Περιεχομενα

Κεφάλαιο 1. Από την κλασσική λογική στην ασαφή λογική

Κεφάλαιο 6. Προσδιορισμός της βέλτιστης διαδρομής με χρήση ασαφών συνόλων

Κεφάλαιο 8. Ασαφείς εκτιμητές

Κεφάλαιο 9. Ουρές αναμονής με χρήση ασαφών εκτιμητών

2. Ασαφης Συνεπαγωγη

2.1. Κλασσική συνεπαγωγή

Μια πολύ σημαντική σύνδεση, στα μαθηματικά και όχι μόνο, προτάσεων μεταξύ τους είναι ο σύνδεσμος *«Εάν…, τότε…»*. Η συμπλήρωση των κενών με προτάσεις προσδιορίζει μια **υπόθεση**, η οποία στα κλασσικά μαθηματικά, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορεί να είναι είτε αληθής, είτε ψευδής. Π.χ., αν στο πρώτο κενό εισαχθεί η πρόταση *p: «Το σύνολο A περιέχει τα στοιχεία 1, 2, 3 και 5 και το σύνολο B περιέχει τα στοιχεία 1, 2, 3, 5 και 7»*, και στο δεύτερο κενό η πρόταση *q: «το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B»*, τότε προσδιορίζεται ο σύνδεσμος:

> ***Εάν*** *το σύνολο A περιέχει τα στοιχεία 1, 2, 3 και 5 και το σύνολο B περιέχει τα στοιχεία 1, 2, 3, 5 και 7,* ***τότε*** *το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B.*

Στην παραπάνω υπόθεση, η πρόταση *p* ονομάζεται **ηγούμενος όρος** (ή λόγος ή εισροή ή αιτία), ενώ η πρόταση *q* **επόμενος όρος** (ή ακολουθία ή εκροή ή αιτιατό). Το σύνδεσμο *«Εάν…, τότε…»* τον ονομάζουμε **συνεπαγωγή** και τον συμβολίζουμε με $\Rightarrow$ ή $\rightarrow$.

Στην κλασσική λογική, όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1 του παρόντος, υπάρχει ένα συνεπάγεται που ορίζεται ως $p \Rightarrow q \equiv n(p) \vee q$ (όπου $n(p)$ είναι η άρνηση της *p* και $\vee$ το μέγιστο). Αν λάβουμε υπόψη ότι οι προτάσεις *p* και *q* λαμβάνουν μόνο τις τιμές 0 και 1 (ψεύδος, αλήθεια), είναι καθορισμένες οι τιμές που λαμβάνει το κλασσικό συνεπάγεται, (βλ. Πίνακα 1.4). Αντίθετα, στην ασαφή λογική, οι προτάσεις p και q λαμβάνουν οποιαδήποτε τιμή που ανήκει στο κλειστό διάστημα [0,1]. Έτσι, αποτελούν ασαφή σύνολα, ορισμένα πάνω σε αντίστοιχα κλασικά, και ο βαθμός αλήθειας τους υπολογίζεται από τις συναρτήσεις συμμετοχής τους. Αυτά τα ασαφή σύνολα καλούνται γλωσσικές μεταβλητές (linguistic variables) οι οποίες παίρνουν τιμές πέραν του δυαδικού 0 και 1. Για παράδειγμα λέμε *μέτριο ύψος*, *υψηλό εισόδημα*, *μεγάλη ταχύτητα*, *υψηλή θερμοκρασία*, κ.λπ. Σε ένα σύνολο μετρήσεων, αυτές οι μεταβλητές παίρνουν τιμές στο [0,1]. Με αυτόν τον τρόπο δεν μπορούμε να πούμε ότι αληθεύουν (ή δεν αληθεύουν) απόλυτα και ο λόγος είναι η ύπαρξη της ασάφειας. Ως επακόλουθο και επειδή οι γλωσσικές μεταβλητές περιγράφουν καλύτερα την ανθρώπινη αντίληψη σε προτάσεις και έννοιες, δημιουργήθηκε η ανάγκη της γενίκευσης των κλασικών εννοιών και στο πεδίο των συμπερασμών. Έτσι, **με τις γλωσσικές μεταβλητές ορίζονται οι ασαφείς συνεπαγωγές, οι οποίες αποτελούν την επέκταση της κλασικής συνεπαγωγής**. Σε αντίθεση με την κλασική συνεπαγωγή, θα δούμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε άπειρου πλήθους ασαφείς συνεπαγωγές, καθιστώντας πλέον ζητούμενο την επιλογή της καταλληλότερης.

2.2. Εισαγωγή στην ασαφή συνεπαγωγή

Στην ασαφή λογική, η αλήθεια ή το ψεύδος των **ασαφών προτάσεων** είναι ζήτημα **βαθμού,** σε αντίθεση με την κλασική λογική όπου η αλήθεια ή το ψεύδος παίρνουν τιμές στο σύνολο {0,1}. Με ανάλογο τρόπο, οι ασαφείς συνεπαγωγές γενικεύουν αυτές της κλασικής λογικής. Έστω $x, y \in [0,1]$ οι βαθμοί αλήθειας δύο ασαφών προτάσεων *p* και *q*. Δεδομένου ότι η κλασική συνεπαγωγή ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση (βλ. και §1.2):

$$x \Rightarrow y \equiv n(x) \vee y$$

η ασαφής συνεπαγωγή, ως επέκταση της κλασικής συνεπαγωγής, ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$x \Rightarrow y \equiv n(x) \nabla y$$

Ανάλογα με την επιλογή των ασαφών πράξεων προκύπτουν διάφορες ασαφείς συνεπαγωγές. Εάν για παράδειγμα αντικαταστήσουμε όπου $n(x) = 1 - x$, (βλ. §1.21), και $\nabla = \vee = \max$, η ασαφής συνεπαγωγή γίνεται:

$$x \Rightarrow y \equiv (1-x) \vee y \quad \text{και} \quad x, y \in [0,1] \tag{2.1}$$

Ο βαθμός αλήθειας, π.χ., της συνεπαγωγής $0.4 \Rightarrow 0.3$ με βάση τη σχέση (2.1) είναι $0.4 \Rightarrow 0.3 = (1-0.4) \vee 0.3 = 0.6 \vee 0.3 = 0.6$.

