ασαφής λογική

με εφαρμογές στις επιστήμες του μηχανικού

ΧΡΗΣΤΟΣ ΤΖΙΜΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΕΙ CD-ROM

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ασαφής λογική
με εφαρμογές στις επιστήμες του μηχανικού

fuzzy logic
with application in engineering

Χ. Τζιμόπουλος, Β. Παπαδόπουλος
Ch. Tzimopoulos, B. Papadopoulos

Θεσσαλονίκη 2013
Thessaloniki 2013

ISBN 978-960-456-385-2

Παραγωγή: Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 • e-mail: info@ziti.gr • www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ :
Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Η ασαφής λογική θεωρείται μια μορφή λογικής που αναπτύχθηκε το 1965 από τον Πέρση-Ρωσο-Αμερικανό Lotfi Zadeh. Σε αντίθεση με την Αριστοτέλεια ή κλασσική λογική, η οποία αποτελεί μια δίτιμη λογική, η ασαφής λογική είναι πλειονότιμη και οι μεταβλητές της παίρνουν άπειρες τιμές με ποσοστά αλήθειας που κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1. Η ασαφής λογική αναπτύχθηκε από την ανάγκη της επίλυσης πεπλεγμένων προβλημάτων και από το γεγονός ότι η φραστική επικοινωνία μεταξύ των ανθρώπων περιέχει μεγάλο ποσοστό ασάφειας, χωρίς αυτό να εμποδίζει την αλληλοκατανόησή τους. Η ανακρίβεια διέπει τις περισσότερες φυσικές διαδικασίες και όμως αποτελεί μια μορφή πληροφόρησης για τους ανθρώπους που τη χρησιμοποιούν στη μεταξύ τους επικοινωνία.

Η ασαφής λογική συγχέεται πολλές φορές με τη θεωρία πιθανοτήτων, αλλά στην πραγματικότητα αποτελούν δύο διαφορετικούς δρόμους για την έκφραση της αβεβαιότητας. Έτσι η μεν ασαφής λογική χρησιμοποιεί την έννοια της συνάρτησης συμμετοχής σε ένα ασαφές σύνολο, δηλαδή σε τι ποσοστό μια μεταβλητή ανήκει στο σύνολο, ενώ η θεωρία πιθανοτήτων χρησιμοποιεί την έννοια της υποκειμενικής πιθανότητας, δηλαδή πόσο πιθανό θεωρείται ότι μια μεταβλητή ανήκει σε ένα σύνολο.

Τα τελευταία χρόνια η επιστήμη της ασαφούς λογικής έχει κάνει τεράστιες προόδους και διδάσκεται σε πολλές χώρες της υφηλίου σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο, ενώ η εφαρμογή της έχει βρει πρόσφορο έδαφος σε πολλούς κλάδους των Μηχανικών Επιστημών. Η ανάγκη λοιπόν να γίνει γνωστή η ασαφής λογική ως εφαρμοσμένη επιστήμη στα Ελληνικά Πανεπιστήμια μας ώθησε στη συγγραφή του βιβλίου. Σε αυτό βοήθησε η φιλία και πολύχρονη συνεργασία μας, λόγω του κοινού ενδιαφέροντος στο αντικείμενο.

Το βιβλίο προορίζεται για φοιτητές των εφαρμοσμένων επιστημών σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο και περιέχει πολλά παραδείγματα με εφαρμογές. Περιλαμβάνει μια εισαγωγή και έξη κεφάλαια:

- Το πρώτο κεφάλαιο περιγράφει εισαγωγικές έννοιες της ασαφούς λογικής με βασικά θεωρήματα και αποδείξεις.

- Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στη γραμμική παλινδρόμιση σε ασαφές περιβάλλον με εφαρμογές σε προβλήματα κυκλοφορίας στους σιδηροδρόμους
- Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται σε συστήματα ασαφών κανόνων με εφαρμογές σε προβλήματα υδρολογίας και αρδευτικών δικτύων.
- Το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται σε λήψη απόφασης σε ασαφές περιβάλλον, με γραμμικό προγραμματισμό και μεθόδους πολυκριτηριακής ανάλυσης. Περιέχει εφαρμογές σε προβλήματα που αφορούν διαχείριση υδατικών πόρων.
- Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται στη σχέση κατάταξης σε ασαφές περιβάλλον. Εισάγει την έννοια της απόστασης στο περιβάλλον αυτό και εμπεριέχει πολλά παραδείγματα.
- Το έκτο κεφάλαιο αναφέρεται στις διαφορικές εξισώσεις σε ασαφές περιβάλλον, τόσο σε εξισώσεις με ολικές παραγώγους όσο και σε εξισώσεις με μερικές παραγώγους, με πολλά επίσης παραδείγματα.

Τα δύο πρώτα κεφάλαια γράφηκαν από τον Βασίλη Παπαδόπουλο, τα τέσσερα τελευταία από τον Χρήστο Τζιμόπουλο.

Θεσσαλονίκη 26-10-2013

Αφιερώνεται:

Στη σύζυγό και στα παιδιά μου	*Στην κόρη μου Μαργαρίτα*
Χρήστος Τζιμόπουλος	*Βασίλης Παπαδόπουλος*

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Ασαφής Λογική 1
Βιβλιογραφία 4

Κεφάλαιο 1. Κλασσικά σύνολα και προτασιακοί τύποι

1.1 Βασικοί ορισμοί κλασσικών συνόλων 9
- 1.1.1 Πράξεις κλασσικών συνόλων 11
- 1.1.2 Ιδιότητες των πράξεων κλασσικών συνόλων 14
- 1.1.3 Σύνολα φραγμένα άνω (supremum) και φραγμένα κάτω (infimum) 15
- 1.1.4 Προτασιακοί τύποι στην κλασσική λογική 16

1.2 Βασικοί ορισμοί ασαφών συνόλων 18
- 1.2.1 Ορισμός ασαφούς συνόλου 18
- 1.2.2 Πεδίο ορισμού ή στήριγμα ασαφούς συνόλου 24
- 1.2.3 Ειδική γραφή ασαφών συνόλων 24
- 1.2.4 Σχέση ασαφών συνόλων και συναρτήσεων πιθανότητας 25
- 1.2.5 Τετράγωνο του Kosko 26

1.3 Πράξεις στα ασαφή σύνολα 28
- 1.3.1 α-Τομές ασαφών συνόλων (Ισχυρά ασαφή σύνολα) 28
- 1.3.2 Πράξεις στα ασαφή σύνολα 31
- 1.3.3 Γραφική παράσταση των πράξεων 34
- 1.3.4 Ιδιότητες των ασαφών συνόλων 37
- 1.3.5 Ασαφής εντροπία και τετράγωνο του KOSKO 40
- 1.3.6 Ισότητα και εγκλεισμός των ασαφών συνόλων 43
- 1.3.7 Κυρτό ασαφές σύνολο 45

1.4 Βασικές αρχές της ασαφούς λογικής 46
- 1.4.1 Πρώτο θεώρημα αναπαράστασης-ανασύνθεσης 46
- 1.4.2 Καρτεσιανό γινόμενο ασαφών συνόλων 51
- 1.4.3 Η αρχή της επέκτασης 52

1.5 Ασαφείς αριθμοί – Ασαφείς τριγωνικοί αριθμοί 59
1.5.1 Ορισμός ασαφούς αριθμού 59
1.5.2 Ασαφείς τριγωνικοί αριθμοί 59
1.5.2.1 Γενικά 59
1.5.2.2 Διάστημα Εμπιστοσύνης-Επίπεδο προσδοκίας 60
1.5.2.3 Συμμετρία ενός αριθμού ως προς το 0 61
1.5.2.4 Αριθμητικές Πράξεις 62
1.5.3 Συναρτήσεις ασαφών αριθμών 68
1.5.3.1 Εισαγωγικά 68
1.5.3.2 Χώρος ομαλότητας 69
1.5.4 Παράγωγος συναρτήσεως ασαφών αριθμών 71
1.5.5 Τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις ασαφών αριθμών 74
1.5.6 Επίλυση γραμμικών ασαφών εξισώσεων και γραμμικών συστημάτων 74
1.5.6.1 Ασαφής γραμμική εξίσωση 74
1.5.6.2 Γραμμικά ασαφή συστήματα 78
1.6 Μέθοδος των ακραίων σημείων (Vertex Method) 83
1.6.1 Γενικότητες 83
1.6.2 Αριθμητικές πράξεις διαστημάτων 85
1.6.2.1 Μεταβλητές διαστημάτων και συναρτήσεις 86
1.6.3 Προσέγγιση των α-τομών με τη μέθοδο ακραίων τιμών 91
1.6.4 Αλγόριθμος της μεθόδου 92
1.6.5 Πρόγραμμα Vertex σε μορφή Visual Fortran 100
Βιβλιογραφία 105

Κεφάλαιο 2. Γραμμική παλινδρόμηση σε ασαφές περιβάλλον

2.1 Γραμμική παλινδρόμηση 109
2.1.1 Απλή και πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση 109
2.1.2 Χαρακτηριστικά της γραμμικής παλινδρόμησης 109
2.1.3 Ερμηνεία των συντελεστών των ανεξάρτητων μεταβλητών 110
2.1.4 Διεξαγωγή προβλέψεων 111
2.2 Ασαφής γραμμική παλινδρόμηση 112
2.2.1 Οι ασαφείς συμμετρικοί τριγωνικοί αριθμοί 112
2.2.2 Μεθοδολογία προσαρμογής ενός μοντέλου ασαφούς γραμμικής παλινδρόμησης 113
2.2.3 Παράδειγμα προσαρμογής ενός μοντέλου ασαφούς γραμμικής παλινδρόμησης 115

2.2.4 Πρόβλεψη μελλοντικής ζήτησης με τη μέθοδο της ασαφούς γραμμικής παλινδρόμησης 120
Βιβλιογραφία 121

Κεφάλαιο 3. Συστήματα ασαφών κανόνων

3.1 Εισαγωγή 125
3.2 Σύστημα ασαφών κανόνων 126
3.3 Σύνθεση ενός FRB 128
3.4 Τύποι συστημάτων κανόνων 129
3.5 Ιδιότητες συστήματος κανόνων 131
3.5.1 Πληρότητα (Completeness) 131
3.5.2 Πλεονασμός (Redundancy) 131
3.6 Μέγεθος συστήματος κανόνων 132
3.6.1 Μέθοδοι ελαχιστοποίησης του αριθμού των κανόνων 133
3.7 Κατασκευή ασαφών υποθέσεων (fuzzification) 134
3.7.1 Μέθοδοι κατασκευής συναρτήσεων συμμετοχής 136
3.7.2 Επικάλυψη 137
3.7.3 Μορφή συναρτήσεων συμμετοχής 138
3.8 Εισαγωγή των δεδομένων 139
3.9 Σύνδεση λεκτικών μεταβλητών 140
3.9.1 Προσδιορισμός του βαθμού ικανοποίησης ενός κανόνα 140
3.10 Λήψη της απόφασης 144
3.11 Συνάθροιση ασαφών αποκρίσεων 144
3.11.1 Ιδιότητες των μεθόδων συνάθροισης ασαφών αποκρίσεων 152
3.12 Διαδικασία αποσαφήνισης 153
3.12.1 Μέθοδοι αποσαφήνισης 154
3.12.2 Επιλογή της κατάλληλης μεθόδου 168
3.13 Κατασκευή συστήματος κανόνων 168
3.13.1 Σύνολο βαθμονόμησης (Training set) 169
3.13.2 Εκτίμηση του συστήματος των κανόνων 181
3.13.3 Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα 183
3.14 Ο αλγόριθμος Anfis 185
3.15 Εφαρμογές 188
3.15.1 Εφαρμογή της Anfis 188
3.15.2 Αρδευτικό δίκτυο 192

3.15.3 Εφαρμογή υπολογισμού βροχόπτωσης ... 195
3.15.3.1 Μία ασαφής υπόθεση ... 195
3.15.3.2 Δύο ασαφείς υποθέσεις ... 208
Βιβλιογραφία ... 212

Κεφάλαιο 4. Λήψη απόφασης σε ασαφές περιβάλλον

Απόφαση σε Ασαφές Περιβάλλον ... 219
4.1 Γραμμικός προγραμματισμός σε ασαφές περιβάλλον ... 227
4.1.I Περίπτωση ασαφούς αντικειμενικής συνάρτησης και ασαφών περιορισμών ... 227
4.1.II Περίπτωση σαφούς αντικειμενικής συνάρτησης και ασαφών περιορισμών ... 238
4.1.II.a Ακραία σημεία ασαφών συναρτήσεων ... 238
4.1.II.β Ορισμός ... 238
4.1.II.γ Μαθηματικό Μοντέλο ... 238
4.1.1 Η χρήση του παραμετρικού προγραμματισμού σε ασαφές γραμμικό περιβάλλον ... 246
4.1.1.I Παραμετρικός Προγραμματισμός (Chanas, 1983) ... 246
4.1.1.II Διαδραστικός ασαφής Γραμμικός Προγραμματισμός ... 252
4.2 Πολυκριτηριακή απόφαση σε ασαφές περιβάλλον ... 265
4.2. I Πολυκριτηριακή θεωρία χρησιμότητας (Maut) ή μέθοδοι βαθμολόγησης (Scoring methods) ... 265
4.2. II Συμβιβαστικές μέθοδοι (Compromising methods) ... 266
4.2. III Μέθοδοι υπεροχής (Outranking methods) ... 267
4.2.1 Πολυστοχική απόφαση (Multiple Objective Decision Making) ... 268
4.2.1.1 Το πρόβλημα μεγιστοποίησης μιας διανυσματικής συνάρτησης (Vectormaximum problem) ... 268
4.2.1.2 Ασαφής προσέγγιση-Ασαφής Γραμμικός Προγραμματισμός ... 269
4.2.2 Πολυχαρακτηριστική απόφαση (Multiple attribute decision making-MADM) ... 275
4.3 Μέθοδος του YAGER ... 276
4.3.1 1ο Μοντέλο του YAGER ... 279
4.3.1.1 Διαδικασία προσδιορισμού της εντάσεως του ενδιαφέροντος ... 280
4.3.2 2ο Μοντέλο του YAGER ... 288
4.3.2.1 Θεωρία συνόλων και λογική ... 288
4.3.2.2 Ένα μοντέλο με κανονική (ordinal) πληροφόρηση ... 290
4.3.2.3 Αριθμητική εφαρμογή ... 292

4.4 Συμβιβαστικός προγραμματισμός ... 295
4.4.1 Θεωρία της χρησιμότητας ... 295
4.4.1.1 Αξιώματα της σχέσης προτίμησης ... 296
4.4.2 Η μη κυριαρχία ... 299
4.4.2.1 Συμβολισμοί- Μητρώο απόφασης ... 300
4.4.2.2 Σύνθετες συναρτήσεις απόστασης ... 304
4.4.3 Συμβιβαστική λύση ... 306
4.4.4 Θεωρία του YAGER ... 308
4.4.5 Γενικά συμπεράσματα ... 320
4.4.5.1 Βασικά στοιχεία μεθόδου ... 320
4.4.5.2 Αναλυτική παρουσίαση του Συμβιβαστικού Προγραμματισμού ... 322
4.4.5.3 Εφαρμογή ... 324
4.4.6 Πρόγραμμα συμβιβαστικού προγραμματισμού ... 326
4.4.7 Ασαφής συμβιβαστικός προγραμματισμός ... 331
4.4.7.1 Ασαφείς βαθμολογίες και ασαφή βάρη ... 332
4.4.7.2 Αριθμητική εφαρμογή ... 335
4.4.8 Πρόγραμμα ασαφούς συμβιβαστικού προγραμματισμού ... 337
4.4.9 Σύνθετος συμβιβαστικός προγραμματισμός ... 343
4.4.10 Πρόγραμμα σύνθετου συμβιβαστικού προγραμματισμού ... 354
4.5 Η μέθοδος TOPSIS ... 363
4.5.1 Συμβατικοί αριθμοί ... 363
4.5.1.1 Γενικότητες ... 363
4.5.1.2 Μαθηματικό μοντέλο ... 364
4.5.1.2.1 Γενικότητες ... 364
4.5.1.2.2 Καμπύλες αδιαφορίας ... 367
4.5.1.2.3 Περιγραφή της μεθόδου ... 370
4.5.1.2.4 Εφαρμογή ... 372
4.5.1.3 Πρόγραμμα αρχικής μεθόδου TOPSIS ... 375
4.5.2 Υπολογισμός των βαρών ... 381
4.5.2.1 Γενικότητες ... 381
4.5.2.2 Τεχνικές αντικειμενικών βαρών ... 382
4.5.2.2.1 Κανονικές μέθοδοι ... 382
4.5.2.2.2 Μέθοδοι ιεραρχημένων βαρών ... 387
4.5.2.3 Προγράμματα τροποποιημένης μεθόδου TOPSIS ... 388
4.5.2.3.1 Πρώτο πρόγραμμα. Υπολογισμός των βαρών με τις μεθόδους Shannon, SD, MW και VC ... 389
4.5.2.3.2 Δεύτερο πρόγραμμα. Υπολογισμός των βαρών με τη μέθοδο CRITIC ... 399

