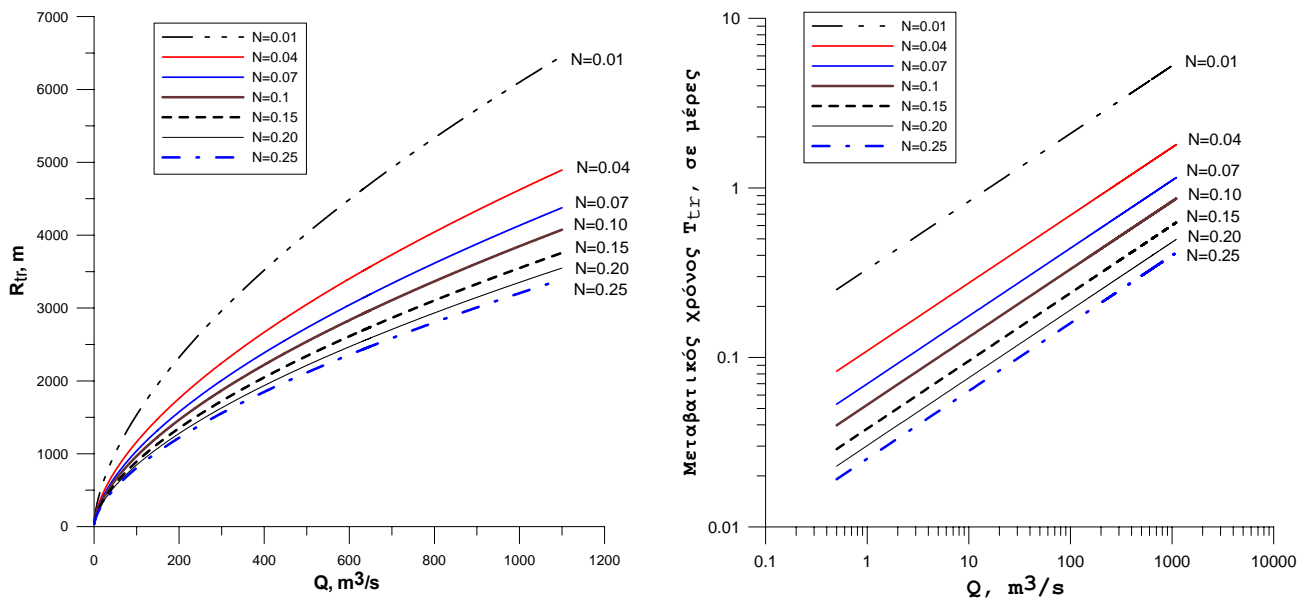
Οι εξισώσεις που προαναφέρθηκαν, αναφορικά με την ακτίνα εξάπλωσης, το μέσο ύψος στρώσεως του ρεύματος βαρύτητας, τον μεταβατικό χρόνο και τη μεταβατική ακτίνα αλλαγής συμπεριφοράς εξάπλωσης, ήταν συναρτήσεις της ακτινικά εξερχόμενης παροχής στο επίπεδο ουδέτερης ισορροπίας (τερματικού ύψους), η οποία εν γένει δεν είναι γνωστή. Στις πρακτικές εφαρμογές αυτά που είναι γνωστά είναι η παροχή διάθεσης  $Q_0$  μέσω του διαχυτήρα, η κατακόρυφη απόσταση  $h$  του διαχυτήρα από την πυκνοκλινή, και η κατανομή της πυκνότητας με το βάθος, όπως φαίνονται στα Σχήματα 1 και 2. Η παροχή  $Q$  στη βάση της πυκνοκλινούς μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση του έμπειρου συστήματος CORMIX, ή κάποιου άλλου μοντέλου. Για λόγους απλότητας, για την περίπτωση διάθεσης λυμάτων στη θάλασσα μέσω διαχυτήρα, μπορεί να υποθεθεί ότι η ροή είναι διδιάστατη, και συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη αναλυτική εξίσωση (βλέπε Kotsovinos [9]):

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{c_0}{1.4 C_M(x)} = 0.384 F_0^{2/3} \left( 0.83 + 0.106 \xi^{3/2} (1 + 0.253 \xi^{3/2})^{-1} \right) \xi^{1/2} (1 + 0.253 \xi^{3/2})^{1/3} \quad (19)$$