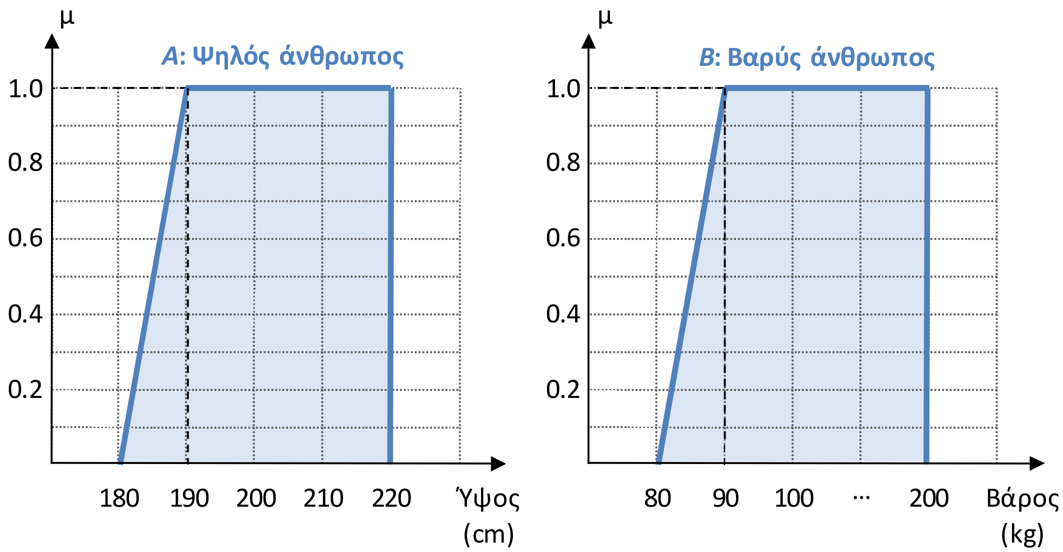
Έτσι λοιπόν προσδιορίζουμε τους βαθμούς αλήθειας μιας συνεπαγωγής, δηλαδή την ασαφή συνεπαγωγή $J : [0, J] \times [0,1] \to [0,1]$ ώστε $J(x, y) = x \Rightarrow y$, και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.1) έχουμε:

$$J(x, y) = x \Rightarrow y = (1-x) \vee y \tag{2.2}$$

Πώς όμως η παραπάνω σχέση μεταφέρεται στα ασαφή σύνολα; Θα το αναλύσουμε με τη βοήθεια ενός παραδείγματος. Ας θεωρήσουμε μια ασαφή συνεπαγωγή **ψηλός άνθρωπος ⇒ βαρύς άνθρωπος** και τα παρακάτω ασαφή σύνολα και συναρτήσεις συμμετοχής, (Σχήμα 2.1):

$$A(x)=\begin{cases}0.1x-18 & \text{για} \quad 180\le x\le 190\\ 1 & \text{για} \quad 190\le x\le 220\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases} \tag{2.3}$$

$$B(x)=\begin{cases}0.1x-8 & \text{για} \quad 80\le x\le 90\\ 1 & \text{για} \quad 90\le x\le 200\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases} \tag{2.4}$$



ΣΧΗΜΑ 2.1. ΟΙ ΑΣΑΦΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ «ΨΗΛΟΣ ΑΝΘΡΩΠΟΣ» ΚΑΙ «ΒΑΡΥΣ ΑΝΘΡΩΠΟΣ».

Η παραπάνω ασαφής συνεπαγωγή *ψηλός άνθρωπος* $\Rightarrow$ *βαρύς άνθρωπος* ανάμεσα σε δυο γλωσσικές μεταβλητές μπορεί να παράξει πολλές αριθμητικές συνεπαγωγές της μορφής $A(x)\Rightarrow B(x)$, π.χ. «*άνθρωπος ύψους 185cm* $\Rightarrow$ *άνθρωπος βάρους 83kg*». Ποιός όμως είναι ο βαθμός αλήθειας της παραπάνω συνεπαγωγής;

Από τις σχέση (2.3) προκύπτει $A(185\,\text{cm})=0.5$, ενώ από τη σχέση (2.4) ότι $B(83\,\text{kg})=0.3$. Συνεπώς, από τη σχέση (2.2) προκύπτει:

$$185\,\text{cm}\Rightarrow 83\,\text{kg} = A(185\,\text{cm})\Rightarrow B(83\,\text{kg}) = 0.5\Rightarrow 0.3 = (1-0.5)\vee 0.3 = 0.5\vee 0.3 = 0.5$$

δηλαδή ο βαθμός αλήθειας της συνεπαγωγής «*άνθρωπος ύψους 185cm* $\Rightarrow$ *άνθρωπος βάρους 83kg*» είναι ίσος με 0.5.

Μια άλλη ενδεχόμενη συνεπαγωγή είναι η $190\,\text{cm} \Rightarrow 90\,\text{kg}$. Υπολογίζουμε, όπως προηγουμένως, το βαθμό αλήθειας της συνεπαγωγής έχοντας $A(190\,\text{cm}) = 1$ και $B(90\,\text{kg}) = 1$, συνεπώς:

$$190\,\text{cm} \Rightarrow 90\,\text{kg} = A(190\,\text{cm}) \Rightarrow B(90\,\text{kg}) = 1 \Rightarrow 1 = (1-1) \vee 1 = 0 \vee 1 = 1$$

Εξετάζουμε στη συνέχεια και άλλες συνεπαγωγής και προσδιορίζουμε το βαθμό αλήθειας τους:

- $183\,\text{cm} \Rightarrow 85\,\text{kg} = A(183\,\text{cm}) \Rightarrow B(85\,\text{kg}) = 0.3 \Rightarrow 0.5 = (1-0.3) \vee 0.5 = 0.7 \vee 0.5 = 0.7$
- $189\,\text{cm} \Rightarrow 95\,\text{kg} = A(189\,\text{cm}) \Rightarrow B(95\,\text{kg}) = 0.9 \Rightarrow 1 = (1-0.9) \vee 1 = 0.1 \vee 1 = 1$
- $170\,\text{cm} \Rightarrow 75\,\text{kg} = A(170\,\text{cm}) \Rightarrow B(75\,\text{kg}) = 0 \Rightarrow 0 = (1-0) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$
- $163\,\text{cm} \Rightarrow 88\,\text{kg} = A(163\,\text{cm}) \Rightarrow B(88\,\text{kg}) = 0 \Rightarrow 0.8 = (1-0) \vee 0.8 = 1 \vee 0.8 = 1$
- $218\text{cm} \Rightarrow 100\,\text{kg} = A(218\,\text{cm}) \Rightarrow B(100\,\text{kg}) = 1 \Rightarrow 1 = (1-1) \vee 1 = 0 \vee 1 = 1$
- $189\text{cm} \Rightarrow 89\,\text{kg} = A(189\,\text{cm}) \Rightarrow B(89\,\text{kg}) = 0.9 \Rightarrow 0.9 = (1-0.9) \vee 0.9 = 0.1 \vee 0.9 = 0.9$