4.5.3 Ασαφής μέθοδος TOPSIS ... 408
4.5.3.1 Γενικότητες ... 408
4.5.3.2 Κανονικοποίηση του μητρώου απόφασης ... 409
4.5.3.3 Κανονικοποίηση κατά Jahanshahloo et al., (2006) ... 410
4.5.3.4 Περιγραφή της μεθόδου ... 414
4.5.3.5 Αριθμητική εφαρμογή ... 415
4.5.3.5.1 Προγράμματα της ασαφούς μεθόδου TOPSIS ... 418
4.5.3.6 Μέθοδος της εντροπίας για τον προσδιορισμό των βαρών σε ασαφές περιβάλλον (Ding, 2011) ... 429
4.5.3.6.1 Γενικότητες ... 429
4.5.3.6.2 Εφαρμογή της μεθόδου του Shannon ... 430
4.5.3.6.3 Εφαρμογή ... 433
4.6 Η μέθοδος VIKOR ... 448
4.6.1 Συμβατικοί αριθμοί ... 448
4.6.1.1 Γενικότητες ... 448
4.6.1.2 Μαθηματικό μοντέλο ... 449
4.6.1.3 Εφαρμογή ... 453
4.6.1.4 Πρόγραμμα με τη συμβατική μέθοδο VIKOR ... 455
4.6.2 Ασαφής μέθοδος VIKOR-F ... 462
4.6.2.1 Γενικότητες ... 462
4.6.2.2 Μαθηματικό μοντέλο ... 462
4.6.2.3 Εφαρμογή ... 466
4.6.2.4 Πρόγραμμα με την ασαφή μέθοδο VIKOR ... 473
4.7 Η μέθοδος της σχετικής αναλογίας ... 483
4.7.1 Συμβατικοί αριθμοί ... 483
4.7.1.1 Γενικότητες ... 483
4.7.1.2 Μαθηματικό μοντέλο ... 484
4.7.1.3 Εφαρμογή ... 488
4.7.2 Ασαφής μέθοδος RR-F ... 489
4.7.2.1 Γενικότητες ... 489
4.7.2.2 Μαθηματικό μοντέλο ... 490
4.7.2.3 Εφαρμογή ... 491
Βιβλιογραφία ... 494

Κεφάλαιο 5. Κατάταξη

5.1 Σχέση κατάταξης σε ασαφή υποσύνολα ... 509
5.1.1 Εισαγωγή ... 509

5.1.2 Αναφορά στους JAIN, YAGER 509
5.1.2.1 Jain-Μεγιστοποιούν σύνολο-Συνάρτηση χρησιμότητας 509
5.1.2.2 Yager-Συνάρτηση κατάταξης 511
5.1.3 Μέθοδος του CHEN 514
5.1.3.1 Κατάταξη τριγωνικών ασαφών αριθμών 514
5.1.3.1.1 Υπολογισμός των τιμών κατάταξης $U_r(i)$ 516
5.1.3.2 Κατάταξη τραπεζοειδών ασαφών αριθμών 522
5.1.3.3 Κατάταξη τραπεζοειδών ασαφών αριθμών με παραβολικής μορφής τα πλαϊνά του τραπεζίου 523
5.1.4 Μέθοδος των LIOU και WANG. Ολοκληρωμένες τιμές με δείκτη βελτίστου 525
5.1.4.1 Γενικότητες 525
5.1.4.2 Βαθμός βέλτιστης απόφασης για τριγωνικούς αριθμούς 526
5.1.4.3 Βαθμός βέλτιστης απόφασης για τραπεζοειδείς αριθμούς 527
5.1.5 Μέθοδος του CHENG. Γεωμετρικό κέντρο 530
5.1.5.1 Γενικότητες 530
5.1.5.2 Τριγωνικοί αριθμοί 530
5.1.5.2.1 Υπολογισμός της συνάρτησης κατάταξης 532
5.1.5.2.2 Υπολογισμός της μεταβλητότητας σ^2 532
5.1.5.3 Τραπεζοειδείς αριθμοί 534
5.2 Απόσταση ασαφών αριθμών 535
5.2.1 Εισαγωγή 535
5.2.2 Γενικά μοντέλα 536
5.2.2.1 Μοντέλα γεωμετρικής απόστασης 536
5.2.2.2 Γενίκευση των μοντέλων γεωμετρικής απόστασης στα ασαφή υποσύνολα 536
5.2.2.3 Η μετρική του Hausdorff 537
5.2.2.4 Γενίκευση της μετρικής απόστασης Hausdorff στα ασαφή υποσύνολα 537
5.2.3 Συμβατική απόσταση μεταξύ ασαφών αριθμών 538
5.2.3.1 Μέτρηση της απόστασης κατά τους Kaufmann and Gupta 538
5.2.3.1.1 Γενικευμένοι ασαφείς αριθμοί 538
5.2.3.2 Μέτρηση της απόστασης κατά τον Liu 542
5.2.3.3 Μέτρηση της απόστασης κατά τους Yang and Ko 543
5.2.3.4 Μέτρηση της ασαφούς απόστασης κατά τον Heilpern 544
5.2.4 Ασαφής απόσταση μεταξύ ασαφών αριθμών 548
5.2.4.1 Μέτρηση της ασαφούς απόστασης κατά τον Voxman 548
5.2.4.2 Μέτρηση της ασαφούς απόστασης κατά τους Chen and Wang 549

5.2.4.3 Μέτρηση ασαφούς απόστασης κατά τους Chakraborty and Chakraborty και Guha and Chakraborty 551
5.2.4.4 Μέτρηση της ασαφούς απόστασης κατά τους Rouhparvar et al 556
Βιβλιογραφία 558

Κεφάλαιο 6. Διαφορικές εξισώσεις

6.1 Διαφορικές εξισώσεις με ολικές παραγώγους-αναλυτικές λύσεις 563
6.1.1 Γενικότητες 563
6.1.2 Θεωρία του SEIKKALA 563
6.1.2.1 Γενικότητες 563
6.1.2.2 Πρόβλημα αρχικής τιμής 564
6.1.3 Κανονική εξίσωση πρώτης τάξης με τη θεωρία των BF. Πρόβλημα αρχικής τιμής. 565
6.1.3.1 Εφαρμογές 567
6.1.4 Κανονική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης με αρχική συνθήκη 574
6.1.4.1 Κλασσική λύση $\tilde{Y}_c(t)$ 574
6.1.4.2 Λύση με βάση την αρχή της επέκτασης $\tilde{Y}_e$ 575
6.1.4.3 Πρόβλημα αρχικών τιμών 583
6.1.4.4 Πρόβλημα οριακών τιμών 585
6.1.4.5 Πρόβλημα οριακών τιμών 587
6.2 Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους – Αναλυτικές λύσεις 590
6.2.1 Θεωρία 590
6.2.1.1 Κλασσική λύση 590
6.2.1.2 Λύση με βάση την αρχή της επέκτασης 592
6.2.1.3 Εφαρμογή 592
6.3 Διαφορικές εξισώσεις με gH-γενικευμένη παράγωγο 597
6.3.1 Θεωρία 597
6.3.1.1 Εφαρμογές 600
6.4 Διαφορικές εξισώσεις με ολικές παραγώγους – Αριθμητικές λύσεις 603
6.4.1 Πρόβλημα του Cauchy 604
6.4.2 Εξίσωση της θερμότητας 611
6.4.2.1 Θεωρία 611
6.4.2.2 Εφαρμογή 616
Βιβλιογραφία 618

Ευρετήριο όρων 621

Εισαγωγή

Ασαφής λογική

Ορισμός

Η ασαφής λογική αποτελεί μια μορφή πλειονότιμης λογικής (επέκταση της Αριστοτέλειας λογικής) και προέρχεται από την ανάπτυξη της θεωρίας των ασαφών συνόλων του Lotfi Zadeh(1965), θεωρείται δε καλά δομημένη και προσεγγιστική σε περιβάλλον ασάφειας και αβεβαιότητας. Σε αντίθεση με την Αριστοτέλεια λογική(κλασσική λογική), στην οποίαν τα σύνολα έχουν δίτιμη λογική (δηλαδή μια λογική πρόταση μπορεί να πάρει δύο μόνο τιμές, αληθής-1 ή ψευδής-0), οι μεταβλητές της ασαφούς λογικής μπορούν να έχουν μια αληθινή τιμή που να κυμαίνεται σε ποσοστά αλήθειας μεταξύ 1 και 0. Όταν χρησιμοποιηθούν γλωσσικές μεταβλητές η ποσόστοση αυτή της αλήθειας παρουσιάζεται από ειδικές συναρτήσεις. Έτσι τα ασαφή σύνολα λειτουργούν σε περιβάλλον ασάφειας και αβεβαιότητας και δίνουν αποτελέσματα που έχουν νόημα για τον άνθρωπο, πλησιάζουν δηλαδή τον ανθρώπινο τρόπο σκέψης και έκφρασης.

Ιστορία

Η ακρίβεια της μαθηματικής επιστήμης οφείλει την επιτυχία της στις προσπάθειες του Αριστοτέλη και των φιλοσόφων που προηγήθηκαν για να δημιουργήσουν μια σύντομη θεωρία της λογικής και στη συνέχεια της μαθηματικής επιστήμης: «***Τους Νόμους της σκέψεως***». Εξ αυτών η αρχή του Αποκλειομένου Τρίτου του Αριστοτέλη ορίζει ότι κάθε πρόταση θα πρέπει να είναι αληθής ή ψευδής. Η παραπάνω αρχή προτάθηκε από τον Ελεάτη φιλόσοφο Παρμενίδη (Κάλφας και Ζωγραφίδης, 2006), το πρώτο μισό του 5^{ου} π.Χ. αιώνα, ενδεχόμενα σε απάντηση του Εφέσιου φιλοσόφου Ηράκλειτου, ο οποίος είχε προτείνει ότι μία πρόταση μπορεί να είναι ταυτόχρονα αληθής και μη αληθής. Ο Πλάτων στις αρχές του 4^{ου} π.χ. αιώνα αμφισβήτησε τον Παρμενίδη, θεωρώντας ότι υπάρχει και μια τρίτη περιοχή πέραν από το «αληθής ή ψευδής» και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ως ο πατέρας της ασαφούς λογικής. Πολλοί αμμερικανοί επιστήμονες (Kosko, 1993) θεωρούν ότι τα θεμέλια της ασαφούς λογικής ετέθησαν από τον

Βούδα τον $5^{ο}$ π.χ. αιώνα, ο οποίος ισχυρίστηκε ότι το κακό και το καλό συνυπάρχουν. Το 1920 ο Πολωνός Jean Lucasiewicz, περιέγραψε μια τρίτιμη λογική. Η τρίτη τιμή που πρότεινε μπορεί να διατυπωθεί ως «δυνατή» και ο Lucasiewicz τη συνέδεσε με μια αριθμητική τιμή μεταξύ του «αληθής ή ψευδής». Αργότερα ο ίδιος πρόσθεσε μια τετράτιμη και πεντάτιμη λογική, δηλώνοντας συγχρόνως ότι τίποτα δεν εμπόδιζε τη δημιουργία μια πλειονότιμης λογικής, αν και τελικά κατέληξε στην τετράτιμη λογική, διότι του φάνηκε ως καλύτερα προσαρμοσμένη στην Αριστοτέλεια λογική. Το 1965 ο Περσο-Ρώσσο-Αμερικανός Lotfi Zadeh, δημοσίευσε την πρωτοπόρα εργασία του "Fuzzy Sets", η οποία περιέγραφε τη μαθηματική λογική της θεωρίας των ασαφών συνόλων και κατ΄επέκταση της ασαφούς λογικής. Η λογική αυτή είναι πλειονότιμη και εισάγει τη συνάρτηση συμμετοχής ως ποσόστοση της αλήθειας μεταξύ των ακραίων τιμών «αληθής ή ψευδής» στην περιοχή των πραγματικών αριθμών [0, 1], αποτελεί δε μια γενίκευση της Αριστοτέλειας λογικής.

Φιλοσοφία

Η γνώση μας για τις περισσότερες φυσικές διαδικασίες στηρίζεται ως επί το πλείστον σε ανακριβείς ανθρώπινους συλλογισμούς. Η ανακρίβεια αυτή αποτελεί μια μορφή πληροφόρησης η οποία είναι χρήσιμη για τους ανθρώπους που χρησιμοποιούν την ασαφή λογική για την περίπτωση ιδίως δυσχερών και πεπλεγμένων προβλημάτων. Τα ανθρώπινα αυτά προβλήματα δεν μπορούν να συσχετιστούν με τα σημερινά μηχανικά συστήματα, στα οποία η επιστημονική σκέψη εξισώνει την κατανόηση του φαινομένου με την ικανότητα της ανάλυσης αυτού σε ποσοτικούς όρους. Η οποιαδήποτε μέχρι σήμερα προσπάθεια να εξομοιωθούν τα ανθρώπινα συστήματα με τα μηχανικά κατέληξε σε αποτυχία. Αυτό σημαίνει ότι οι συμβατικές ποσοτικές τεχνικές της ανάλυσης συστημάτων είναι εντελώς ακατάλληλες να προσομοιώσουν τα ανθρώπινα συστήματα και κατ᾽επέκταση οποιοδήποτε σύστημα με πολυπλοκότητα συγκρίσιμη με αυτή των ανθρωπίνων συστημάτων. Ο Zadeh το1973 εισάγει την ***αρχή της ασυμβατότητας*** με την οποία τονίζεται ιδιαίτερα η διαφορά αυτή: "*Όσο η πολυπλοκότητα ενός συστήματος αυξάνει, η ικανότητά μας να κάνουμε ακριβείς και σημαντικές παρατηρήσεις ως προς τη συμπεριφορά του μειώνεται μέχρι ενός ορίου, πέραν του οποίου η ακρίβεια και η σημαντικότητα γίνονται σχεδόν αμοιβαία αποκλειόμενα χαρακτηριστικά*". Αυτό σημαίνει ότι όσο πλησιέστερα προσεγγίζουμε ένα πραγματικό πρόβλημα, τόσο πιο ασαφής γίνεται η λύση του.

Οι παραδοσιακές λοιπόν τεχνικές της ανάλυσης συστημάτων δεν ταιριάζουν σωστά με τα ανθρώπινα συστήματα γιατί αποτυχαίνουν να συλλάβουν την ασάφεια της ανθρώπινης σκέψης και συμπεριφοράς. Για το λόγο αυτό στην ασαφή λογική εισάγονται προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν ένα μεθοδολογικό πλαίσιο ανεκτικό στην ανακρίβεια και στη μερική αλήθεια. Η προσέγγιση αυτή έχει τρία στοιχεία:

1. Χρησιμοποίηση των λεκτικών μεταβλητών στη θέση των αριθμητικών μεταβλητών.
2. Χαρακτηρισμός των απλών σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών με ασαφείς προτάσεις.
3. Χαρακτηρισμός των πεπλεγμένων σχέσεων με ασαφείς αλγορίθμους.