όπου

$$F_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2} gw}} \quad (20)$$

είναι ο αρχικός αριθμός Froude, που βασίζεται στο πλάτος ισοδύναμης σχισμής  $w$  του διαχυτήρα και



α)

β)

Σχήμα 3. α) Μεταβατική ακτίνα εξάπλωσης  $R_{tr}$  και β) μεταβατικός χρόνος  $T_{tr}$ , που αντιστοιχούν στη μετάβαση της εξάπλωσης από την «αδρανειακή» στην «ιξώδη» περιοχή, ως συναρτήσεις της παροχής και για διάφορες συχνότητες Brunt – Vaissala από  $N=0.01\text{sec}^{-1}$  έως  $0.25\text{sec}^{-1}$ .

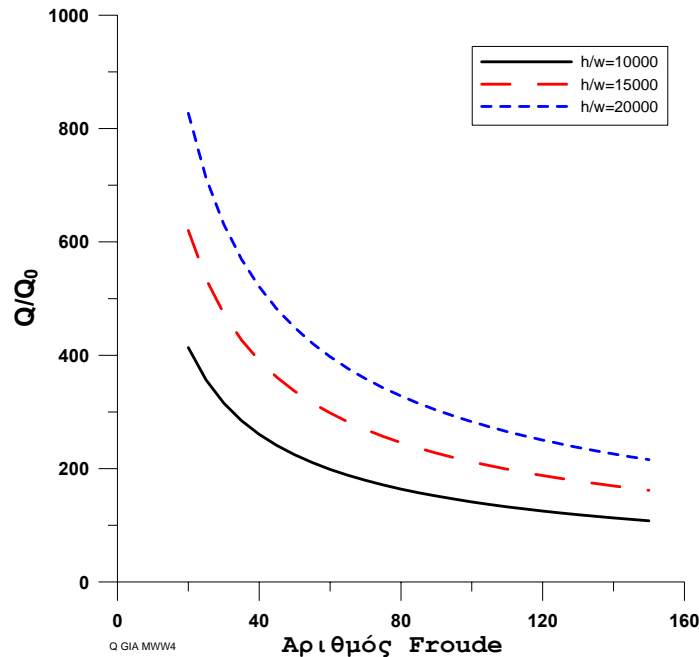
$$\xi = \left(\frac{h}{w}\right)F_0^{-4/3} \quad (21)$$

Το τυπικό πλάτος ισοδύναμης σχισμής για διάφορους διαχυτήρες μεταβάλλεται μεταξύ  $w=0.0015$  έως  $0.0030\text{m}$  (για παράδειγμα,  $w=0.002\text{m}$  για τον διαχυτήρα του Hyperion - Los Angeles,  $w=0.0015\text{m}$  για τον διαχυτήρα του San Diego – California,  $w=0.0014\text{m}$  για τον διαχυτήρα της Honolulu). Συνεπώς για μια τυπική τιμή  $h=30\text{m}$ , η αδιάστατη απόσταση  $h/w$  μεταβάλλεται μεταξύ 10000 και 20000. Πρέπει να σημειωθεί, ότι η παροχή  $Q$  που εξαπλώνεται βυθισμένα, είναι πολύ μεγαλύτερη από την αρχικώς διατιθέμενη μέσω του διαχυτήρα παροχή  $Q_0$ . Το γεγονός αυτό μπορεί να φανεί στο Σχήμα 4, όπου έχει σχεδιαστεί ο λόγος των παροχών  $Q/Q_0$  ως συνάρτηση του αρχικού αριθμού Froude και για διάφορες τιμές της αδιάστατης απόστασης  $h/w$ . Όπως προκύπτει από το Σχήμα 4, για μια παροχή  $1\text{ m}^3/\text{s}$  που διατίθεται μέσω ενός διαχυτήρα, σε απόσταση  $30\text{ m}$  από την πυκνοκλινή, και για μια τυπική αδιάστατη απόσταση  $h/w=30/0.002=15000$ , αρχικό αριθμό Froude  $F_{T0}=50$ , βρίσκουμε ότι η διερχόμενη παροχή από οριζόντιο επίπεδο στο κάτω όριο της πυκνοκλινούς είναι  $335\text{ m}^3/\text{s}$ .