Δηλαδή, εντελώς πρακτικά, η ασαφής συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$ μεταξύ δύο συνόλων *A* και *B*, $A: X \to [0,1]$, $B: Y \to [0,1]$, ουσιαστικά περιλαμβάνει άπειρες συνεπαγωγές μεταξύ των τιμών αλήθειας $A(x) \Rightarrow B(y)$, όπου $x \in X$, $y \in Y$, κι αν χρησιμοποιήσουμε την επέκταση της κλασσικής συνεπαγωγής τότε έχουμε $A(x) \Rightarrow B(y) = (1 - A(x)) \vee B(y)$.

Όλα όσα προαναφέρθηκαν προέρχονται και απορρέουν από τη γενίκευση της κλασσικής συνεπαγωγής, ωστόσο όπως το ασαφές *και* (Δ), το ασαφές *ή* (∇) και η άρνηση (n), έτσι και η ασαφής συνεπαγωγή ορίζεται και αξιωματικά. Πριν όμως διατυπώσουμε την αξιωματική θεμελίωση της ασαφούς συνεπαγωγής, και καθώς το παρόν σύγγραμμα αναφέρεται κυρίως σε μηχανικούς, θα αναφερθούμε και σε ένα **μη μαθηματικό συνεπάγεται**. Πρόκειται για τη συνεπαγωγή του Mamdani που ορίζεται ως εξής:

$$J_{Mamdami}(x,y) = x \Rightarrow y = A(x) \Rightarrow B(y) = \min\{x,y\} = x \wedge y \tag{2.5}$$

Η ασαφής συνεπαγωγή του Mamdani, η οποία αποτελεί την πρώτη επιλογή στο υποπρόγραμμα FIS (Fuzzy Inference Systems) του λογισμικού MATLAB (βλ. §1.22), είναι η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος ασαφούς συνεπαγωγής. Ήταν μεταξύ των πρώτων συστημάτων ελέγχου που δημιουργήθηκαν από τη θεωρία των ασαφών συνόλων. Προτάθηκε το 1975 σε μια προσπάθεια να ελεγχθεί η συνεργασία μιας ατμομηχανής και ενός ατμολέβητα, συνθέτοντας ένα σύνολο κανόνων γλωσσικού ελέγχου που διατυπώνονταν από έμπειρους χειριστές, [Mamdani and Assilian, 1975; Mamdani, 1976; Mamdani, 1977; King and Mamdani, 1977]. Η προσπάθεια του Mamdani βασίστηκε στην κλασσική εργασία του Zadeh στους ασαφείς αλγόριθμους για πολύπλοκα συστήματα και διαδικασίες λήψης αποφάσεων, [Zadeh, 1973].

Το MATLAB δηλαδή υιοθετεί ως πρώτη επιλογή ένα *μη μαθηματικό συνεπάγεται*, που είναι ουσιαστικά ένα *και* (Δ), το οποίο είναι συμμετρικό, δηλαδή $x \Rightarrow y \equiv y \Rightarrow x$. Οι συμμετρικές αυτές ασαφείς συνεπαγωγές ονομάστηκαν και **μηχανικές συνεπαγωγές** (engineering implications) γιατί χρησιμοποιούνται ευρέως στην επιστήμη των μηχανικών, όπου συχνά το αίτιο και το αιτιατό (cause and causality) είναι συγκεχυμένα και συνεπώς η συμμετρικότητα αποδεκτή.

Χρησιμοποιώντας την ασαφή συνεπαγωγή του Mamdani, τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος της συνεπαγωγής *ψηλός άνθρωπος* $\Rightarrow$ *βαρύς άνθρωπος* μεταβάλλονται και διαμορφώνονται ως εξής:

- $183\,\text{cm} \Rightarrow 85\,\text{kg} = A(183\,\text{cm}) \Rightarrow B(85\,\text{kg}) = 0.3 \Rightarrow 0.5 = 0.3 \wedge 0.5 = 0.3$
- $189\,\text{cm} \Rightarrow 95\,\text{kg} = A(189\,\text{cm}) \Rightarrow B(95\,\text{kg}) = 0.9 \Rightarrow 1 = 0.9 \wedge 1 = 0.9$
- $170\,\text{cm} \Rightarrow 75\,\text{kg} = A(170\,\text{cm}) \Rightarrow B(75\,\text{kg}) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \wedge 0 = 0$
- $163\,\text{cm} \Rightarrow 88\,\text{kg} = A(163\,\text{cm}) \Rightarrow B(88\,\text{kg}) = 0 \Rightarrow 0.8 = 0 \wedge 0.8 = 0$
- $218\text{cm} \Rightarrow 100\,\text{kg} = A(218\,\text{cm}) \Rightarrow B(100\,\text{kg}) = 1 \Rightarrow 1 = 1 \wedge 1 = 1$
- $189\text{cm} \Rightarrow 89\,\text{kg} = A(189\,\text{cm}) \Rightarrow B(89\,\text{kg}) = 0.9 \Rightarrow 0.9 = 0.9 \wedge 0.9 = 0.9$

Η ασαφής συνεπαγωγή του Mamdami δεν είναι η μοναδική γνωστή και ευρέως χρησιμοποιούμενη μηχανική συνεπαγωγή. Η συνεπαγωγή του Larsen είναι και αυτή μια συμμετρική συνεπαγωγή που ορίζεται ως:

$$J_{Larsen}(x,y) = x \Rightarrow y = A(x) \Rightarrow B(y) = x \cdot y \tag{2.6}$$