Χρήση

Αν και τα ασαφή συστήματα προτάθηκαν το 1965 από τον Αμερικανό Zadeh, οι Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής αγνόησαν επί μακρόν την εφαρμογή τους. Η πρώτη προσπάθεια εφαρμογής τους έγινε στην Αγγλία από τον Mandani (1976) και τους Eshragh and Mandani (1979) για τη δημιουργία συστημάτων ελέγχου στη Βιομηχανία. Ανάλογες προσπάθειες την ίδια εποχή έγιναν στη Δανία από τους καθηγητές Østergaard (1976) και Larsen (1980) για τη δημιουργία ασαφούς συστήματος ελέγχου σε κάμινο σιμέντου, ενώ στην Αγγλία ο Tong (1976) δημιούργησε για την British Steel Corporation, ένα αυτόματο ασαφές σύστημα ελέγχου στη διαδικασία παραγωγής χάλυβα. Οι Umbers and King (1980) έδωσαν μια πλήρη περιγραφή ενός ασαφούς συστήματος ελέγχου σε κάμινο σιμέντου στην Αγγλία, ενώ οι Sugeno (1985) και Lee (1990) περιέγραψαν ως εξής τις διάφορες χρήσεις της ασαφούς λογικής: *Αυτοκίνητα* (Tagaki and Sugeno,1983, Sugeno and Nishida, 1985), *Τραίνα* (Yasunobu et al, 1983, Yasunobu and Miyamoto, 1983), *Γερανοί* (Yasunobo and Hasegawa, 1986, Yasunobo and Hasegawa, 1987), *Αναβατώρια* (Fujitec, 1988), *Πυρηνικοί αντιδραστήρες* (Bernard, 1988), *Συστήματα ελέγχου Λογισμικού* (Yamakawa, 1986a, 1986b), *Μνήμες υπολογιστή* (Togai and Watanabe 1986, Togai and Chiu, 1987), *Υπολογιστές* (Yamakawa, 1987).

Μεγάλες εφαρμογές της ασαφούς λογικής έχουν επίσης υπάρξει στους επιστημονικούς κλάδους του Πολιτικού Μηχανικού: Εδαφομηχανική-Θεμελιώσεις, Οδοποιία, Υδραυλικά Έργα και Διαχείριση Υδραυλικών Έργων. Σήμερα η ασαφής λογική εφαρμόζεται πλέον σε πολλούς τομείς της επιστήμης: Μαθηματικά, Οικονομία, Στατιστική, Ιατρική, Βιολογία, Οικολογία, Γεωλογία κλπ.

Διάκριση από την θεωρία πιθανοτήτων

Η ασαφής λογική και η θεωρία πιθανοτήτων αποτελούν δύο διαφορετικούς δρόμους για την έκφραση της αβεβαιότητας. Αμφότερες χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν υποκειμενικά πιστεύω, αλλά η θεωρία των ασαφών συνόλων χρησιμοποιεί την έννοια της συνάρτησης συμμετοχής σε ένα ασαφές σύνολο (σε τι ποσοστό μια μεταβλητή ανήκει στο σύνολο), ενώ η θεωρία πιθανοτήτων χρησιμοποιεί την έννοια της υποκειμενικής πιθανότητας (πόσο πιθανόν θεωρείται ότι μια μεταβλητή ανήκει σε ένα σύνολο). Ενώ αυτή η διάκριση είναι ως επί το πλείστον φιλοσοφική, το προκύπτον ασαφές μέτρο δυνατότητας (possibility measure), είναι σαφώς διαφορετικό από το μέτρο πιθανότητας, και έτσι δεν είναι ευθέως ισοδύναμα.

Αμφότερες οι θεωρίες έχουν το ίδιο αριθμητικό εύρος εκτέλεσης και σε πρώτη όψη έχουν τις ίδιες τιμές: το 0 παριστάνει το ψευδές και το 1 παριστάνει το αληθές. Εν τούτοις η πιθανοτική προσέγγιση παρέχει την ερμηνεία «υπάρχει π.χ. πιθανότητα 80% ότι η Τζαίην είναι ηλικιωμένη», ενώ η ασαφής ορολογία αντιστοιχεί στο «το ποσοστό της συνάρτησης συμμετοχής της Τζαίην στο σύνολο των ηλικιωμένων είναι 0.8» Η διαφορά είναι σημαντική και αξιοσημείωτη. Η πρώτη άποψη υποθέτει ότι η Τζαίην είναι ή δεν είναι ηλικιωμένη, δηλαδή έχουμε μια πιθανότητα 80% να γνωρίζουμε ότι ανήκει στο σύνολο και 20% ότι δεν ανήκει. Απεναντίας η ασαφής ορολογία υποθέτει ότι η Τζαίην είναι ούτως ή άλλως ηλικιωμένη, με ποσοστό συμμετοχής 0.8.

Εν τούτοις ακόμη και σήμερα πολλοί στατιστικοί επηρεασμένοι από το έργο του Bruno de Finetti (1937, 1974), θεωρούν ότι μόνο ένα είδος μαθηματικής αβεβαιότητας χρειάζεται και επομένως η ασαφής λογική δεν είναι απαραίτητη. Στην αντίθετη πλευρά βρίσκεται ο Bart Kosko (1993, 1996), ο οποίος θεωρεί ότι η θεωρία πιθανοτήτων αποτελεί μια υποθεωρία της ασαφούς λογικής, εφόσον η θεωρία πιθανοτήτων διεξέρχεται μόνο ένα είδος ανακρίβειας και ο ίδιος ισχυρίζεται ότι έχει αποδείξει το θεώρημα του Bayes από την ιδέα της κάλυψης του ασαφούς υποσυνόλου (Fuzzy subset hood). Τέλος θα πρέπει να αναφερθεί ότι ο Zadeh (2003) αναφέρει ότι η θεωρία πιθανοτήτων και η ασαφής λογική είναι μάλλον συμπληρωματικές παρά ανταγωνιστικές και ότι υπάρχει ένας θεμελιώδης περιορισμός στο να στηριχθεί η θεωρία πιθανοτήτων στη δίτιμη λογική και θα έπρεπε να βασίζεται στην ασαφή λογική.

Βιβλιογραφία

Bernard J. A., 1988, “Use of rule-based system for process control”, IEEE Contr. Syst. Mag., 8, (5), 3-13.

Bruno de Finetti, 1937, “La Prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives,” Annales de l'Institut Henri Poincaré, 7, 1-68.

Bruno de Finetti, 1974, *Theory of Probability*, (translation by A Machi and AFM Smith) 2 volumes, New York: Wiley, 1974-5.

Eshragh F., Mandani E.H., 1979, “A general approach to linguistic approximation”, Int. J. Man-Machine Studies, 11, 501-519.

Fujitec F., 1988, “FLEX-8800 series group control system”, Fujitec Co. Ltd., Osaka, Japan.

Κάλφας Ε., Ζωγραφίδης Γ., 2006, «Αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι», Ινστιτούτο Νεοελληνικών Σπουδών, 302.

Kosko, B., 1993, “*Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic*”. Hyperion. ISBN 0-7868-8021-X.

Kosko, B., 1996, “*Fuzzy Engineering*”. Prentice Hall. ISBN 0-13-124991-6.

Larsen P. M., 1980, **“**Industrial applications of fuzzy logic control” Int. J. Man-Machine Studies , 12, 3-10

Lee, C.C., 1990, “Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller-Part I”, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, (20), 2, 404-418.

Łukasiewicz J., 1920, “O logice trójwartościowej” (in Polish). Ruch filozoficzny **5**:170–171. English translation: “On three-valued logic”, in L. Borkowski (ed.), *Selected works by Jan Łukasiewicz*, North–Holland, Amsterdam, 1970, pp. 87–88.

Mandani E.H.,1976, “Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers”, Int. J. Man-Machine Studies, 8, 669-678.

Østergaard, J. J. (1976). Fuzzy logic control of a heat exchanger process. Report No. 7601. Electrical Power Engineering Dept, Technical University of Denmark.

Sugeno M., 1985, “An Introductory survey of fuzzy control”, Information Sciences, 36, 59-83.

Sugeno M., Nishida, 1985, “Fuzzy control of model car”, Fuzzy sets and systems, 16, 103-113.

Tagaki T., Sugeno M., 1983, “Derivation of fuzzy control rules from human operator’s control action”, IFAC Symposium on fuzzy information, Knowledge Representation and Decision Analysis, Marseille.

Togai M., Watanabe H., 1986, “Expert system on a chip. An engine for real time approximate reasoning”, IEEE Expert. Syst. Mag., 1, 55-62.

Togai M., Chiu S., 1987, “A fuzzy accelerator and a programming environment for realtime fuzzy control”, Proc. 2nd IFSA Congress, Tokyo, Japan, July, 147-151.

Tong, R.M., 1976, “An assessment of a fuzzy control algorithm for a non-linear multivariable system”Proceedind of Workshop held at Queen CollegeUniversity of London, January.

Umbers I.G., King P.J., 1980, “An analysis of human decision-making in cement kiln control and the implication for automation”, Int. J. Man-Machine Studies, 12, 11-23.

Yamakawa T., 1986a, “High speed fuzzy controller harware system” Proc. 2nd Fuzzy system Symp., Japan, 122-130.

Yamakawa T., 1986b, “Fuzzy controller harware system” Proc. 2nd IFSA Congress, Tokyo, Japan, July.

Yamakawa T., 1987, “A simple fuzzy computer hardware system imploying min and max operations-A challenge to 6th generation computer”, Proc. 2nd IFSA Congress, Tokyo, Japan, July.

Yasunobu S., Miyamoto S., Ihara H., 1983, “Fuzzy control for automatic train operation system”, Proc. 4th IFAC/IFIC/IFORS Int. Congress on Control in Transportation Systems, Baden Baden, April.

Yasunobu S., Miyamoto S., 1983, “Automatic train operation by predictive fuzzy control”, Industrial Application of fuzzy control, M. Sugeno, Ed. Amsterdam: North-Holland, 1-18.

Yasunobo S., Hasegawa T., 1986, “Evaluation of an automatic container crane operation system based on predictive fuzzy control”, Control Theory Adv. Technol., 2, 419-432.

Yasunobo S., Hasegawa T., 1987, “Predictive fuzzy control and its application for automatic container crane operation system”, Proc. 2nd IFSA Congress, Tokyo, Japan, July, 349-352.

Yasunobo S., Sekino S., Hasegawa T., 1987, “Automatic train operation and automatic crane operation systems based on predictive fuzzy control”. Proc. 2nd IFSA Congress, Tokyo, Japan, July, 835-838.

Zadeh, L. , 1965, *“Fuzzy sets”,* Information and Control, 8(3):338-353.

Zadeh L., 1973, “Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes”, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-3, (1), 28-44.

Zadeh L., 2003, “Probability Theory & Fuzzy Logic”, LANL Uncertainty Quantification Working Group, Los Alamos National Laboratory, April 24, 1-160.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Κλασσικά σύνολα και προτασιακοί τύποι

1.1 Βασικοί ορισμοί κλασσικών συνόλων

Η θεωρία των ασαφών συνόλων αποτελεί μια επέκταση της θεωρίας των κλασσικών συνόλων (crisp set), οπότε η αναφορά στη θεωρία των κλασσικών συνόλων θεωρείται απαραίτητη για την κατανόηση των ασαφών συνόλων. Τα κλασσικά σύνολα έχουν σαφή όρια. Π.χ. το σύνολο των φοιτητών του Γ′ έτους Πολιτικών Μηχανικών του Πολυτεχνείου Ξάνθης είναι ένα κλασσικό σύνολο με σαφή όρια. Ένας οποιοσδήποτε φοιτητής του τμήματος αυτού ανήκει στο σύνολο αυτό ή δεν ανήκει.

Θεωρούμε ένα σύνολο αναφοράς Χ. Ένα υποσύνολο Α του Χ ($A \subset X$) είναι ένα σύνολο με στοιχεία του Χ. Κάθε υποσύνολο Α του Χ μπορεί να περιγραφεί με τους εξής τρόπους:

1. **Με αναγραφή των στοιχείων**, δηλαδή να αναγράφουμε όλα τα στοιχεία του Α ένα προς ένα.
2. **Με περιγραφή των στοιχείων**, δηλαδή να περιγράφουμε το σύνολο Α βασιζόμενοι σε ιδιότητες των στοιχείων του.

Παράδειγμα

Έστω $X = \mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, τότε το σύνολο των άρτιων αριθμών μεγαλύτερων του 3 και μικρότερων του 5 γράφεται με τους δύο παραπάνω τρόπους ως εξής:

$A = \{4\}$ (με αναγραφή των στοιχείων)

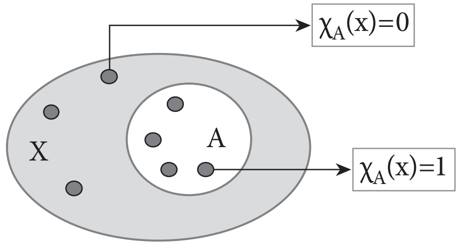
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 5\}$ (με περιγραφή των στοιχείων) ◆

Ένας άλλος τρόπος περιγραφής ενός υποσυνόλου Α του συνόλου αναφοράς Χ είναι με την χαρακτηριστική του συνάρτηση χ_A:

Σε κάθε υποσύνολο $A \subset X$ αντιστοιχούμε την χαρακτηριστική του συνάρτηση χ_A:

$$x \in X \;\rightarrow\; \chi_A \in \{0,1\} \quad ή \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & αν\ x \in A, \\ 0, & αν\ x \notin A. \end{cases}$$

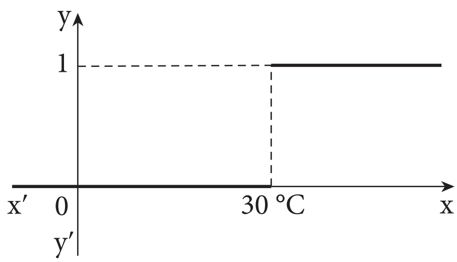
Η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου Α παίρνει την τιμή 1 εάν το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο Α και την τιμή 0 εάν δεν ανήκει. Μπορούμε να «ταυτίσουμε» το υποσύνολο $A \subset X$ με τη χαρακτηριστική του συναρτήση χ_A (όπως λέμε στην «αλγεβρική γλώσσα» υπάρχει ένας ισομορφισμός από το σύνολο των υποσυνόλων του Χ στο σύνολο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων).



Σχ. 1.1 Χαρακτηριστική συνάρτησης $\chi_A(x)$ ενός πραγματικού υποσυνόλου A.

Παραδείγματα:

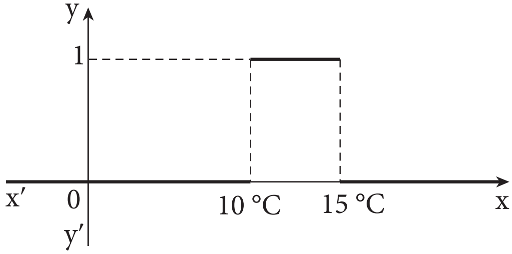
α) Το σύνολο των υψηλών θερμοκρασιών στην Ελλάδα:



Σχ. 1.2

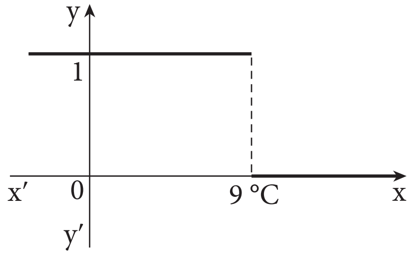
Δηλαδή πάνω από 30 °C θεωρούμε την θερμοκρασία υψηλή και κάτω από 30 °C τη θεωρούμε όχι υψηλή. Το παραπάνω σύνολο είναι **κοφτό,** αλλοιώς **κλασσικό ή συμβατικό**, (*crisp*). Δημιουργείται λοιπόν η απορία πως είναι δυνατόν η θερμοκρασία των 30 °C να θεωρείται υψηλή και η θερμοκρασία των 29 °C όχι ψηλή; Η εξήγηση δίνεται παρακάτω στη θεωρία των ασαφών αριθμών και συνόλων.