## 5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

Ένας διαχυτήρας συνολικού μήκους  $90\text{m}$  διαθέτει τα λύματα ενός εργοστασίου βιολογικού καθαρισμού στη θάλασσα σε βάθος  $41\text{m}$ . Η αρχική πυκνότητα των λυμάτων είναι  $\rho_0=1.000\text{g}/\text{cm}^3$ , η αρχική παροχή είναι  $Q_0=0.6\text{m}^3/\text{s}$ , ο αριθμός οπών του διαχυτήρα είναι 60 και η διάμετρος τους  $0.064\text{m}$ . Η κατανομή πυκνότητας περιβάλλοντος είναι όμοια με του Σχήματος 2, όπου το κάτω ομοιόμορφο στρώμα έχει πυκνότητα  $\rho_2=1,0283\text{ g}/\text{cm}^3$  και ύψος  $20\text{m}$ . Το πάνω ομοιόμορφο στρώμα έχει πυκνότητα  $\rho_1=1,0265\text{ g}/\text{cm}^3$ , και η πυκνοκλινή έχει ύψος  $20\text{m}$ . Η συχνότητα Brunt – Vaissala από την εξίσωση 11 υπολογίζεται σε  $N=0.02930\text{ s}^{-1}$ . Το ισοδύναμο πλάτος σχισμής διδιάστατης ροής είναι  $w=0.0021\text{m}$ , ο αρχικός αριθμός Froude (εξίσωση 20) ισούται με 133.





Σχήμα 4. Η αδιάστατη εξαπλούμενη παροχή  $Q/Q_0$  ως συνάρτηση του αρχικού αριθμού Froude και του αδιάστατου βάθους  $h/w$ . Παρατηρείται, ότι η εξαπλούμενη παροχή είναι 100 έως 800 φορές μεγαλύτερη από τη διατιθέμενη μέσω του διαχυτήρα.

Από το Σχήμα 4, για αδιάστατη απόσταση  $h/w=20/0.0021=9524$  και για αριθμό Froude 133 μπορεί να υπολογισθεί ο λόγος των παροχών  $Q/Q_0=110$ . Συνεπώς η παροχή της φλέβας σε απόσταση 20m από το επίπεδο διάθεσης είναι:  $Q=110*Q_0=110*0.6=66\text{m}^3/\text{s}$ . Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε με τη χρήση της εξίσωσης 19:

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.384F_0^{2/3} \left( 0.83 + 0.106\xi^{3/2} (1 + 0.253\xi^{3/2})^{-1} \right) \xi^{1/2} (1 + 0.253\xi^{3/2})^{1/3} = 110.6 \Rightarrow Q = 66.36 \text{ m}^3 / \text{s}$$

όπου  $\xi=14$  (εξίσωση 21). Λόγω της αραιώσης κατά 110.6 φορές στη βάση της πυκνοκλινούς, η μέση πυκνότητα του πλουμίου στο επίπεδο αυτό είναι  $1.02804 \text{ g/cm}^3$ . Εντός της πυκνοκλινούς η πυκνότητα αυτή ( $1.02804 \text{ g/cm}^3$ ) συναντάται σε απόσταση 2.9 m από κάτω επίπεδό της. Συνεπώς σε μέγιστη κατακόρυφη απόσταση 2.9 m από το κάτω επίπεδο της πυκνοκλινούς θα σταματήσει να ασκείται ανωστική δύναμη (στην πραγματικότητα ποιο κάτω γιατί η μέση πυκνότητα του πλουμίου θα μειωθεί ακόμα περισσότερο εισερχόμενη στην πυκνοκλινή).

Το μέσο πάχος  $H$  του ρεύματος πυκνότητας για τη μακρινή ιξώδη περιοχή μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση 12:

$$H = 1.7 \frac{Q^{1/5} v^{1/5}}{N^{2/5}} = 1.0\text{m}$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (18) και (17) ο χρόνος μετάβασης  $T_{tr}$  από την «αδρανειακή» στην «ιξώδη» περιοχή και η αντίστοιχη μεταβατική ακτίνα  $R_{tr}$  ισούνται με:

$$T_{tr} = 0.18 \left[ \frac{Q^2}{v^3 N^4} \right]^{1/5} = 18 \text{ hr}$$

$$R_{tr} = 0.15 \left[ \frac{Q^3}{v^2 N} \right]^{1/5} = 946 \text{ m}$$

Οι παραπάνω τιμές των  $T_{tr}$  και  $R_{tr}$  μπορούν επίσης να υπολογιστούν από τα Σχήματα 3β και 3α. Η ακτίνα εξάπλωσης για τις δύο περιοχές αυξάνεται σύμφωνα με τις εξισώσεις 15 και 16, που για το παρόν παράδειγμα μπορεί να γραφεί ως:

$$R_3 = 23.64t^{0.75} \text{ (cm)} \quad \text{για} \quad t < 64646 \text{ s}$$

$$R_4 = 410.39t^{0.5} \text{ (cm)} \quad \text{για} \quad t > 64646 \text{ s}$$

Κάνοντας χρήση των τελευταίων εξισώσεων, η ακτίνα βυθισμένης εξάπλωσης  $R$  σε 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 60 και 100 ώρες από τον σχηματισμό της θα είναι αντίστοιχα 0.367, 0.618, 0.837, 1.101, 1.349, 1.457, 1.557, 1.907 και 2.462 km. Σε περίπου 17 και 69 μέρες η ακτίνα εξάπλωσης θα είναι 5 km και 10 km αντίστοιχα.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ανάλυση τάξεως μεγέθους δείχνει, ότι η οριζόντια βυθισμένη εξάπλωση ρεύματος βαρύτητας χαρακτηρίζεται γενικά από δύο περιοχές ανάλογα με το σχετικό μέγεθος των δυνάμεων, που προκαλούν ή επιβραδύνουν την εξάπλωση. Η δύναμη λόγω πίεσης (ανωστική) είναι η κυρίαρχη δύναμη, που οδηγεί τη ροή. Οι δυνάμεις, που κυρίως ανθίστανται, είναι στην κοντινή περιοχή η δύναμη αδράνειας και στη μακρινή περιοχή η διατμητική δύναμη λόγω ιξώδους. Μετά από θεωρητική ανάλυση και πειραματική επιβεβαίωση προτείνονται στην παρούσα εργασία αναλυτικές εξισώσεις για την ακτίνα εξάπλωσης του ρεύματος βαρύτητας στην κοντινή «αδρανειακή» περιοχή, στη μακρινή «ιξώδη» περιοχή καθώς και για τον μεταβατικό χρόνο αλλαγής συμπεριφοράς και για την αντιστοιχούσα μεταβατική ακτίνα εξάπλωσης. Οι εξισώσεις αυτές είναι χρήσιμες για τον υδραυλικό μηχανικό για τον υπολογισμό της συγκέντρωσης ρύπων, που έχουν το χαρακτηριστικό της απομείωσης με την πάροδο του χρόνου.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- List E.J (1982) "Turbulent jets and plumes", **Ann. Rev. Fluid Mech.**, Vol.14, pp.189-212.
- Zatsepin A.G. and G.I. Shapiro (1982) "A study of axisymmetric intrusions in a stratified fluid", **Izvestiya, Atmosph. and Ocean Physics**, Vol.18, pp.77-80.
- Lemkert C.J. and J. Imberger (1993) "Axisymmetric intrusive gravity currents in linearly stratified fluids", **J. Hydraulic Engineering, ASCE**, Vol.119, No 6, pp.662-679.
- Kotsovinos N.E. (2000) "Axisymmetric submerged intrusion in stratified fluid", **J. Hydraulic Engineering**, Vol.126, No 6, pp.446-456.
- Chen J.C. (1980) "**Studies on gravitational spreading currents**", Report No KH-40, Ph.D Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Ivey G.N. and S. Blake (1985) "Axisymmetric withdrawal and inflow in a density - stratified container", **J. Fluid Mech.**, Vol.161, pp.115-137.
- Didden N. and T. Maxworthy (1982) "The Viscous spreading of plane and axisymmetric gravity currents", **J. Fluid Mech.**, Vol.121, pp.27-42.
- Lister J.R. and R.C. Kerr (1989) "The propagation of two dimensional and axisymmetric gravity currents at a fluid interface", **J. Fluid Mech.**, Vol.203, pp.215-249.
- Kotsovinos N.E (1978) "Dilution in a vertical round buoyant jet", **J. Hyd. Div., ASCE**, Vol.104, pp.765-798.