και διαμορφώνει τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος της συνεπαγωγής *ψηλός άνθρωπος* $\Rightarrow$ *βαρύς άνθρωπος* ως εξής:

- $183\,\text{cm} \Rightarrow 85\,\text{kg} = A(183\,\text{cm}) \Rightarrow B(85\,\text{kg}) = 0.3 \Rightarrow 0.5 = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$
- $189\,\text{cm} \Rightarrow 95\,\text{kg} = A(189\,\text{cm}) \Rightarrow B(95\,\text{kg}) = 0.9 \Rightarrow 1 = 0.9 \cdot 1 = 0.9$
- $170\,\text{cm} \Rightarrow 75\,\text{kg} = A(170\,\text{cm}) \Rightarrow B(75\,\text{kg}) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \cdot 0 = 0$
- $163\,\text{cm} \Rightarrow 88\,\text{kg} = A(163\,\text{cm}) \Rightarrow B(88\,\text{kg}) = 0 \Rightarrow 0.8 = 0 \cdot 0.8 = 0$

- $218\text{cm} \Rightarrow 100\,\text{kg} = A(218\,\text{cm}) \Rightarrow B(100\,\text{kg}) = 1 \Rightarrow 1 = 1 \cdot 1 = 1$
- $189\text{cm} \Rightarrow 89\,\text{kg} = A(189\,\text{cm}) \Rightarrow B(89\,\text{kg}) = 0.9 \Rightarrow 0.9 = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81$

Από τις υπολογισθείσες τιμές των διαφόρων συνεπαγωγών διαπιστώνουμε ότι οι τιμές των δυο συμμετρικών συνεπαγωγών ($J_{Mamdami}$ και J_{Larsen}) είναι σχετικά κοντινές, διαφέρουν όμως αισθητά από τις τιμές της συνεπαγωγή της σχέσης (2.2), η οποία όπως θα δούμε στη συνέχεια ονομάζεται **ασαφής συνεπαγωγή Kleene–Dienes** ($J_{Kleene-Dienes}$).

2.3. Αξιωματική θεμελίωση της ασαφούς συνεπαγωγής

Ασαφές συνεπαγωγή είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $J:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ που πληροί στο μέγιστο τα παρακάτω εννέα αξιώματα:

1. Αν $a \le b$ συνεπάγεται ότι $J(a,x) \ge J(b,x)$ (μονοτονία ως προς την πρώτη μεταβλητή).
2. Αν $a \le b$ συνεπάγεται ότι $J(x,a) \le J(x,b)$ (μονοτονία ως προς τη δεύτερη μεταβλητή).
3. $J(0,a) = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το ψεύδος συνεπάγεται οτιδήποτε (κυριαρχία του ψεύδους).
4. $J(1,b) = b$. Αυτό σημαίνει ότι η αλήθεια δεν συνεπάγεται οτιδήποτε (ουδετερότητα της αλήθειας).
5. $J(a,a) = 1$ (ταυτότητα).
6. $J(a,J(b,x)) = J(b,J(a,x))$ (ιδιότητα της αλλαγής). Αυτό το αξίωμα γενικεύει την ταυτότητα $a \Rightarrow (b \Rightarrow x) \equiv b \Rightarrow (a \Rightarrow x)$ που ισχύει στην κλασσική λογική. Πράγματι:
$$a \Rightarrow (b \Rightarrow x) = n(a) \vee (b \Rightarrow x) = n(a) \vee (n(b) \vee x) = n(a) \vee n(b) \vee x = n(b) \vee (n(a) \vee x) =$$
$$= n(b) \vee (a \Rightarrow x) = b \Rightarrow (a \Rightarrow x)$$
7. $J(a,b) = 1 \Leftrightarrow a \le b$ (συνοριακή συνθήκη). Σημαίνει ότι οι ασαφείς συνεπαγωγές είναι αληθείς αν και μόνο αν ο ακόλουθος όρος είναι τουλάχιστον τόσο αληθής όσο ο ηγούμενος όρος. Μην ξεχνάμε ότι ξεκινάμε από μια ασαφή συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$, αν $A(x) \Rightarrow B(x) = 1$, δηλαδή αν $a \Rightarrow b = 1 \Leftrightarrow J(a,b) = 1 \Leftrightarrow A(x) \le B(x)$.
8. $J(a,b) = J(n(b),n(a))$. Δηλαδή δυο ασαφείς συνεπαγωγές είναι ταυτόσημες αν ο ηγούμενος και ο ακόλουθος όρος εναλλαχθούν, αφού προηγουμένως πάρουμε την άρνηση τους. Ουσιαστικά το συγκεκριμένο αξίωμα είναι μια **γενίκευση** της μεθόδου της **εις άτοπον απαγωγής** της κλασσικής λογικής, (βλ. και §1.2, Παρά-

δειγμα 1.5). Πράγματι αν p και q δυο προτάσεις της κλασσικής λογικής, $p,q \in \{0,1\}$, τότε $p \Rightarrow q \equiv n(q) \Rightarrow n(p)$.

9. Η J είναι μια συνεχής συνάρτηση. Αυτό το αξίωμα διασφαλίζει ότι μικρές μεταβολές στους βαθμούς αλήθειας της προηγούμενης ή της ακόλουθης πρότασης δεν δημιουργούν μεγάλες αλλαγές στους βαθμούς αλήθειας της ασαφούς συνεπαγωγής.

Καμία από τις παραπάνω αξιωματικές ιδιότητες της ασαφούς συνεπαγωγής δεν εμπεριέχει τη συμμετρία των ασαφών συνεπαγωγών του Mamdani και του Larsen που παρουσιάσθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Συνεπώς, θα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και χρησιμότητα ο προσδιορισμός μη συμμετρικών ασαφών συνεπαγωγών, οι οποίες θα διακρίνουν τη σχέση μεταξύ αιτίας και αιτιατού.

2.4. Μη συμμετρικές ασαφείς συνεπαγωγές

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν θεωρήσουμε την κλασσική συνεπαγωγή $a \Rightarrow b$, όπου $a,b \in \{0,1\}$, τότε πληρούνται όλες οι περιγραφείσες αξιωματικές ιδιότητες της ασαφούς συνεπαγωγής, πλην της 9. Επίσης, πρέπει να δοθεί σημασία στο γεγονός ότι **η κλασσική συνεπαγωγή είναι περιορισμός της ασαφούς συνεπαγωγής**, καθώς η κλασσική συνεπαγωγή είναι συνάρτηση $J:\{0,1\}\times\{0,1\}\rightarrow\{0,1\}$ έναντι $J:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ της ασαφούς.