β) Το σύνολο των μέτριων θερμοκρασιών στην Ελλάδα:



Σχ. 1.3

γ) Το σύνολο των χαμηλών θερμοκρασιών στην Ελλάδα:



Σχ. 1.4

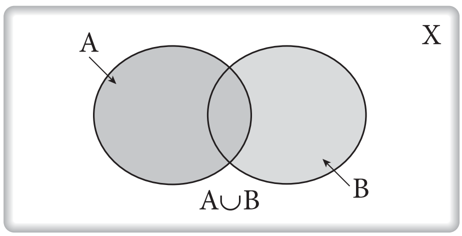
1.1.1 Πράξεις κλασσικών συνόλων

Αν $A \subset X$, $B \subset X$ τότε οι βασικές πράξεις των κλασσικών συνόλων είναι:

α) Η ένωση

Ως ένωση (union), των κλασσικών συνόλων A και B, ονομάζεται ένα νέο σύνολο **A∪B**, το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία τα οποία ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A και B:

$$\mathbf{A \cup B = \{x \in X: x \in A \ \ \text{ή} \ \ x \in B\}}$$



Σχ.1.5 Ένωση των συνόλων A και B.

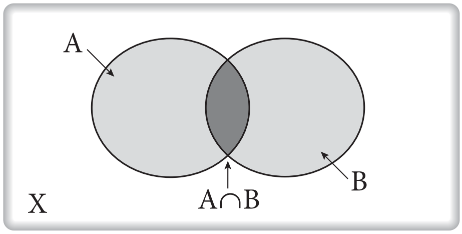
Στην περίπτωση της ένωσης δύο συνόλων A και B, το κάθε ένα από αυτά τα σύνολα αποτελεί υποσύνολο της ενώσεως τους, δηλαδή ισχύει η ακόλουθη έκφραση:

$$\mathbf{A \subset (A \cup B), \quad B \subset (A \cup B)}$$

β) Η τομή

Ως τομή (intersection), των κλασσικών συνόλων A και B, ονομάζεται ένα νέο σύνολο **A∩B**, το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία τα οποία ανήκουν συγχρόνως και στο A και στο B:

$$\mathbf{A \cap B = \{x \in X: x \in A \ \ \text{και} \ \ x \in B\}}$$



Σχ. 1.6 Τομή των συνόλων Α και Β.

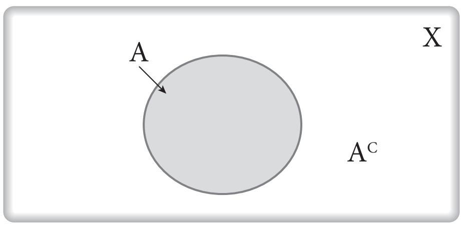
Στην περίπτωση της τομής δυο συνόλων Α και Β, το νέο σύνολο που προκύπτει αποτελεί υποσύνολο και των δυο συνόλων από τα οποία προήλθε, συνεπώς ισχύει:

$$\mathbf{(A \cap B) \subset A, \ \ (A \cup B) \subset B} \ .$$

γ) Το συμπλήρωμα

Το συμπλήρωμα A^C εμπεριέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου αναφοράς Χ, εκτός αυτών που ανήκουν στο σύνολο Α, δηλαδή:

$$\mathbf{A^C = \{x \in X : x \notin A\}}$$



Σχ.1.7 Το συμπλήρωμα A^C.

Από τα προηγούμενα προκύπτει:

- $\mathbf{A \cup A^C = X}$ που καλείται Αρχή του αποκλειομένου μέσου (The law of excluded middle) και
- $\mathbf{A \cap A^C = \varnothing}$ που καλείται Αρχή της αντίφασης (The law of contradiction). Όπου $\varnothing$ σημαίνει το κενό σύνολο.

Οι παραπάνω πράξεις με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών συναρτήσεων εκφράζονται με βάση την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση: Αν $A \subset X$, $B \subset X$,

χ_A = η χαρακτηριστική συνάρτηση του A,

χ_B = η χαρακτηριστική συνάρτηση του B,

$\chi_{A \cup B}$ = η χαρακτηριστική συνάρτηση του $A \cup B$,

$\chi_{A \cap B}$ = η χαρακτηριστική συνάρτηση του $A \cap B$ και

χ_{A^C} = η χαρακτηριστική συνάρτηση του A^C

τότε:

i) $\boldsymbol{\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}, x \in X}$

ii) $\boldsymbol{\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}, x \in X}$

iii) $\boldsymbol{\chi_{A^C}(x) = 1 - \chi_A(x)}$

Απόδειξη:

i) Έστω τυχαίο $x \in X$. Τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

– Αν $x \in A$ και $x \notin B$, τότε $\chi_A(x)=1$, $\chi_B(x)=0$ αλλά $x \in A \cup B$, δηλαδή $\chi_{A \cup B}(x)=1$
Άρα $\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$, γιατί $1 = \max\{1,0\}$

– Αν $x \notin A$ και $x \in B$, τότε $\chi_A(x)=0$, $\chi_B(x)=1$ αλλά $x \in A \cup B$, δηλαδή $\chi_{A \cup B}(x)=1$
Άρα $\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$, γιατί $1 = \max\{1,0\}$

– Αν $x \in A$ και $x \in B$, τότε $\chi_A(x)=1$, $\chi_B(x)=1$ αλλά $x \in A \cup B$, δηλαδή $\chi_{A \cup B}(x)=1$
Άρα $\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$, γιατί $1 = \max\{1,1\}$

– Αν $x \notin A$ και $x \notin B$, τότε $\chi_A(x)=0$, $\chi_B(x)=0$ αλλά $x \notin A \cup B$, δηλαδή $\chi_{A \cup B}(x)=0$
Άρα $\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$

Τελικά σε κάθε περίπτωση ισχύει $\boldsymbol{\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}}$

ii) Έστω τυχαίο $x \in X$. Τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

– Αν $x \in A$ και $x \notin B$, τότε $\chi_A(x)=1$, $\chi_B(x)=0$ άρα $\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}=0$
Αλλά $x \notin A \cap B \Rightarrow \chi_{A \cap B}(x)=0$. Άρα $\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$

– Αν $x \notin A$ και $x \in B$, τότε $\chi_A(x)=0$, $\chi_B(x)=1$ άρα $\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}=0$
Αλλά $x \notin A \cap B \Rightarrow \chi_{A \cap B}(x)=0$. Άρα $\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$

– Αν $x \in A$ και $x \in B$, τότε $\chi_A(x)=1$, $\chi_B(x)=1$ άρα $\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}=1$
Αλλά $x \in A \cap B \Rightarrow \chi_{A \cap B}(x)=1$. Άρα $\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$

– Αν $x \notin A$ και $x \notin B$, τότε $\chi_A(x)=0$, $\chi_B(x)=0$ άρα $\min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}=0$
Αλλά $x \notin A \cap B \Rightarrow \chi_{A \cap B}(x)=0$. Άρα $\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$

Τελικά σε κάθε περίπτωση ισχύει $\boldsymbol{\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}}$

iii) Έστω τυχαίο $x \in X$. Τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $x \in A$, τότε $x \notin A^C$
  Άρα $\chi_A(x)=1$ και $\chi_{A^C}(x)=0$,
  Οπότε ισχύει $\boldsymbol{\chi_{A^C}(x) = 1 - \chi_A(x)}$
- Αν $x \notin A$, τότε $x \in A^C$
  Άρα $\chi_A(x)=0$ και $\chi_{A^C}(x)=1$,
  Οπότε ισχύει $\boldsymbol{\chi_{A^C}(x) = 1 - \chi_A(x)}$

Όλοι οι παραπάνω χαρακτηρισμοί θα μας είναι πολύ χρήσιμοι παρακάτω για την γενίκευση των πράξεων στην περίπτωση των ασαφών συνόλων.

1.1.2 Ιδιότητες των πράξεων κλασσικών συνόλων

Έστω X ένα σύνολο αναφοράς και $A \subset X$, $B \subset X$, $\Gamma \subset X$.

Τότε:

I.	$\mathbf{A \cup B = B \cup A}$	(αντιμεταθετικότητα της ένωσης)
II.	$\mathbf{(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)}$	(προσεταιριστικότητα της ένωσης)
III.	$\mathbf{A \cup \varnothing = A}$	(απορροφητικότητα (Identity))
IV.	$\mathbf{A \cup A = A}$, $\mathbf{A \cap A = A}$	
V.	$\mathbf{A \cup A^C = X}$	(αρχή του αποκλειόμενου τρίτου)
VI.	$\mathbf{A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B}$	
VII.	$\mathbf{A \cap B = B \cap A}$	(αντιμεταθετικότητα της τομής)
VIII.	$\mathbf{(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)}$	(προσεταιριστικότητα της τομής)
IX.	$\mathbf{A \cap \varnothing = A}$	(απορροφητικότητα (Identity))
X.	$\mathbf{(A \cup B)^C = A^C \cap} B^\mathbf{C}$	(αρχές του De Morgan)
XI.	$\mathbf{(A \cap B)^C = A^C \cup B^C}$	(αρχές του De Morgan)
XII.	$\mathbf{A \cap A^C = \varnothing}$	(αρχή της αντίφασης)
XIII.	$\mathbf{A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)}$	(επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση)
XIV.	$\mathbf{A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)}$	(επιμεριστική ιδιότητα της ένωσης ως προς την τομή)

Δίνουμε έμφαση στην αρχή της αντίφασης και στην αρχή του αποκλειόμενου τρίτου:

α) **Αρχή της αντίφασης $A \cap A^C = \varnothing$,** δηλαδή δεν μπορεί ένα στοιχείο να ανήκει στο A και να μην ανήκει σ' αυτό, ή χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των πιθανοτήτων δεν μπορεί κάτι να συμβαίνει και να μην συμβαίνει.

β) **Αρχή του αποκλειόμενου τρίτου $A \cup A^C = X$,** σημαίνει ότι το τυχόν $x \in X$ ανήκει στο A ή (αποκλειστικά) στο A^C , ή χρησιμοποιώντας πιθανοθεωρητική γλώσσα συμβαίνει πάντα ή το A ή το A^C.

Θα δούμε ότι **στην περίπτωση των ασαφών συνόλων δεν ισχύουν οι δύο παραπάνω αρχές**.

1.1.3 Σύνολα φραγμένα άνω (supremum) και φραγμένα κάτω (infimum)

Έστω $A \subset \mathbb{R}$.

- **Το A λέγεται φραγμένο άνω αν υπάρχει $k \in \mathbb{R}$, ώστε $\alpha \le k$, $\forall \alpha \in A$.**
- **Το A λέγεται φραγμένο κάτω αν υπάρχει $\ell \in \mathbb{R}$, ώστε $\alpha \ge \ell$, $\forall \alpha \in A$.**

Είναι γνωστό το εξής ***θεώρημα***:

Θεώρημα:

Αν A είναι φραγμένο άνω τότε υπάρχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα που λέγεται supremum του A και συμβολίζεται με supA (προφανώς αν το A είναι πεπερασμένο τότε supA=maxA).

Άρα ένας αριθμός k είναι το supA, δηλαδή $k = \sup A$ **αν:**

$\alpha \le k$, $\forall\ \alpha \in A$ και

$\forall\ \varepsilon > 0$, υπάρχει $\alpha \in A$, $\alpha + \varepsilon > k$

Όμοια

Θεώρημα:

Αν το A είναι φραγμένο κάτω υπάρχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα που λέγεται infimum και συμβολίζεται με infA και έχει τις δυϊκές από τις παραπάνω ιδιότητες του supremum.

Άρα ένας αριθμός ℓ είναι το infA, δηλαδή $\ell = \inf A$ **αν:**

$\alpha \ge \ell$, $\forall\ \alpha \in A$ και

$\forall\ \varepsilon > 0$, υπάρχει $\alpha \in A$, $\alpha - \varepsilon < \ell$

Π.χ. εάν Α=(0, 1)τότε supA=1, infA=0.

εάν Α=(0, 1]τότε supA=maxA=1, infA=0.

1.1.4 Προτασιακοί τύποι στην κλασσική λογική

Κάθε πρόταση στην κλασσική μαθηματική λογική (Τζουβάρας, 1998, Παπαδόπουλος, 2006,) έχει δύο τιμές αλήθειας 0 ή 1 (ψευδές F ή αληθές T). Αν p, q είναι δύο προτάσεις τότε ορίζονται ως εξής:

α) Η διάζευξη ∨

Η p∨q συμβολίζει την *διάζευξη* δύο προτάσεων με τιμές αλήθειας:

Πίνακας 1.1

p	q	p ∨ q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Με άλλα λόγια η p∨q είναι αληθής αν η μία απ’ τις δύο είναι αληθής.

$$\mathbf{p \vee q = max\ \{p, q\}}$$

Παράδειγμα: Αν p: ο αριθμός 2 είναι πρώτος (T)

q: ο αριθμός 10 είναι πολλαπλάσιο του 3 (F)

Τότε:

p∨q: ο 2 είναι πρώτος ή το 10 είναι πολλαπλάσιο του 3 έχει τιμή αλήθειας 1. ◆

β) Η σύζευξη ∧

Η p∧q συμβολίζει την *σύζευξη* δύο προτάσεων με τιμές αλήθειας:

Πίνακας 1.2

p	q	p ∧ q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Δηλαδή η σύζευξη δύο προτάσεων είναι αληθής αν και μόνο αν οι δύο προτάσεις είναι αληθείς.

$$\mathbf{p \wedge q = \min\{p, q\}}$$

Παράδειγμα: Αν p: η αντοχή του κτιρίου είναι ικανοποιητική είναι αληθής (T)
q: το υπέδαφος είναι αργιλώδες είναι αληθής (T)

Τότε:

$p \wedge q$: η αντοχή του κτιρίου είναι ικανοποιητική και το υπέδαφος είναι αργιλώδες έχει τιμή αλήθειας 1. ◆

γ) Η άρνηση

Με **~**(ή ¬)**p** συμβολίζουμε την *άρνηση* της πρότασης p με τιμές αλήθειας:

Πίνακας 1.3

p	~p
0	1
1	0

Παράδειγμα: Αν p: η βροχόπτωση στην Ξάνθη κατά τον μήνα Ιούλιο είναι μεγαλύτερη από 20 mm είναι ψευδής (F).

Τότε:

~p: η βροχόπτωση στην Ξάνθη κατά τον μήνα Ιούλιο είναι μικρότερη ή ίση από 20 mm είναι αληθής. ◆

δ) Η συνεπαγωγή

Έστω p, q δύο προτάσεις. Με $p \Rightarrow q$ εννοούμε ότι η p συνεπάγεται την q.

Ορίζουμε την $\mathbf{p \Rightarrow q = {\sim}p \vee q}$

Αυτό σημαίνει ότι για να βρούμε τον πίνακα αλήθειας του $p \Rightarrow q$ αρκεί να βρούμε τον πίνακα αλήθειας της ~(ή ¬)$p \vee q$:

Πίνακας 1.4

P	q	~p	~p∨q
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Άρα οι τιμές αλήθειας της $p \Rightarrow q$ είναι :

Πίνακας 1.5

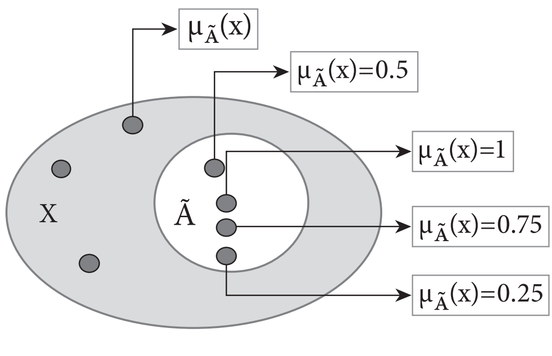
P	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι αληθής πάντα εκτός της περίπτωσης που η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής.