Μπορούμε όμως να ορίσουμε μια **ασαφή συνεπαγωγή**, η οποία θα αποτελεί **γενίκευση της κλασσικής συνεπαγωγής**, ως εξής:

$$J_c:[0,1]\rightarrow[0,1] \text{ με } J_c(a,b)=n(a)\vee b=\max\{(1-a),\ b\},\ \forall a,b\in[0,1] \tag{2.7}$$

δηλαδή $J_c(a,b)=a\overset{c}{\Rightarrow}b=\max\{1-a,b\}$.

Η σχέση (2.7) μπορεί να αποδειχθεί ότι πληροί όλα τα αξιώματα της §2.3 εκτός του 7.

Λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι η γενίκευση της κλασσικής συνεπαγωγής ορίζεται ως:

$$J_c(x,y)=x\overset{c}{\Rightarrow}y=n(x)\vee y=(1-x)\vee y \tag{2.8}$$

τυπικά μπορούμε αντί για $\vee=\max$ να θέσουμε μια t-conorm (∇) και αντί για $n(x)=1-x$ μια οποιαδήποτε άρνηση, π.χ. την άρνηση που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (§1.21):

$$n_\lambda(x)=\frac{1-x}{1+\lambda x},\ \lambda>-1 \tag{2.9}$$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την t-conorm, $x\nabla y = x + y - xy$ (probor) και ως άρνηση την $n(x) = 1 - x$, τότε:

$$J_c(x,y) = x \overset{c}{\Rightarrow} y = n(x) \vee y = n(x) + y - n(x)y = (1-x) \vee y$$

συνεπώς:

$$J_c(x,y) = x \overset{c}{\Rightarrow} y = (1-x) + y - (1-x)y = 1 - x + y - y + xy = 1 - x + xy$$

Προκύπτει έτσι μια νέα συνεπαγωγή, η $J_c(x,y) = 1 - x + xy$, η οποία καλείται **ασαφής συνεπαγωγή Reichenbach** ($J_{\text{Reichenbach}}$), [Klir and Yuan, 1995].

Αν στη σχέση (2.8) χρησιμοποιήσουμε την άρνηση $n_\lambda(x)$ της σχέσης (2.9) και t-conorm (∇) το probor, προκύπτει η συνεπαγωγή:

$$J_c(x,y) = x \overset{c}{\Rightarrow} y = n_\lambda(x)\nabla y = n_\lambda(x) + y - n_\lambda(x)y \qquad \text{άρα}$$

$$J_c(x,y) = \frac{1-x}{1+\lambda x} + y - \frac{y(1-x)}{1+\lambda x} \qquad \text{άρα}$$

$$J_c(x,y) = \frac{1 - x + y(1+\lambda x) - y(1-x)}{1+\lambda x},\ \lambda > -1$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο, δηλαδή ως επέκταση της κλασσικής συνεπαγωγής, μπορούμε να κατασκευάσουμε κι άλλες ασαφείς συνεπαγωγές, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μια t-conorm και μια άρνηση. Συμβολίζουμε όλες τις παραγόμενες ασαφείς συνεπαγωγές με J_c ώστε να είναι πρόδηλο ότι προέρχονται από την κλασσική συνεπαγωγή, παράγονται δηλαδή από τη μορφή $n(x)\nabla y$. Η μορφή όμως αυτή *δεν είναι μοναδική*.

Μέχρι τώρα είδαμε την κλασική συνεπαγωγή να ορίζεται από την εξής σχέση: $p \Rightarrow q \equiv n(p) \vee q$ ($p,\ q \in \{0,1\}$). Όμως μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ισχύει και η σχέση $p \Rightarrow q = n(p) \vee (p \cap q)$, που είναι ένας δεύτερος και ισοδύναμος τρόπος έκφρασης της κλασικής συνεπαγωγής. Η κλασική αυτή συνεπαγωγή είναι δυνατόν να επεκταθεί στην ασαφή λογική. Θεωρώντας $x, y \in [0,1]$ έχουμε:

$$J_{c_1}(x,y) = x \Rightarrow y = n(x)\nabla(x\Delta y) \tag{2.10}$$

Πρέπει όμως η τριάδα Δ, n, ∇ να είναι τριάδα De Morgan. Μια τέτοια τριάδα De Morgan είναι η:

– $\Delta = \wedge = \min$

- $n(x)=1-x$
- $\nabla=\vee=\max$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω τριάδα De Morgan έχουμε:

$$J(x,y)=x\Rightarrow y=\max\{1-x,\min(x,y)\} \tag{2.11}$$

η οποία ονομάζεται **ασαφής συνεπαγωγή Zadeh** (J_{Zadeh}), [Klir and Yuan, 1995].

Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να παράξουμε και άλλες ασαφείς συνεπαγωγές. Έστω ότι $\Delta=\cdot$, $n(x)=1-x$ και $\nabla=\text{probor}$. Τότε:

$$J(x,y)=x\Rightarrow y=(1-x)\nabla(xy)=1-x+xy-(1-x)xy=1-x+xy-xy+x^2y=1-x+x^2y \tag{2.12}$$

η οποία ονομάζεται **ασαφής συνεπαγωγή Klir and Yuan 1** ($J_{Klir\ and\ Yuan\ 1}$), [Klir and Yuan, 1995].

Με αφετηρία και πάλι την κλασσική συνεπαγωγή $p\Rightarrow q\equiv(n(p)\wedge n(q))\vee q\ (p,q\in\{0,1\})$, στο ίδιο πνεύμα, θεωρώντας $x,y\in[0,1]$ ορίζουμε την ασαφή συνεπαγωγή:

$$J_{c_2}(x,y)=x\Rightarrow y=\left(n(x)\Delta n(y)\right)\nabla n(y) \tag{2.13}$$

Άσκηση 2.1: Να προσδιορισθεί η μορφή της συνεπαγωγής της σχέσης (2.13) για καθεμιά από τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta=\cdot$, $n(x)=1-x$ και $\nabla=\text{probor}$
- $\Delta=\wedge=\min$, $n(x)=1-x$ και $\nabla=\vee=\max$
- $\Delta=\cdot$, $n_\lambda(x)=\dfrac{1-x}{1+\lambda x}$, $\lambda>-1$ και $\nabla=\text{probor}$

2.5. Θεώρημα Smetz – Magrez

Μια συνάρτηση $J:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ πληροί τα αξιώματα 1 έως 9 των ασαφών συνεπαγωγών (βλ. §2.3) για μια συγκεκριμένη άρνηση n αν και μόνο αν υπάρχει μια γνήσια αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,+\infty]$ τέτοια ώστε, [Smets and Magrez, 1987; Baczyński, 2004, Deschrijver and Kerre, 2005; Reiser et al., 2013; Bedregal and Regivan, 2013]:

- $f(0)=0$,
- $J(x,y)=f^{(-1)}(f(1)-f(x)+f(y)),\ \forall x,y\in[0,1]$,

– $n(x) = f^{-1}(f(1) - f(x)),\ \forall x \in [0,1]$.

Το θεώρημα Smetz – Magrez είναι πολύ σημαντικό διότι δίνει τη δυνατότητα παραγωγής συνεπαγωγών που πληρούν όλα τα αξιώματα της §2.3. Για την πληρότητα του συγγράμματος δίνεται παρακάτω ο τεχνικός ορισμός της **ψευδοαντίστροφης μιας συνάρτησης** $f^{(-1)}$ που χρησιμοποιείται στο θεώρημα Smetz – Magrez.

Ορισμός: Ας θεωρήσουμε $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα συνεχή συνάρτηση με $f(0) = 0$. Η **ψευδοαντίστροφη συνάρτηση** $f^{(-1)}:\mathbb{R} \to [0,1]$ πάντα υπάρχει και ορίζεται ως εξής:

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \in (-\infty, 0) \\ f^{(-1)} & \text{αν} \quad x \in [0, f(1)] \\ 1 & \text{αν} \quad x \in (f(1), +\infty) \end{cases} \tag{2.14}$$

Άσκηση 2.2: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$.

- Πώς εφαρμόζεται το θεώρημα Smetz – Magrez στην παραπάνω συνάρτηση;
- Ποιά ασαφής συνεπαγωγή και ποιά άρνηση μπορεί να εξαχθεί;

Άσκηση 2.3: Έστω η γενίκευση της προηγούμενης συνάρτηση $f_\lambda(x) = \ln(1+\lambda x),\ \lambda > 0$.

- Ποιά ασαφής συνεπαγωγή και ποιά άρνηση μπορεί να εξαχθεί;

2.6. Αξιώματα που ικανοποιούν οι προταθείσες ασαφείς συνεπαγωγές

Στον Πίνακα 2.1 έχουμε συγκεντρώσει τις σημαντικές και ευρέως χρησιμοποιούμενες μη συμμετρικές ασαφείς συνεπαγωγές $J(x,y) = x \Rightarrow y$, που έχουν προταθεί από διάφορους επιστήμονες, το έτος το οποίο προτάθηκαν (ορισμένες ως κλασσικές συνεπαγωγές που επεκτάθηκαν στα ασαφή σύνολα) καθώς, και αυτό είναι το πιο σημαντικό στο συγκεκριμένο πίνακα, τα αξιώματα τα οποία οι συγκεκριμένες συνεπαγωγές ικανοποιούν, [Oh and Bandler, 1987; Klir and Yuan, 1995; Baczyński and Drewniak, 2000].

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1. ΛΙΣΤΑ ΕΥΡΕΩΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕΝΩΝ ΜΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΩΝ.

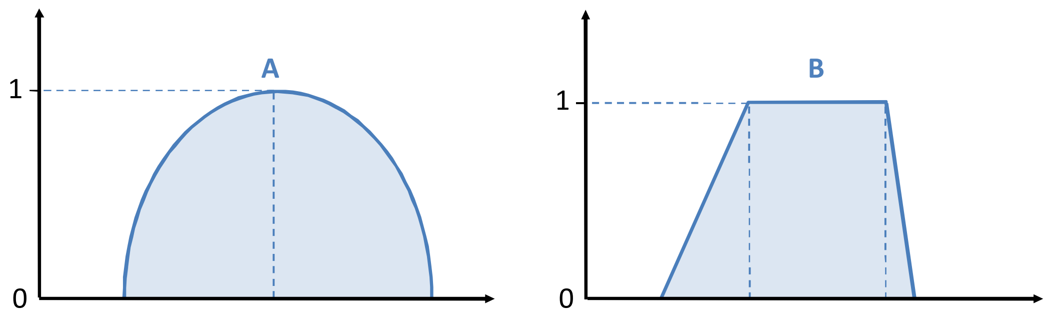
Ονομα συνεπαγωγής	Ετος που προτάθηκε	Συμβολισμός συνεπαγωγής	Συναρτησιακή μορφή συνεπαγωγής $J(x,y)$	Αξιώματα τα οποία ικανοποιεί (βλ. §2.3)
Lukasiewicz	1920	$J_{\text{Lukasiewicz}}$	$\min\{1, 1-x+y\}$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Reichenbach	1935	$J_{\text{Reichenbach}}$	$1-x+xy$	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9
Kleene–Dienes	1938, 1949	$J_{\text{Kleene–Dienes}}$	$\max\{1-x, y\}$	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9
Gaines–Rescher	1969	$J_{\text{Gaines–Rescher}}$	$\begin{cases} 1 & \text{για} \quad x \le y \\ 0 & \text{για} \quad x > y \end{cases}$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Goguen	1969	J_{Goguen}	$\begin{cases} 1 & \text{για} \quad x \le y \\ y/x & \text{για} \quad x > y \end{cases}$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9
Zadeh	1973	J_{Zadeh}	$\max\{1-x, \min(x,y)\}$	1, 2, 3, 4, 9
Gödel	1976	$J_{\text{Gödel}}$	$\begin{cases} 1 & \text{για} \quad x \le y \\ y & \text{για} \quad x > y \end{cases}$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Yager	1980	J_{Yager}	$\begin{cases} 1 & \text{για} \quad x = y = 0 \\ y^x & \quad \text{αλλού} \end{cases}$	1, 2, 3, 4, 6
Wilmott	1980	J_{Wilmott}	$\min\begin{cases} \max(1-x, y) \\ \max(x, 1-x) \\ \max(y, 1-y) \end{cases}$	4, 6, 8, 9
Wu	1986	J_{Wu}	$\begin{cases} 1 & \text{για} \quad x \le y \\ \min(1-x, y) & \text{για} \quad x > y \end{cases}$	1, 2, 3, 5, 7, 8
Klir and Yuan 1	1994	$J_{\text{Klir and Yuan 1}}$	$1-x+x^2 y$	2, 3, 4, 9
Klir and Yuan 2	1994	$J_{\text{Klir and Yuan 2}}$	$\begin{cases} y & \text{για} \quad x = 1 \\ 1-x & \text{για} \quad x \ne 1, y \ne 1 \\ 1 & \text{για} \quad x \ne 1, y = 1 \end{cases}$	2, 4