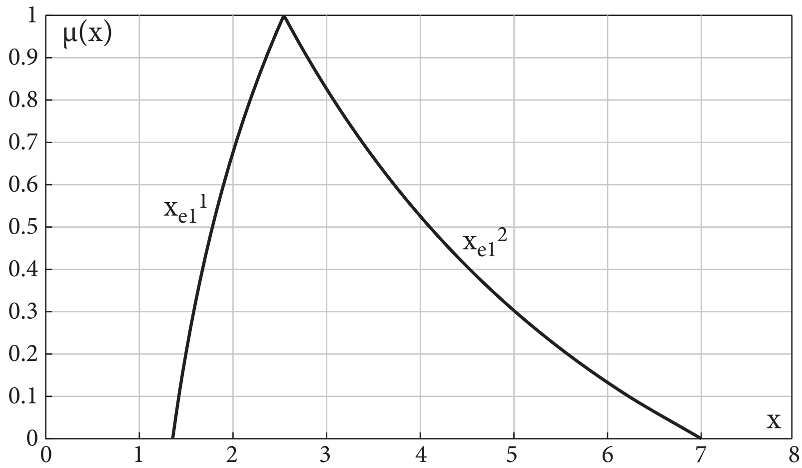
1.2 Βασικοί ορισμοί ασαφών συνόλων

1.2.1 Ορισμός ασαφούς συνόλου

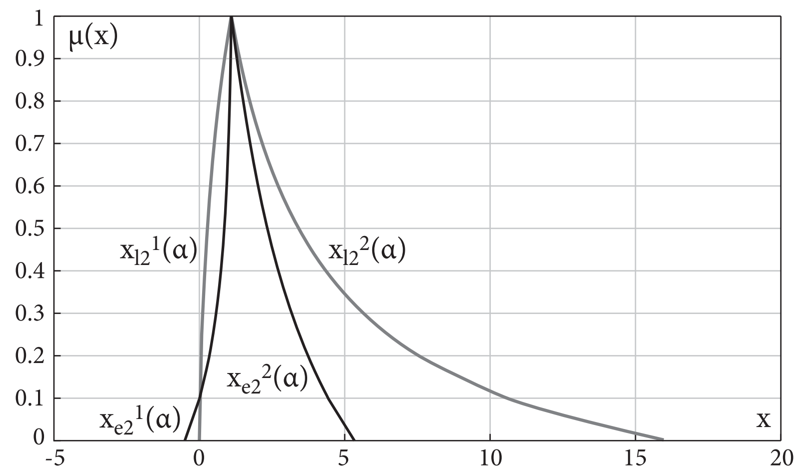
Εάν X είναι ένα σύνολο αντικειμένων ή αριθμών, που συμβολίζονται με x, τότε ένα ασαφές σύνολο (Fuzzy set) $\tilde{A}$ υποσύνολο του X, είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, x και $\mu_{\tilde{A}}(x)$: $\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x) | x \in X\}$, όπου $\mu_{\tilde{A}}(x)$ (ή $\tilde{A}(x)$) είναι η συνάρτηση συμμετοχής (membership function), η οποία εκφράζει για το στοιχείο x τον βαθμό συμμετοχής του ή τον βαθμό αλήθειας ως προς το ασαφές σύνολο $\tilde{A}$. Εφεξής τα ασαφή σύνολα θα φέρουν προς διαχωρισμό από τα κλασσικά μια περισπωμένη και επιπλέον οι δύο ανωτέρω συμβολισμοί ($\mu_{\tilde{A}}(x)$ ή $\tilde{A}(x)$) της συνάρτησης συμμετοχής θα χρησιμοποιούνται αδιακρίτως.



Σχ 1.8



Σχ. 1.66 Λύσεις της παραπάνω εξίσωσης $X_{e1} = X_{l1}$.



Σχ. 1.67 Λύσεις της παραπάνω εξίσωσης X_{e2}, X_{l2}.

1.6 Μέθοδος των ακραίων σημείων (Vertex Method)

1.6.1 Γενικότητες

Το θεώρημα επέκτασης του Zadeh (1965, 1975) αποτελεί τη θεωρητική βάση για όλες σχεδόν τις μεθόδους αριθμητικών υπολογισμών στα ασαφή σύνολα. Επεκτείνει τις συναρτήσεις των πραγματικών αριθμών σε ασαφείς συναρτήσεις με ένα συνεπή τρόπο και έχει γίνει γενικά αποδεκτό. Το θεώρημα αυτό έχει ήδη παρουσιαστεί και αναφέρεται εδώ για διευκόλυνση του αναγνώστη, έχει δε ως εξής:

Έστω ότι τα ασαφή σύνολα $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ... \tilde{A}_n$, με συναρτήσεις συμμετοχής $\mu_1, \ldots \mu_n$, ορίζονται στα γενικά σύνολα $X_1, \ldots X_n$, αντίστοιχα. Έστω τώρα f: $(X_1 \mathbf{x}\, X_2, \ldots \mathbf{x} X_n) \rightarrow Y$, η συνάρτηση που απεικονίζει τον Καρτεσιανού γινομένου χώρο ($X_1 \mathbf{x}, \ldots \mathbf{x} X_n$) στο χώρο Y, $(y = f(x_1, \ldots, x_n) \mid y \in Y)$. Ο ασαφής μετασχηματισμός $\tilde{B}$ για την περίπτωση αυτή ορίζεται ως: $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ... \tilde{A}_n)$, και η συνάρτηση συμμετοχής του μετασχηματισμού $\tilde{B}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \bigvee_{y=f(x_1,x_2,\ldots x_n)} \{\wedge[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{A}}(x_n)\} =$$

$$= \max_{y=f(x_1,x_2,\ldots x_n)} \{\min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{A}}(x_n)]\}.$$

Οι ασαφείς αριθμητικές πράξεις γίνονται με τον τρόπο αυτό και ονομάζονται ενίοτε επεκταμένες αριθμητικές πράξεις. Αν και η εκτέλεση σύνθετων αριθμητικών πράξεων ορίζεται από την αρχή της επέκτασης, η εφαρμογή της διαδικασίας επίλυσης δεν είναι απλή. Σύμφωνα με τους Baas and Kwakernaak (1977) η max-min επίλυση που δίνεται από το θεώρημα της επέκτασης είναι ισοδύναμη με ένα μη γραμμικό πρόβλημα, το οποίο σε γενικές γραμμές είναι πεπλεγμένο εκτός από απλές περιπτώσεις.

Σήμερα έχουν αναπτυχθεί και άλλες μεθοδοι για τις αριθμητικές πράξεις και σύμφωνα με τον Klimke(2006) ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες:

α) ***Κλασσικές*** ασαφείς αριθμητικές μέθοδοι.

β) ***Εξαναγκασμένες*** ασαφείς αριθμητικές μέθοδοι.

- ***Η κλασσική κατηγορία*** περιλαμβάνει ασαφείς αριθμητικές πράξεις βασισμένες σε LR-ασαφείς αριθμούς, σύμφωνα με τους Dubois and Prade (1980), ασαφείς αριθμητικές πράξεις βασισμένες σε αριθμητική διαστημάτων σύμφωνα με τους Kaufmann and Gupta (1991), ή άλλες μεταβολές (Giachetti and Young, 1997). Παρέχουν ένα τρόπο για αριθμητικό υπολογισμό ασαφών εκφράσεων με ένα συγκεκριμένο αλγόριθμο. Εν τούτοις αυτές οι μέθοδοι έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα που ενδεχόμενα οδηγεί σ' ένα σοβαρό ελάττωμα: Κάθε μεταβλητή θεωρείται ως ανεξάρτητη σε κάθε εμφάνιση της, ακόμη και αν η ίδια μεταβλητή εμφανίζεται πολλές φορές σε μια δεδομένη έκφραση. Αυτό οδηγεί συνήθως σε μια μεγάλη υπερεκτίμηση (overestimation) του αποτελέσματος, όπως έχει ήδη αποδειχθεί από τους Dong and Shah (1987), Wood et al. (1992), Yang et al (1993), Klir (1997), Hanss (2002).

- ***Οι εξαναγκασμένες*** ασαφείς αριθμητικές μέθοδοι αποφεύγουν το αποτέλεσμα της υπερεκτίμησης των κλασσικών μεθόδων με άμεσο υπολογισμό της λύσης της αρχής της επέκτασης. Οι Dong and Shah (1987) προτείνουν μια προσέγγιση της μη υπερεκτίμησης που ονομάζεται **μέθοδος των ακραίων σημείων ή των κορυφών (vertex method)**. Στην αρχική της μορφή, η μέθοδος εφαρμόστηκε μόνο σε μονότονες συναρτήσεις. Στη συνέχεια παρουσιάστηκε ένας βελτιωμένος αλγόριθμος από τους Wood et al. (1992), και έτσι δημιουργήθηκε μια πρόσθετη διαδικασία για μη μονότονες συναρτήσεις. Σύμφωνα με τη διαδικασία αυτή αναγνωρίζονται τα εσωτερικά ακραία σημεία, είτε με αναλυτικό είτε με αριθμητικό τρόπο με αλγόριθμο κατάλληλο για χωρική βελτιστοποίηση μη γραμμικών συναρτήσεων. Τελευταία ο Hanss (2002, 2003) πρότεινε τη μέθοδο του μετασχηματισμού, που αποτελεί μια πρακτική προσέγγιση για εκτίμηση ασαφών μοντέλων, χωρίς την ανάγκη εξωτερικών αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Επίσης οι Hanss (2002) και Hanss and Klimke(2004) προτείνουν ένα πλαίσιο ανάλυσης ευαισθησίας. Πρόσθετες εφαρμογές των ***εξαναγκασμένων*** ασαφών αριθμητικών μεθόδων δόθηκαν από τους Yang et al (1993) και Navara and Žabokrtský (2001). Στα παρακάτω θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τη μέθοδο των ακραίων σημείων (vertex method) με αριθμητικά παραδείγματα.

1.6.2 Αριθμητικές πράξεις διαστημάτων

Οι αριθμητικές πράξεις σε αριθμούς με διαστήματα ορίζονται ως εξής:

$$[a,b]*[c,d]=\{x*y \mid a\le x\le b, c\le y\le d\}, \qquad (2.95)$$

όπου το σύμβολο * είναι ένα από τα τέσσερα σύμβολα των αριθμητικών πράξεων: +, –, •, /. Οι αριθμητικές πράξεις για αριθμούς με διαστήματα έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

Προσεταιριστικότητα (Associativity):

$$I+(J+K) = (I+J)+K \qquad (1.36)$$

Αντιμεταθετικότητα(Commutativity):

$$I+J = J+I$$

$$I\bullet J = J\bullet I \qquad (1.37)$$

Σε ότι αφορά όμως την επιμεριστικότητα (Distributivity), αυτή δεν ισχύει πάντοτε. Πράγματι έχουμε:

Υποεπιμεριστικότητα (Subdistributivity)

$$I \bullet (J + K) \subset I \bullet J + I \bullet K\,. \tag{1.38}$$

Παράδειγμα:

Έστω $I = [1,2]$, $J = [2,3]$, $K = [1,4]$. Τότε θα ισχύει:

$$I \bullet (J - K) = [1,2]\cdot([2,3]\text{-}[1,4]) = [1,2]\cdot[\text{-}2,2] = [\text{-}4,4],$$

$$I \bullet J - I \bullet K = [1,2]\cdot[2,3]\text{-}[1,2][1,4] = [2,6]\text{-}[1,8] = [\text{-}6,5],$$

δηλαδή:

$$I \bullet (J - K) \subset I \bullet J - I \bullet K, \quad \text{ή} \quad [-4,4] \subset [-6,5],$$

το οποίο συνεπάγεται ότι μετά την επιμεριστικότητα το διάστημα διευρύνθηκε. ◆

1.6.2..1 Μεταβλητές διαστημάτων και συναρτήσεις

Ως μεταβλητή διαστήματος X ορίζεται(Moore, 1966) η μεταβλητή της οποίας η τιμή είναι ο αριθμός διάστημα [a,b] ή I. Όλες οι αριθμητικές πράξεις των αριθμών διαστημάτων εφαρμόζονται και στις μεταβλητές διαστήματος. Μια συνάρτηση της μεταβλητής διαστήματος X=[a,b] ορίζεται από τη σχέση:

$$Y = f(X) = \{f(x | x \in X)\} = \{f(x) | x \in [a,b]\}. \tag{1.39}$$

Όταν η f(x) είναι συνεχής και μονότονη στο X=[a,b], η Υ δίνεται από τη σχέση:

$$Y = [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))].$$

Παράδειγμα:

Έστω $\quad f(x) = 2x{+}3$ και $X = [a,b] = [1,5]$.

Τότε θα έχουμε: $f(a) = 5$, $f(b) = 13$

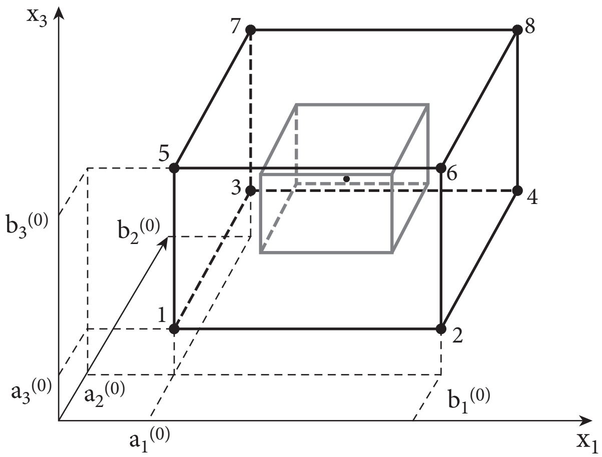
και $\quad Y = [\min(5,13),\ \max(5,13)] = [5,13] = [2,10]{+}3$.

Για την περίπτωση ενός n-διάστατου χώρου η συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} Y &= f(X_1, X_2, \ldots X_n) = \\ &= \{f(x_1, x_2, \ldots x_n) | (x_1, x_2, \ldots x_n) \in (X_1 \times X_2 \times, \ldots \times X_n)\}, \end{aligned} \tag{1.40}$$

όπου: $X_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Όλες οι μεταβλητές διαστήματος δημιουργούν έναν n-διάστατο (Καρτεσιανού γινομένου) χώρο $X_1 \times X_2 \times, \ldots \times X_n$ με 2^n ακραία σημεία, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για την 3-διάστατη περίπτωση.



Σχ. 1.68 Κυβοειδές για την περίπτωση n=3 .

Τα 2n ακραία σημεία των X_i δημιουργούν λοιπόν 2^n διακεκριμένες μεταθέσεις του n-διάστατου συνόλου $(X_1,X_2,...X_n)$, όπου το X_1, μπορεί να είναι είτε a_1 είτε b_1 , το X_2, μπορεί να είναι είτε a_2 είτε b_2 κ.ο.κ., και αποτελούν τα 2^n ακραία σημεία ενός 2n-διάστατου κυβοειδούς. Ορίζουμε τις μεταθέσεις αυτές με β_1, β_2, β_{2^n}, όπου:

$$\beta_1 \ : (a_1,a_2,...,a_n)$$
$$\beta_2 \ : (b_1,a_2,...,a_n)$$
....
....
$$\beta_{2^n} : (b_1,b_2,...,b_n)$$

Για την περίπτωση του παραπάνω σχήματος οι 8 κορυφές του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχουν τις ακόλουθες συντεταγμένες:

$\beta_1 :(a_1,a_2,a_3)$, $(-1,-1,-1)$	$\beta_5 :(a_1,a_2,b_3)$, $(-1,-1,\ 1)$
$\beta_2 :(b_1,a_2,a_3)$, $(\ 1,-1,-1)$	$\beta_6 :(b_1,a_2,b_3)$, $(\ 1,-1,\ 1)$
$\beta_3 :(a_1,b_2,a_3)$, $(-1,\ 1,-1)$	$\beta_7 :(a_1,b_2,b_3)$, $(-1,\ 1,\ 1)$
$\beta_4 :(b_1,b_2,a_3)$, $(\ 1,\ 1,-1)$	$\beta_8 :(b_1,b_2,b_3)$, $(\ 1,\ 1,\ 1)$

Σημείωση: Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο μετατρέπεται σε κύβο με άξονες που διέρχονται από το κέντρο του και με τις αδιάστατες συντεταγμένες που εμφανίζονται δίπλα στις παλαιές, και για το λόγο αυτό του δόθηκε η ονομασία «κυβοειδές» από τον Hanss

(2002) ή και «υπερκυβοειδές» για υπερχώρο. Πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν και τη λέξη υπερορθογώνιο για τον υπερχώρο (Θεοδώρου, 2010.)Για το παραπάνω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο εισάγουμε νέο σύστημα συντεταγμένων που διέρχεται από το Κ.Β. του ο.π. Οι νέες συντεταγμένες x_1, x_2, x_3 συνδέονται με τις παλαιές με τις σχέσεις:

$$\pm x_1 = a_1 - \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{a_1-b_1}{2}, \quad \pm x_2 = a_2 - \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{a_2-b_2}{2},$$

$$\pm x_3 = a_3 - \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{a_3-b_3}{2}.$$

Εισάγουμε τώρα αδιάστατες μεταβλητές ως εξής:

$$\pm\xi_1 = x_1 \Big/ \frac{a_1-b_1}{2} = \pm 1, \;\; \pm\xi_2 = x_2 \Big/ \frac{a_2-b_2}{2} = \pm 1, \;\; \pm\xi_3 = x_3 \Big/ \frac{a_3-b_3}{2} = \pm 1.$$

Με τον τρόπο αυτό το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στο σύστημα $x_1x_2x_3$, μετατράπηκε πλέον σε αδιάστατο κύβο στο σύστημα $\xi_1\xi_2\xi_3$.