2.7. Αξιολόγηση ασαφών συνεπαγωγών

Στον Πίνακα 2.1 δόθηκε μια λίστα ασαφών συνεπαγωγών και τα αξιώματα που καθεμιά ικανοποιεί. Ο αριθμός ωστόσο των αξιωμάτων που μια συνεπαγωγή ικανοποιεί δεν αποτελεί και κριτήριο ποιοτικής αξιολόγησής της. Μια συνεπαγωγή που ικανοποιεί έξι από τα αξιώματα της §2.3 (π.χ. η συνεπαγωγή Wu) δεν σημαίνει ότι είναι καταλληλότερη από μια συνεπαγωγή που ικανοποιεί λιγότερα αξιώματα, και το αντίστροφο.

Θα πρέπει συνεπώς να προσδιορισθεί μια μέθοδος ποιοτικής αξιολόγησης των ασαφών συνεπαγωγών η οποία θα επιτρέπει και τη συγκριτική αξιολόγησή τους. Αυτό θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια, να προτείνουμε δηλαδή μια αλγοριθμική διαδικασία ποιοτικής αξιολόγησης ασαφών συνεπαγωγών η οποία θα είναι εύχρηστη και ταυτοχρόνως εύκολη στην κατανόησή της.

Έστω οι μεταβλητές X και Y και $A: X \to [0,1]$, $B: Y \to [0,1]$ τα δύο ασαφή σύνολα του Σχήματος 2.2 στο X και στο Y αντίστοιχα.



Σχημα 2.2. Τα Ασαφη Συνολα Α και Β.

Ας θεωρήσουμε τη συνεπαγωγή $J: A \Rightarrow B$ η οποία, όπως αναλυτικά παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες, είναι μια απεικόνιση $J:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$. Αν $x \in X$, $y \in Y$ και $A(x)$, $B(y)$ οι αντίστοιχοι βαθμοί αλήθειας (οι βαθμοί συμμετοχής δηλαδή των ασαφών συνόλων A και B), έστω ότι πρέπει να επιλέξουμε την καταλληλότερη ασαφή συνεπαγωγή από τις ακόλουθες τρεις:

i) $a \overset{1}{\Rightarrow} b = \min\{a,b\}$ (δηλαδή η $J_{Mamdami}$),

ii) $a \overset{2}{\Rightarrow} b = (1-a) \vee b$,) (δηλαδή η $J_{Kleene-Dienes}$),

iii) $a \overset{3}{\Rightarrow} b = 1 - a + a^2 b$ (δηλαδή η $J_{Klir\ and\ Yuan\ 1}$).

Η αλγοριθμική προσέγγιση την οποία προτείνουμε για την επιλογή της κατάλληλης συνεπαγωγής περιλαμβάνει τα εξής βήματα, (Μποτζώρης κ.α., 2015):

1. Θεωρούμε ότι έχουμε k ζευγάρια παρατηρήσεων (x_i, y_i) που αντιστοιχούν στις τιμές $\left(A(x_i), B(y_i)\right) = (a_i, b_i)$, $i = 1,2,3,\ldots,k$. Τα ζευγάρια των παρατηρήσεων προκύπτουν παίρνοντας τους μέσους όρους τους, για παράδειγμα, για το ζευγάρι $(x_{i1}, y_{i1}),(x_{i2}, y_{i2}),\ldots,(x_{in}, y_{in})$:

   $$x_i = \frac{x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}}{n} \quad \text{και} \quad y_i = \frac{y_{i1} + y_{i2} + \ldots + y_{in}}{n}$$

   Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους αντίστοιχους βαθμούς αλήθειας χρησιμοποιώντας τα ασαφή σύνολα A και B, δηλαδή $A(x_i) = a_i$, $B(x_i) = b_i$.

2. Βαθμονομούμε τις συνεπαγωγές που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις με μονάδα (1), δηλαδή:

   $$a_1 \Rightarrow b_1 = 1,\ a_2 \Rightarrow b_2 = 1,\ \ldots,\ a_k \Rightarrow b_k = 1$$

   Η ύπαρξη παρατηρήσεων μας επιτρέπει να θεωρήσουμε ότι στο ιδανικό ασαφές συμπερασματικό σύστημα, η τιμή αλήθειας της συνεπαγωγής $\alpha_k \Rightarrow b_k$ θα πρέπει να *ισούται με 1*, καθώς τόσο οι τιμές a όσο και οι τιμές b αφορούν παρατηρήσεις, δηλαδή πρόκειται για **επιβεβαιωμένες σχέσεις θεωρούμενου αιτίου και συνεπαγόμενου αιτιατού**. Συνεπώς, η συνεπαγωγή

3. Προσδιορίζουμε τις τιμές αλήθειας που δίνει η συνάρτηση κάθε συνεπαγωγής από τις τρεις που θα αξιολογήσουμε, (Πίνακας 2.2).

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2. ΤΙΜΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΥΠΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΩΝ.