Εάν τώρα η $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι συνεχής στον n-διάστατο Καρτεσιανού γινομένου χώρο και δεν υπάρχουν ακραία σημεία στην συνάρτηση, τότε η τιμή της συναρτήσεως διαστήματος λαμβάνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} Y &= f(X_1, X_2, \ldots X_n) = \\ &= \left[\min\{f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots f(\beta_{2^n})\}, \max\{f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots f(\beta_{2^n})\}\right] = \qquad (1.41) \\ &= \left[\bigwedge_i f(\beta_i), \bigvee_i f(\beta_i)\right], \;\; i = 1, 2, \ldots, 2^n \end{aligned}$$

όπου βέβαια θεωρείται ότι: $f(\beta_1) = f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ κ.ο.κ.

Παράδειγμα:

Ζητείται να βρεθεί η τιμή της συνάρτησης $Y = f(X_1, X_2, X_3) = X_1(X_2 - X_3)$, όπου δίνονται, (Dong and Shah, 1987):

$$X_1 = [1, 2] = [a_1, b_1], \quad X_2 = [2, 3] = [a_2, b_2], \quad X_3 = [1, 4] = [a_3, b_3].$$

Οι συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλεπιπέδου δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} &\beta_1 : (a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 1) \qquad &\beta_5 : (a_1, a_2, b_3) = (1, 2, 4) \\ &\beta_2 : (b_1, a_2, a_3) = (2, 2, 1) \qquad &\beta_6 : (b_1, a_2, b_3) = (2, 2, 4) \\ &\beta_3 : (a_1, b_2, a_3) = (1, 3, 1) \qquad &\beta_7 : (a_1, b_2, b_3) = (1, 3, 4) \\ &\beta_4 : (b_1, b_2, a_3) = (2, 3, 1) \qquad &\beta_8 : (b_1, b_2, b_3) = (2, 3, 4) \end{aligned}$$

Με βάση τις συντεταγμένες αυτές παίρνουμε:

$$f(\beta_1) = 1 \bullet (2-1) = 1 \qquad f(\beta_5) = 1 \bullet (2-4) = -2$$

$$f(\beta_2) = 2 \bullet (2-1) = 2 \qquad f(\beta_6) = 2 \bullet (2-4) = -4$$

$$f(\beta_3) = 1 \bullet (3-1) = 2 \qquad f(\beta_7) = 1 \bullet (3-4) = -1$$

$$f(\beta_4) = 2 \bullet (3-1) = 4 \qquad f(\beta_8) = 2 \bullet (3-4) = -2$$

Έτσι θα έχουμε τελικά:

$$\Upsilon = \left[\min(1,2,2,4,-2,-4,-1,-2),\ \max(1,2,2,4,-2,-4,-1,-2)\right] = \left[-4,4\right].$$

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου των ακραίων τιμών αποτελεί το γεγονός ότι η τιμή της συνάρτησης παραμένει αμετάβλητη όταν η μορφή της έκφρασης της συνάρτησης αλλάξει. Έτσι στο παραπάνω παράδειγμα έαν τεθεί:

$$Y = X_1 \bullet X_2 - X_1 \bullet X_3,$$

θα εξαχθεί πάλι το ίδιο αποτέλεσμα:

$$\Upsilon = [-4, 4].$$

Η πολλαπλή εμφάνιση της μεταβλητής X_1 δεν επηρεάζει στη μέθοδο αυτή το τελικό αποτέλεσμα. Συγκρίνοντας τώρα το τελικό αυτό αποτέλεσμα με την παραπάνω περίπτωση εφαρμογής της θεωρίας των διαστημάτων:

$$I \bullet J - I \bullet K = X_1 \bullet X_2 - X_1 \bullet X_3 = [1,2]\cdot[2,3] - [1,2][1,4] = [-6,5],$$

παρατηρούμε ότι στη θεωρία των διαστημάτων οι δύο εμφανίσεις της μεταβλητής X_1 χρησιμοποιήθηκαν ως ***δύο ανεξάρτητες μεταβλητές*** με αποτέλεσμα να έχουμε διεύρυνση του διαστήματος, δηλαδή υπερεκτίμηση. Δηλαδή η έκφραση αυτή ελήφθη ως ακολούθως:

$$Y = X_1 \bullet X_2 - X_4 \bullet X_3,$$

ως να είχαμε δηλαδή την X_1 τέταρτη ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή θεωρήθηκε ένας 4-διάστατος χώρος με 2^4=16 ακραία σημεία στον υπερχώρο. Για το χώρο αυτό σύμφωνα με τη μέθοδο των ακραίων τιμών, οι μεταθέσεις και η τιμή της συνάρτησης Υ στα 16 αυτά ακραία σημεία δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 1.9 Συντεταγμένες και οι τιμές της συνάρτησης f.

j	**β_j**				**$f(\beta_j)$**
1	1	2	1	1	1
2	2	2	1	1	3
3	1	3	1	1	2
4	2	3	1	1	5
5	1	2	4	1	–2
6	2	2	4	1	0
7	1	3	4	1	–1
8	2	3	4	1	2
9	1	2	1	2	0
10	2	2	1	2	2
11	1	3	1	2	1
12	2	3	1	2	4
13	1	2	4	2	–6
14	2	2	4	2	–4
15	1	3	4	2	–5
16	2	3	4	2	–2

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει η ακόλουθη τιμή της συνάρτησης Υ:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots X_4) =$$

$$= \Big[\min\{f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots f(\beta_{16})\},\ \max\{f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots f(\beta_{16})\}\Big] = [-6,5].$$

Όπως διαπιστώνουμε ισχύει: $[-4,4] \subset [-6,5]$.

Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε τώρα(Dong and Wong, 1987):

$$Y = \frac{X_1 \bullet X_2}{X_1},$$

όπου $X_1 = [2,4]$, $X_2 = [0.4,1]$.

Η ορθή λύση είναι βέβαια $Y = [0.4,1]$, διότι θα ισχύει πάντα $Y = X_2$, ανεξάρτητα από την τιμή της X_1. Εν τούτοις εάν κανείς εκτελέσει τις πράξεις με τη μέθοδο των διαστημάτων θα προκύψει:

$$Y=\frac{X_1 \bullet X_2}{X_1}=\frac{[2,4]\times[0.4,1]}{[2,4]}=\frac{[0.8,4]}{[2,4]}=[0.2,2]\supset[0.4,1]$$

Αυτό συμβαίνει διότι η μεταβλητή X_1 εμφανίζεται στη μέθοδο των διαστημάτων δύο φορές ως ανεξάρτητη μεταβλητή και έτσι προκύπτει υπερεκτίμηση του αποτελέσματος. Εάν πράγματι θεωρήσουμε στον παρονομαστή την X_1 ως νέα μεταβλητή X_3 και εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ακραίων τιμών θα έχουμε:

		$f(\beta_i)$
$\beta_1:$	(2, 0.4, 2,)	0.4
$\beta_2:$	(2, 0.4, 4)	0.2
$\beta_3:$	(2, 1, 2)	1
$\beta_4:$	(2, 1, 4)	0.5
$\beta_5:$	(4, 0.4, 2)	0.8
$\beta_6:$	(4, 0.4, 4)	0.4
$\beta_7:$	(4, 1, 2)	2
$\beta_8:$	(4, 1, 4)	1

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει η ακόλουθη τιμή της συνάρτησης Υ:

$$Y=f(X_1,X_2,X_3)=$$
$$=\left[\min\{f(\beta_1),f(\beta_2),\ldots f(\beta_8)\},\ \max\{f(\beta_1),f(\beta_2),\ldots f(\beta_8)\}\right]=[0.2,2].$$

1.6.3 Προσέγγιση των α-τομών με τη μέθοδο ακραίων τιμών

Οι Otto et al(1993) προσδιόρισαν τα ακόλουθα:

1) $$X_\alpha^i=\{x_i\in R \mid \mu_i(x_i)\geq\alpha\} \tag{1.42}$$

Επειδή η $\{\mu_i\}$αποτελεί έναν ασαφή αριθμό, το διάστημα X_α^i είναι κλειστό, δηλαδή $X_\alpha^i=[x_i^{\min}(\alpha),x_i^{\max}(\alpha)]$ και για $\alpha=0$, $X_0^i=\operatorname{supp}(\mu_i)$.

2) Έστω $\alpha\in[0,1]$. Θεωρείται ότι $(x_1,x_2,...x_n)\in X_\alpha^1\times X_\alpha^2\times,....\times X_\alpha^n$.

Το σημείο $(x_1,x_2,...x_n)$ αποτελεί α-ακραίο σημείο εάν

$$(x_1,x_2,...x_n)=(x_1^{\beta_1}(\alpha),x_2^{\beta_2}(\alpha),...x_n^{\beta_n}(\alpha)),$$

όπου $\beta_i\in\{\min,\max\},i=1,2,...n$.

Το σύνολο των α-ακραίων σημείων ορίζεται ως $R_n(\alpha)$, όπου $|R_n(\alpha)|=2^n$.

Ορίζονται επίσης τα σημεία:

$$y^{\alpha}_{min} = \min\{f(x) \big| x \in \mathbb{R}_n(\alpha)\},\ y^{\alpha}_{max} = \max\{f(x) \big| x \in \mathbb{R}_n(\alpha)\}. \quad (1.43)$$

Το διάστημα $[y^{\alpha}_{min}, y^{\alpha}_{max}]$ καλείται προκύπτουσα α-τομή ακραίου σημείου και συμβολίζεται ως $\mathscr{Y}_\alpha$.

Με βάση τα παραπάνω εισάγεται μια συνδυαστική συνάρτηση $\mathscr{P}$ (combination function), η οποία είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^n$: $[0,1]^n \to [0,1]$, έτσι ώστε η συνάρτηση: $\mu(x_1, x_2, ... x_n) = \mathscr{P}(\mu_1(x_1), ... \mu_n(x_n))$ στον $\mathbb{R}^n$ να έχει υπόβαθρο στον Καρτεσιανού γινομένου χώρο $X^1_0 \times X^2_0 \times, ... \times X^n_0$. Αποδεικνύεται (Otto et al, 1993) ότι η συνάρτηση αυτή τείνει σε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n : \to \mathbb{R}$ της οποίας η συνάρτηση συμμετοχής είναι η μ_f.

Οι α-τομές της μ_f ορίζονται στο χώρο $W_\alpha = f\ (X^1_\alpha \times X^2_\alpha \times, ... \times X^n_\alpha)$. Αποδεικνύεται επίσης (Otto et al, 1993) ότι ισχύει:

$$W_\alpha \to \mathscr{Y}_\alpha.$$

Ως συμπέρασμα η μέθοδος των ακραίων τιμών τείνει στο θεώρημα επέκτασης του Zadeh (1965) υπό ορισμένες προϋποθέσεις, δηλαδή υπάρχουν και περιπτώσεις όπου η μέθοδος vertex δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

1.6.4 Αλγόριθμος της μεθόδου

Θεωρούμε ασαφείς αριθμούς $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ... \tilde{X}_n$ που ορίζονται στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και συμβολίζουμε με x_i ένα στοιχείο του $\tilde{X}_i, i = 1, ... n$. Τα στοιχεία $x_1, x_2, ... x_n$ συνδέονται με ένα πραγματικό αριθμό y με τη σχέση $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Η λύση για τον ασαφή αριθμό $\tilde{Y} = f(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ... \tilde{X}_n)$ ακολουθεί τα ακόλουθα βήματα:

1. Διαιρούμε την περιοχή της συνάρτησης συμμετοχής $[0, 1]$ σε πεπερασμένο αριθμό α-τομών που τις ονομάζουμε ως $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Η λεπτότητα της διαμέρισης εξαρτάται από την επιδιωκόμενη ακρίβεια.
2. Για κάθε τιμή της συνάρτησης συμμετοχής α_j βρίσκουμε τα αντίστοιχα διαστήματα για την $\tilde{X}_i$, στην x_i, $i = 1, ... n$. Αυτά αποτελούν τα υπόβαθρα των α_j-τομών των $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ... \tilde{X}_n$. Τα ακραία σημεία των διαστημάτων αυτών ορίζονται ως: $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$, κ.λ.π.
3. Λαμβάνουμε ένα ακραίο σημείο από κάθε διάστημα, και τα ακραία σημεία μπορούν να συνδυαστούν σε ένα n-διάστατο σύνολο. Υπάρχουν 2^n διακεκριμένες μεταθέσεις που δίνουν 2^n συνδυασμούς για το διάνυσμα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

4. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση $y=f(x_1,x_2,...x_n)$ για κάθε μία από τις 2^n μεταθέσεις και βρίσκουμε 2^n τιμές της y, τις οποίες συμβολίζουμε ως $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$. Το επιθυμητό αποτέλεσμα είναι:

$$\left[\bigwedge_k y_k, \bigvee_k y_k\right].$$

Τα σημεία αυτά ορίζουν το υπόβαθρο της α_j-τομής.

5. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για άλλες τιμές της α_j-τομής για να πετύχουμε πρόσθετες α-τομές για τον ασαφή αριθμό $\tilde{Y}=f(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\ldots\tilde{X}_n)$.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\tilde{X})=\tilde{X}^3-\tilde{X}^2-17\tilde{X}-15$, όπου $\tilde{X}$ αποτελεί έναν ασαφή αριθμό που δίνεται με τη μορφή α-τομών:

$$\tilde{X}_\alpha=[4+0.5\alpha, 5-0.5\alpha] \text{ (Hanss, 2002).}$$

Εάν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των διαστημάτων για $\alpha=0$, έχουμε: $\tilde{X}_{\alpha=0}=[4,5]$ και με άμεση εφαρμογή της αριθμητικής διαστημάτων λαμβάνουμε:

$$[4,5]^3-[4,5]^2-17[4,5]-15=[-61,26].$$

Σημείωση:Περιοριζόμαστε μόνο στην παραπάνω μορφή της συνάρτησης, χωρίς να πάμε σε άλλες μετασχηματισμένες μορφές (Horner κ.λ.π.) που μας δίνουν επίσης εσφαλμένα αποτελέσματα.

Εάν τώρα εφαρμόσουμε τη μέθοδο vertex με μία μόνο άγνωστη μεταβλητή θα πάρουμε:

$$f(4)=4^3-4^2-17*4\text{-}15=-35, \quad f(5)=5^3-5^2\text{-}17*5-15=0.$$

Άρα: $f(\tilde{X}_0)=f([4,5])=[-35,0]$.

Επιλέγονται τώρα και άλλες τιμές της α και παίρνουμε τιμές της f σε διάφορες α-τομές. Π.χ. για $\alpha=0.5$ με τη μέθοδο των διαστημάτων έχουμε:

$$\tilde{X}_{0.5}=[4.25, 5.75]$$

και η f με τη μέθοδο των διαστημάτων παίρνει την τιμή:

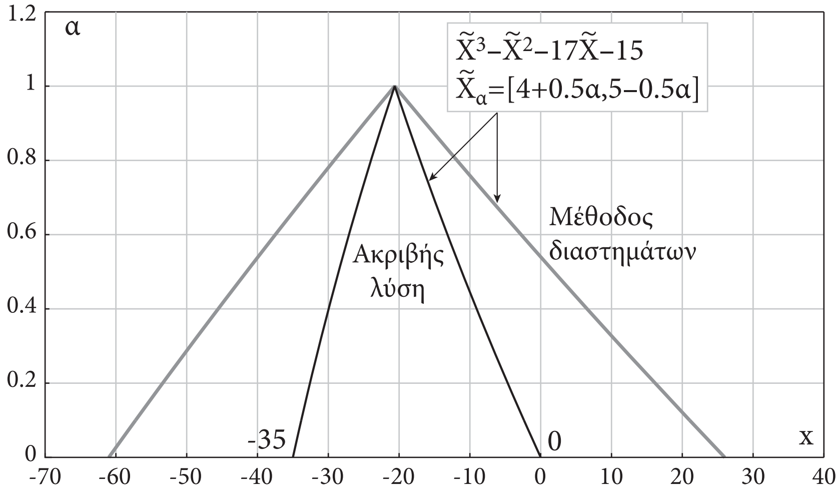
$$f_i([4.25, 5.75])=[-41.54, 1.86],$$

ενώ με τη μέθοδο vertex παίρνει την τιμή:

$$f_v([4.25, 5.75]) = [-28.54, -11.14].$$

Όπως φαίνεται δε ισχύει πάντοτε $f_v \subset f_i$ $(f_i = f_{interval}, f_v = f_{vertex})$

Στο παρακάτω σχήμα εμφανίζεται η μ_f για τις δύο περιπτώσεις και για $\alpha \in [0,1]$,



Σχ. 1.69 Συνάρτηση συμμετοχής της f.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε τη συνάρτηση (Dong and Wong, 1987):

$$f(\tilde{W}_i,\tilde{X}_i)=\frac{\tilde{W}_1\tilde{X}_1+\tilde{W}_2\tilde{X}_2+\tilde{W}_3\tilde{X}_3}{\tilde{W}_1+\tilde{W}_2+\tilde{W}_3},$$

όπου οι μεταβλητές $\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\tilde{X}_3,\tilde{W}_1,\tilde{W}_2,\tilde{W}_3$ είναι ασαφείς μεταβλητές που δίνονται από τις α-τομές τους ως εξής:

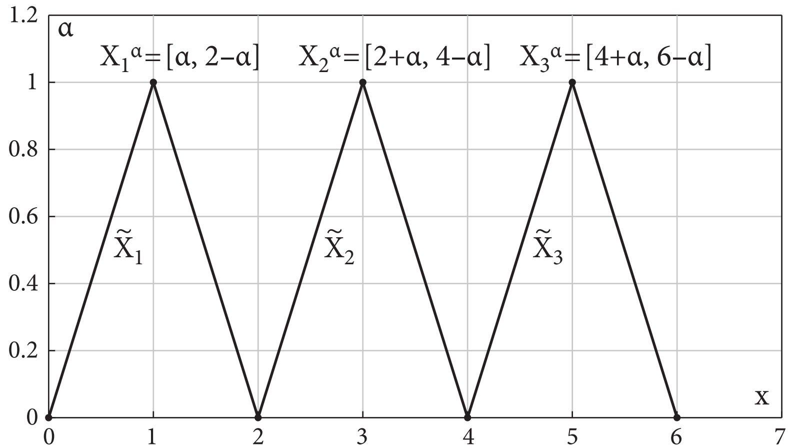
$$\tilde{X}_1^\alpha=[\alpha, 2-\alpha],\tilde{X}_2^\alpha=[2+\alpha, 4-\alpha],\tilde{X}_3^\alpha=[4+\alpha, 6-\alpha],$$

$$\tilde{W}_1^\alpha=[0.3\alpha, 0.9-0.6\alpha],\tilde{W}_2^\alpha=[0.4+0.3\alpha, 1-0.3\alpha],\tilde{W}_3^\alpha=[0.6+0.2\alpha, 1-0.2\alpha].$$

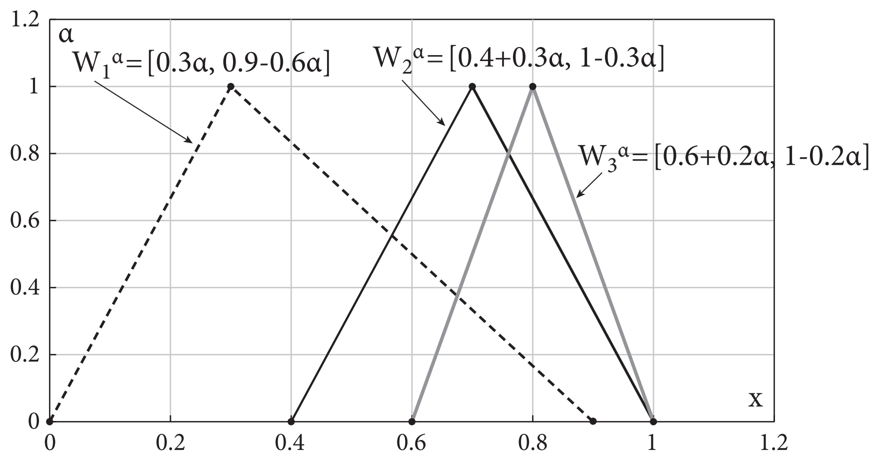
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο vertex για την εύρεση της μ_f της παραπάνω συναρτήσεως για τιμές της α=0, 0.5, 1 και οι τιμές αυτές δίνονται παρακάτω:

Πίνακας 1.10 Τιμές για $\alpha=0, 0.5, 1$.

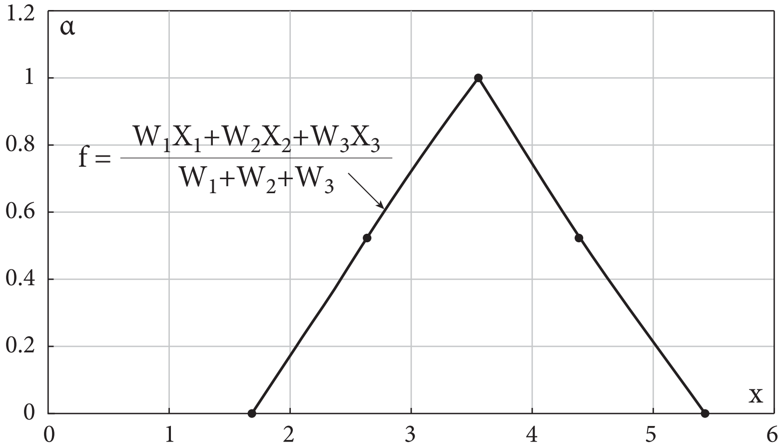
α	X1	X2	X3	W1	W2	W3
0	$[0,2]$	$[2,4]$	$[4,6]$	$[0,0.9]$	$[0.4,1]$	$[0.6,1]$
0,5	$[0.5,1.5]$	$[2.5,3.5]$	$[4.5,5.5]$	$[0.15,0.6]$	$[0.55,0.85]$	$[0.7,0.9]$
1	$[1,1]$	$[3,3]$	$[5,5]$	$[0.3,0.3]$	$[0.7,0.7]$	$[0.8,0.8]$



Σχ. 1.70 Συναρτήσεις συμμετοχής των X_1, X_2, X_3.



Σχ. 1.71 Συναρτήσεις συμμετοχής των W_1, W_2, W_3.



Σχ. 1.72 Συνάρτηση συμμετοχής της f.

Στα παραπάνω σχήματα 1.70, 1.71, 1.72, δίνονται οι συναρτήσεις συμμετοχής των X_1, X_2, X_3, W_1, W_2, W_3, καθώς και η συνάρτηση συμμετοχής της συνάρτησης f για τις τρεις α-τομές (α=0, α=0.5, α=1). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η αναλυτική έκφραση της f_l δίνεται από την παρακάτω σχέση (Dong and Wong, 1987):

$$0 \le \alpha < 0.375 \qquad \mu_f^{\ell} = \frac{-0.1\alpha^2 + 3.3\alpha + 3.2}{1.9 - 0.1\alpha}$$

$$0.375 \le \alpha \le 1 \qquad \mu_f^{\ell} = \frac{\alpha\omega_1 + (\alpha+2)\omega_2 + (\alpha+4)\omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3},$$

$$\omega_1 = 0.9 - 0.6\alpha\,, \quad \omega_2 = 1 - 0.3\alpha\,, \ \omega_3 = 0.6 + 0.2\alpha\,.$$

Όπως φαίνεται στο σχ 1.72 στις α-τομές 0, 0.5 και 1 οι τιμές της μεθόδου vertex ταυτίζονται με τις τιμές της αναλυτικής λύσης μέχρι το τρίτο δεκαδικό ψηφείο. Στους παρακάτω πίνακες δίνονται οι τιμές των 2^6=64 μεταθέσεων για τις μεταβλητές X_1, X_2, X_3, W_1, W_2, W_3 και για $\alpha = 0$, 0.5, 1. Επίσης δίνεται το Πρόγραμμα Vertex σε μορφή Visual Fortran και για την περίπτωση μονότονης συνάρτησης.

Ευρετήριο όρων

Α

ασαφής γραμμική εξίσωση, 74
ασαφής εντροπία, 40
αδιάφορη προτίμηση, 267, 296
άθροισμα, απολύτων τιμών απόκλισης, 182
  του σφάλματος στο τετράγωνο, 182
  των χρησιμοτήτων του συνόλου, 307
αθροιστικοί συνδυασμοί, 146
ακραία προτίμηση, 281
ακραία σημεία ασαφών συναρτήσεων, 238
ακραία ή ιδανική τιμή, 301
ακραία τιμή, 146, 150
αλγεβρικό γινόμενο-άθροισμα, 142
αλγόριθμος. Anfis, 185
  ελαχίστων τετραγώνων, 172
  μέτρησης, 170
αλληλοανταλλαγή, 278
αναγνώριση των λειτουργικών σχέσεων, 133
ανακρίβεια, 219
ανάλυση ευαισθησίας, 137, 235
ανεκτές παραβιάσεις, 228
ανεξάρτητες μεταβλητές ή επεξηγηματικές, 109
ανεστραμμένη διάταξη, 289
ανηγμένο μέσο τετραγωνικό σφάλμα, 204
ανισώσεις, 117
ανοικτά υδροστόμια, 192
ανταγωνισμού-μη ανταγωνισμού, 277, 308
ανταγωνιστική, άποψη, 278
  προσέγγιση, 278
αντανακλαστικότητα σχέσεων, 297
αντι-ιδανική, 308
αντι-ιδεατό σημείο, 365
αντιληπτό ιδεατό σημείο, 365
αντιμεταθετικότητα, της ένωσης, 14
  της τομής, 14
αντισταθμίσματα, 452
αντιστοιχία ένα προς ένα, 69
αντίστροφη, εικόνα f^{-1}, 56
  συνάρτηση, 55
αντίστροφος ενός τριγωνικού αριθμού, 66
αντλίες, 192
αντλιοστάσιο, 192
άνω φράγμα supremum, 15
ανώμαλες συναρτήσεις, 69
απαλότερη ερμηνεία, 277
απλή και πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση, 109
αποδεκτή ευστάθεια, 450, 465
αποδεκτό όφελος, 450, 465
απόδοση του συστήματος, 194
απόδοση του συστήματος των κανόνων, 134
απόκλιση από την ιδεατή τιμή, 307
απορροφητικότητα (Identity), 14
αποσαφήνιση (ή αποσαφοποίηση), 153
απόσταση, ασαφών αριθμών, 535
  του Hausdorff, 537
απόφαση μεγιστοποίησης, 225, 270
απόφαση σε ασαφές περιβάλλον, 219
αρδευτικό δίκτυο, 192, 453
αριθμητικές πράξεις, 62
άρνηση, 289
αρχές του De Morgan, 14, 37
αρχή, κατά Pareto, 298
  της αντίφασης, 12, 14
  της διπλής άρνησης, 37
  της επέκτασης, 52
  του αποκλειομένου μέσου, 12
  του αποκλειόμενου τρίτου, 14
  του αποκλειόμενου τρίτου στα ασαφή σύνολα, 38
ασαφές σύνολο «απόφασης», 239

ασάφεια, 219
ασαφείς αποκρίσεις, 126
ασαφείς βαθμολογίες, 332
ασαφείς, συμμετρικοί τριγωνικοί αριθμοί, 112
  συσχετισμένες μνήμες, 125
  τριγωνικοί αριθμοί, 59
  υποθέσεις, 126, 209
ασαφές πρόβλημα του Cauchy, 603
ασαφή, βάρη, 332
  επαγωγικά συστήματα, 125
ασαφής, αντικειμενική συνάρτηση, 227
  απόσταση μεταξύ ασαφών αριθμών, 548
  αριθμός της μορφής L,R, 112
  βαθμονόμηση, 509
  γραμμική παλινδρόμηση, 112
  μέθοδος RR-F, 489
  μέση τιμή, 509
  TOPSIS, 408
  VIKOR, 462
  μεσαία τιμή ή διχοτόμος, 162
  μέσος όρος-κέντρο βάρους, 155
  περιορισμός, 227
  προσέγγιση, 466
  προτίμηση (βάρη), 333
  στόχος, 221
  συμβιβαστικός προγραμματισμός, 331
  Σύνθετος Συμβιβαστικός Προγραμματισμός, 344
  αντικειμενική συνάρτηση, 227
ασθενής-δυνατή λύση, 269
ασθενής προτίμηση, 281
ασθενική ή ισχυρή προτίμηση, 267
ασυνεπές μητρώο, 283
α-Τομές ασαφών συνόλων, 28
α-τομή, 28
ατομικό μέγιστο της μεταμέλειας, 307
αφαίρεση, 63

Β

βαθμοί βέλτιστης απόφασης, 529
βαθμονόμηση (calibration), 110
βαθμός, αοριστίας, 115
  απόκλισης , 383
  ασάφειας, 114
βαθμός, βέλτιστης απόφασης, 533
  βέλτιστης απόφασης για τραπεζοειδείς αριθμούς, 527
  βέλτιστης απόφασης για τριγωνικούς αριθμούς, 526
  εγγύτητας, 302
  ικανοποίησης, 128
  μητρώου, 282
  παραβίασης, 233
βαθμωτή, άθροιση, 464
  αφαίρεση, 464
  διαίρεση, 464
βαθμωτός πολλαπλασιασμός, 464
βάρη, 226
βάρη. αξιολόγησης των κριτηρίων, 304
  ή παράγοντες ενδιαφέροντος, 268
βάση, ασαφών κανόνων, 125
  δεδομένων (database), 128
  κανόνων (rule base), 128
βέλτιστη απόφαση, 225, 229, 238, 258, 272, 277
βροχομετρικός σταθμός, Κρύας Βρύσης, 195
  Σίνδου, 195

Γ

γενικά δυνατή λύση, 302
γενικευμένα μητρώα, 227
γενικευμένοι ασαφείς αριθμοί, 538
γενικευμένος ασαφής τριγωνικός αριθμός (GTFN), 411
γεωεπιστήμες, 350
γεωμετρική απόσταση, 335
γεωμετρικό κέντρο, 530
γινόμενο αναφοράς, 142
γλωσσική έκφραση, 509
γραμμική παλινδρόμηση, 107, 109
γραμμικό ασαφές σύστημα, 78
γραμμικός προγραμματισμός, 227

Δ

δειγματικός χώρος, 27
δείκτες επίδοσης, 343
δείκτης, RR, 486
  απόστασης, 530
  βέλτιστης απόφασης, 526

δείκτης, βελτίστου, 525
διαφωνίας, 268
κατάταξης R, 533
συμφωνίας, 268
Συνέπειας (Consistency Index), 283
της σχετικής αναλογίας, 488
διαδικασία Αναλυτικής Ιεράρχησης, 266
διαδραστικός ασαφής γραμμικός προγραμματισμός, 246, 252
διαθέσιμοι πόροι, 254
διαίρεση, 66
διακριτή περίπτωση, 26
διασπορά, 509
διάστημα, εμπιστοσύνης, 60
ευσταθείας, 451
διαταρακτικός όρος, 109
διατεταγμένη δυάδα, 51
διατεταγμένη ν-άδα, 51
διαφορικές εξισώσεις, με gH-γενικευμένη παράγωγο, 597
με μερικές παραγώγους, 590
με ολικές παραγώγους – αναλυτικές λύσεις, 563
με ολικές παραγώγους – αριθμητικές λύσεις, 603
διαφορίσιμη, 592,
-gH, 597
-(i)-gH, 598
-(ii)-gH, 599
διαφορισιμότητα της συνάρτησης $\tilde{U}_c(x,y)$, 593
διμελές σύνολο αναφοράς, 27
διχοτόμηση (Bisection), 166
δυαδική σχέση, 296
δυνατές λύσεις, 269
δυνατή (Pareto-βέλτιστης) λύση, 268
δύο ασαφείς υποθέσεις, 209

Ε

εικόνα ενός ασαφούς συνόλου, 52
εκτίμηση του συστήματος των κανόνων, 181
ελάχιστη ατομική διαφορά, 450
του «αντιπάλου», 448
ελάχιστο των μεγίστων, 166
ελάχιστοι συνδυασμοί, 145
ελαχιστοποιούν σύνολο, 514
ενεργοποίηση $a_j(t)$ κάποιας μονάδας u_j, 184
ένταση του ενδιαφέροντος, 280
ένωση, $\cup$ δύο ασαφών συνόλων, 31
των κλασσικών συνόλων, 11
(ή διάζευξη), 289
μεταβλητών, 133
εξαναγκασμένες ασαφείς αριθμητικές μέθοδοι, 84
εξαρτημένη μεταβλητή, 109
εξίσωση της θερμότητας, 604, 611
επαγωγικά, 126
επίδοση της εναλλακτικής δραστηριότητας, 301
επικάλυψη, 42, 137
επιμεριστική ιδιότητα, της ένωσης ως προς την τομή, 14
της τομής ως προς την ένωση, 14
επίπεδα βαθμολογίας, 301
κατωφλίων, 267
επίπεδο προσδοκίας, 60
επίπεδο φιλοδοξίας, 227
ευαισθησία μεταβολής (ελαστικότητα), 111
ευστάθεια του βάρους, 454

Θ

θεμελιώδης κλίμακα, 280
θεώρημα Ανάλυσης-Ανασύνθεσης, 46
θεώρημα αναπαράστασης-ανασύνθεσης, 46
θεωρία, αποφάσεων, 219
δυνατότητας, 513
ελέγχου, 219
της πληροφόρησης, 219
της χρησιμότητας, 295
του SEIKKALA, 563

Ι

ιδανική δραστηριότητα, 301
ιδεατό γεωμετρικό κέντρο, 531
ιδιαίτερη προτίμηση (βάρος), 305
ιδιότητες ενός συστήματος κανόνων, 131
ιδιοτιμές μητρώου, 282
ιεράρχηση των κανόνων, 133
ίση προτίμηση, 281
ισομορφισμός, 9

ισότητα και εγκλεισμός των ασαφών συνόλων, 43
ισχύ του κανόνα, 140
ισχυρή προτίμηση, 281
ισχυρό α-κλασσικό σύνολο, 29
ισχύς του κανόνα, 128
ίχνος μητρώου, 282

Κ
καμπύλες αδιαφορίας, 367
κανονική, πληροφόρηση, 290
  διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης με αρχική συνθήκη, 574
  εξίσωση πρώτης τάξης με τη θεωρία των BF, 565
κανονικοποιημένες βαθμολογίες, 370
κανονικοποιημένο, ασαφές μητρώο απόφασης, 337
  μητρώο απόφασης, 302
κανονικοποιημένος ασαφής τριγωνικός αριθμός, 411
καρτεσιανό γινόμενο ασαφών συνόλων, 51
κατάρα των διαστάσεων, 133
κατασκευή των ασαφών αριθμών, 129
κατάταξη, τραπεζοειδών ασαφών αριθμών, 522
  τραπεζοειδών ασαφών αριθμών με παραβολικής μορφής τα πλαϊνά του τραπεζίου 523
κάτω φράγμα (infimum), 15
κέντρο των αθροισμάτων, 165
κλασσικά σύνολα (crisp sets), 19
κλασσική λύση, $\tilde{U}_c(x,y)$, 590
  $\tilde{Y}_c(t)$, 574
κλασσικό σύνολο, 9
κυβοειδές, 87
κύρια δυνατή λύση, 269
κύρια χρησιμότητα, 296
κυρτό ασαφές σύνολο, 45, 59, 224
κυρτός συνδυασμός, 226
κυρτότητα σχέσεων, 297
κωδωνοειδής συνάρτηση, 187

Λ
λήπτης απόφασης, 255
λογαριθμική συνάρτηση, 52
λόγος Συνέπειας (Consistency Ratio), 283
λύση με βάση, την αρχή της επέκτασης $\tilde{U}_e$, 592, 595
  την αρχή της επέκτασης $\tilde{Y}_e$, 575

Μ
μεγάλη υπερεκτίμηση, 84
μέγεθος ενός συστήματος κανόνων, 132
μέγιστη απόλυτη απόκλιση, 182
μέγιστη ωφέλεια του συνόλου, 450, 451
  της «πλειοψηφίας», 448
μέγιστη-ελάχιστη μέθοδος αναφοράς, 140
μέγιστο των μεγίστων, 166
μέγιστοι συνδυασμοί, 146
μεγιστοποίηση μιας διανυσματικής συνάρτησης, 268
μεγιστοποιούν σύνολο, 238, 510, 514
  -Jain, 509
μεγιστοποιούσα εναλλακτική δραστηριότητα, 248
μέγιστος βαθμός πλήρους ικανοποίησης, 275
μέθοδοι, αποσαφήνισης, 154
  βαθμολόγησης, 265
  ιεραρχημένων βαρών, 387
  υπεροχής, 267
μέθοδος, του μετασχηματισμού, 85
  CRITIC, 382, 384
  ELECTRE, 267
  GMIR, 431
  PROMETHEE, 267
  Simplex, 263
  TOPSIS, 363
  vertex, 335
  VIKOR, 267, 448
  ιεράρχηση-άθροίσματος (RS), 382
  ιεράρχησης των κέντρων βαρών των βαρών (ROC), 382
  της εντροπίας, 429
  της εντροπίας (EM), 381
  της σχετικής αναλογίας, 267, 483
  του YAGER, 276
  του μέσου βάρους (MW), 381
  του συντελεστή μεταβολής, 382, 386

μέθοδος, του τυπικού σφάλματος (SD), 382
των ακραίων σημείων ή των κορυφών, 83, 85
των αντιστρόφων της ιεράρχησης(RR), 382
των ελαχίστων τετραγώνων, 110, 139
μελλοντική ζήτηση, 120
μέσο αποσαφήνισης, 128
μέσο σφάλμα, 182
μέσο των μεγίστων, 166
μεταβατικά στοιχεία μητρώου, 281
μεταβατικότητα σχέσεων, 297
μεταβλητή απόκρισης, 109
μεταβλητότητα σ^2, 532
μέτρηση της ασαφούς απόστασης κατά τον Heilpern, 544
μετρική, συνάρτηση, 535
Chebyshev, 305
Euclidean, 305
Heilpern, 334
Hausdorff, 537
Chebyshev, 305
Euclidean, 305
manhattan, 305
μετρικός χώρος, 535
μέτρο της ασάφειας (ασαφούς εντροπίας), 42
μη-ομαλές συναρτήσεις, 69
μηχανικές επιστήμες, 351
μονάδα λήψης της απόφασης, 128
μονότονη, αύξουσα συνάρτηση, 75
φθείνουσα συνάρτηση, 75
μοντέλα γεωμετρικής απόστασης, 536
μοντέλο, ικανοποίησης, ανταγωνιστικότητας, 309
ικανοποίησης, ωφελιμότητας, 309
μη-ικανοποίησης ανταγωνιστικότητας, 309
μη-ικανοποίησης, ωφελιμιστικής άποψης, 309
Σταθμισμένου Γινομένου, 266
μορφή συναρτήσεων συμμετοχής, 138

N

νευρωνικά δίκτυα (neural networks), 139
νόμος της διπλής άρνησης (ενέλιξη), 290
νόρμες, 324

O

Οικολογία, 347
ολική χρησιμότητα $U_T(i)$, 533
ομαλές συναρτήσεις, 69
ομοιότητα ή σχετική εγγύτητα, 364
ορισμός ασαφούς συνόλου, 18

Π

παράγωγος συναρτήσεως ασαφών αριθμών, 71
παραμετρικό πρόβλημα, 248
παραμετρικός προγραμματισμός, 240
σε ασαφές γραμμικό, 246
παράμετροι υπόθεσης, 187
παρεμβολή, 134
Lagrange, 139
παροχή, 194
πεδίο ορισμού, 24
πίεση, 194
πλεονασμός (Redundancy), 131
πληθάριθμος, 42
πληρότητα, 131
σχέσεων, 297
πολλαπλασιασμός, 64
διαστημάτων εμπιστοσύνης, 66
πολλαπλασιαστές Lagrange, 223
πολυκριτηριακές Μέθοδοι Απόφασης, 265
πολυκριτηριακή, ανάλυση, 265
απόφαση, 265
θεωρία χρησιμότητας, 265
πολυστοχική Απόφαση, 265, 268, 275
πολυχαρακτηριστική Απόφαση, 265, 275
ποσοστό αλήθειας, 290
πραγματικό Γ.Κ., 531
προάσπιση της ανθρώπινης υγείας, 349
πρόβλημα, αρχικής τιμής, 564, 611
αρχικών τιμών, 583
οριακών τιμών $z(0)=z_o$, $z(1)=z_1$, 583, 585
οριακών τιμών $z(0)=z_0$, $dz/dT\,|\,T=1= z_1$, 583, 587
του Euler, 606
πρόγραμμα, Vertex σε Visual Fortran, 100
αρχικής μεθόδου TOPSIS, 375
ασαφούς συμβιβαστικού προγραμματισμού, 337

με τη μέθοδο Jahanshahloo et al., 424
με τη συμβατική μέθοδο VIKOR, 455
με την ασαφή μέθοδο VIKOR, 473
με τις μεθόδους μετασχηματισμού GMIR, centroid, Muley-Bajaj, 438
συμβιβαστικού προγραμματισμού, 326
σύνθετου συμβιβαστικού προγραμματισμού, 354
προγράμματα τροποποιημένης μεθόδου TOPSIS, 388
προκύπτουσα α-τομή ακραίου σημείου, 92
προσεταιριστικότητα της ένωσης, 14
προσεταιριστικότητα της τομής, 14
πρόσθεση, 62
προτασιακοί τύποι, 16
διάζευξη, 16
σύζευξη, 16
συνεπαγωγή, 17
προτιμητέο, ακριβώς, 296
ασθενικά, 296
ισχυρά, 296

Ρ

ρητό υπολογιστικό σχήμα, 604
ροές προτίμησης, 268

Σ

σαφής «απόφαση μεγιστοποίησης», 240
σημείο ουτοπίας, 302
σκληρή περίπτωση, 277
σταθμισμένες. αποστάσεις, 266
κανονικοποιημένες βαθμολογίες, 371
σταθμισμένη απόσταση του Hamming, 485
σταθμισμένο Αθροιστικό μοντέλο, 265
σταθμισμένος αλγόριθμος μέτρησης, 171
στήριγμα (support), 24
στήριγμα διακριτό, 24
σύζευξη, 289
συμβατική απόσταση μεταξύ ασαφών αριθμών, 538
συμβατική προσέγγιση, 471
συμβιβαστικές μέθοδοι, 266
συμβιβαστική λύση, 306
συμβιβαστικός προγραμματισμός, 266, 295
συμμετρία των ασαφών συνόλων, 237
συμμετρικο αντίστροφο μητρώο, 280
συμπλήρωμα, 12
συνάθροιση των ασαφών αποκρίσεων, 144
συναρτήσεις, (μετασχηματισμοί, απεικονίσεις), 52
απόστασης (μετρικές), 304
ασαφών αριθμών, 68
τριγωνομετρικές και υπερβολικές ασαφών αριθμών δευτέρου είδους, 74
penalty, 223
συνάρτηση, αναφοράς, 112
ανώμαλη , 69
αύξουσα, 566
εκτέλεσης, 221
εκτίμησης, 277
επικάλυψης ενός συστήματος κανόνων, 131
κατάταξης, 511, 532
μη ομαλή, 69
ομαλή, 69
πιθανότητας, 25, 26
προτίμησης, 268
σαφής αντικειμενική, 238
συμμετοχής, 18
συνημιτονοειδής, 202
τύπου 1, 203
τύπου 2, 203
τύπου Gauss, 202
Gaussian, 187
φθείνουσα, 566
χαρακτηριστική, 9
χρησιμότητας, 509
σύνδεσμοι εκτέλεσης, 289
σύνδεσμος, διάζευξης ή, 127
σύζευξης και, 127
συνδετικός τελεστής, 237
συνδυασμός, ανηγμένων σταθμισμένων αθροισμάτων, 146
σταθμισμένων αθροισμάτων, 146
συνδυαστική συνάρτηση P , 92
συνεπαγωγή, 289, 292
συνεπή στοιχεία μητρώου, 281
σύνθεση συναρτήσεων, 55
σύνθετες συναρτήσεις απόστασης, 304

σύνθετος συμβιβαστικός προγραμματισμός, 343
συνθήκη διαφορισιμότητας, 591
συνθήκη, ικανοποίησης-μη ικανοποίησης, 277, 308
της «μη ικανοποίησης», 225, 237
του Lipschitz, 608
του διαστήματος, 576
ύπαρξης ασαφούς λύσης, 591
σύνολα φραγμένα, 15
σύνολο, αναφοράς, 9
βαθμονόμησης (Training set), 169
T, 181
εκτίμησης V, 181
εναλλακτικών δραστηριοτήτων, 221
κλασσικό ή συμβατικό, (crisp), 10
κοφτό, 10
μάθησης (training set), 188
μεγιστοποίησης, 238
μεγιστοποίησης maximizing set, 238
περιορισμών, 221
πρόβλεψης, 192
συντελεστής, ασάφειας, 113
συσχέτισης, 182
συρροή στόχων και περιορισμών, 237
σχέση, αδιαφορίας, 297
κατάταξης, 509
προτίμησης, 296, 509
σχετική χρησιμότητα, 296

Τ

ταυτοδύναμη, 152
τελεστές συνδέσμων, 140
τετράγωνο του Kosko, 26
τεχνικές αντικειμενικών βαρών, 382
τεχνική της Διάταξης Προτίμησης με ομοιότητα στην ιδεατή λύση, 266
τιμές, αλήθειας, 18
κατάταξης, 516
τιμή αναφοράς, 301
τομή, 11
των κλασσικών συνόλων, 11
δύο ασαφών συνόλων, 32
τροποποιημένη μέθοδος, 233
τύπος παζαρέματος, 278
τυχαία μεταβλητή, 25
τυχαίος Δείκτης, 283
τυχαιότητα, 219

Υ

υδροστόμια, 192
υπερκύβος, 26
υπερκυβοειδές για υπερχώρο, 88
υπερορθογώνιο για υπερχώρο, 88
υποεπιμεριστικότητα, 86
υποκάλυψη, 42
υποκειμενική εξαγωγή βαρών, 381
υπολογισμός βροχόπτωσης, 195
υπολογιστικό σχήμα πεπλεγμένης μορφής, 604
υπολογισμός, των βαρών με τη μέθοδο CRITIC, 399
των βαρών με τις μεθόδους: Shannon, SD, MW και VC, 389
των PIS και NIS, 371
υποσύνολο, 9
υποσυνολότητα (subsethood), 42

Φ

φραγμένα διαστήματα α-επιπέδου, 563

Χ

χρησιμότητα, 265, 514
χρονοσειρές μεταβλητών, 116

Ω

ωφελιμιστική, άποψη, 278
προσέγγιση, 278