1η συνεπαγωγή: $a \overset{1}{\Rightarrow} b = \min\{a,b\}$	2η συνεπαγωγή: $a \overset{2}{\Rightarrow} b = (1-a) \vee b$	3η συνεπαγωγή: $a \overset{3}{\Rightarrow} b = 1 - a + a^2 b$
$a_1 \overset{1}{\Rightarrow} b_1 = \lambda_1$	$a_1 \overset{2}{\Rightarrow} b_1 = \mu_1$	$a_1 \overset{3}{\Rightarrow} b_1 = v_1$
$a_2 \overset{1}{\Rightarrow} b_2 = \lambda_2$	$a_2 \overset{2}{\Rightarrow} b_2 = \mu_2$	$a_2 \overset{3}{\Rightarrow} b_2 = v_2$
…	…	…
$a_\kappa \overset{1}{\Rightarrow} b_\kappa = \lambda_\kappa$	$a_\kappa \overset{2}{\Rightarrow} b_\kappa = \mu_\kappa$	$a_\kappa \overset{3}{\Rightarrow} b_\kappa = v_\kappa$

4. Υπολογίζουμε τις αποκλίσεις της κάθε ασαφούς συνεπαγωγής από τη μονάδα (1):

   i) $\sigma_1 \overset{1}{\Rightarrow} = \sqrt{(1-\lambda_1)^2 + (1-\lambda_2)^2 + \ldots + (1-\lambda_k)^2}$

   ii) $\sigma_2 \overset{2}{\Rightarrow} = \sqrt{(1-\mu_1)^2 + (1-\mu_2)^2 + \ldots + (1-\mu_k)^2}$

   iii) $\sigma_3 \overset{3}{\Rightarrow} = \sqrt{(1-v_1)^2 + (1-v_2)^2 + \ldots + (1-v_k)^2}$

5. Επιλέγουμε ως καταλληλότερη μεταξύ των τριών τη συνεπαγωγή που **η απόκλιση** σ_i $(i=1,2,3)$ **είναι η μικρότερη**, δηλαδή θεωρούμε το $\min\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

Θα εφαρμόσουμε τον προτεινόμενο αλγόριθμο στο παράδειγμα της ασαφούς συνεπαγωγής *ψηλός άνθρωπος* $\Rightarrow$ *βαρύς άνθρωπος* που παρουσιάστηκε προηγουμένως (βλ. Σχήμα 2.1 και σχέσεις (2.3) και (2.4)). Βήμα προς βήμα η μεθοδολογία έχει ως εξής:

1. Ας υποθέσουμε ότι επιλέξαμε ένα δείγμα ψηλών ανθρώπων και υπολογίσαμε ότι ο μέσος όρος του ύψους τους είναι 185 cm και ο μέσος όρος του βάρους τους είναι 83 kg. Συνεπώς $185\,\text{cm} \Rightarrow 83\,\text{kg}$. Ομοίως, από άλλα δείγματα ψηλών ανθρώπων υπολογίσαμε $189\,\text{cm} \Rightarrow 95\,\text{kg}$, $170\,\text{cm} \Rightarrow 75\,\text{kg}$ και $189\,\text{cm} \Rightarrow 89\,\text{kg}$.

2. Καθώς οι παραπάνω μέσοι όροι ύψους και βάρους αναφέρονται σε πραγματικές παρατηρήσεις, επιβεβαιωμένες δηλαδή σχέσεις θεωρούμενου αιτίου και συνεπαγόμενου αιτιατού, θέτουμε $185\,\text{cm} \Rightarrow 83\,\text{kg} = 1$, $189\,\text{cm} \Rightarrow 95\,\text{kg} = 1$, $170\,\text{cm} \Rightarrow 75\,\text{kg} = 1$ και $189\,\text{cm} \Rightarrow 89\,\text{kg} = 1$ και τα μεταφράζουμε σε τιμές αλήθειας χρησιμοποιώντας τα σύνολα *A* και *B* και τις αντίστοιχες συναρτήσεις τους συμμετοχής, ως εξής:

   – $A(185\,\text{cm}) \Rightarrow B(83\,\text{kg}) = 1$ δηλαδή $0.3 \Rightarrow 0.5 = 1$
   – $A(189\,\text{cm}) \Rightarrow B(95\,\text{kg}) = 1$ δηλαδή $0.9 \Rightarrow 1 = 1$
   – $A(170\,\text{cm}) \Rightarrow B(75\,\text{kg}) = 1$ δηλαδή $0 \Rightarrow 0 = 1$
   – $A(189\,\text{cm}) \Rightarrow B(89\,\text{kg}) = 1$ δηλαδή $0.9 \Rightarrow 0.9 = 1$

3. Θεωρούμε τέσσερεις ασαφείς συνεπαγωγές, τις εξής:

   $J_1(x,y) = \max\{1-x,\ y\}$ (δηλαδή την $J_{Kleene-Dienes}$)

   $J_2(x,y) = \max\{1-x,\ \min\{x,y\}\}$ (δηλαδή την J_{Zadeh})

   $J_3(x,y) = \min\{1,\ 1-x+y\}$ (δηλαδή την $J_{Lukasiewicz}$)

   $J_4(x,y) = 1-x+xy$ (δηλαδή την $J_{Reichenbach}$)

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το βαθμό αλήθειας καθεμιάς από τις τέσσερις συνεπαγωγής που θα αξιολογήσουμε. Ο βαθμός αλήθειας των συνεπαγωγών δίνεται στον Πίνακα 2.3.

4. Υπολογίζουμε, για κάθε αξιολογούμενη συνεπαγωγή, τις αποκλίσεις κάθε προσδιοριζόμενου στο προηγούμενο βήμα βαθμού αλήθειας από τη μονάδα (1), ως εξής:

i) $\sigma \overset{1}{\Rightarrow} = \sqrt{(1-0.7)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0.9)^2} = 0.316$

ii) $\sigma \overset{2}{\Rightarrow} = \sqrt{(1-0.7)^2 + (1-0.9)^2 + (1-1)^2 + (1-0.9)^2} = 0.332$

iii) $\sigma \overset{3}{\Rightarrow} = \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2} = 0$

iv) $\sigma \overset{4}{\Rightarrow} = \sqrt{(1-0.85)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0.91)^2} = 0.314$

5. Επιλέγουμε ως καταλληλότερη, μεταξύ των τεσσάρων, τη συνεπαγωγή με τη μικρότερη απόκλιση από τη μονάδα. Συνεπώς:

$$\min\left\{\sigma \overset{1}{\Rightarrow},\ \sigma \overset{2}{\Rightarrow},\ \sigma \overset{3}{\Rightarrow},\ \sigma \overset{4}{\Rightarrow}\right\} = \sigma \overset{3}{\Rightarrow} = 0$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η καταλληλότερη συνεπαγωγή για να εκφρασθεί η σχέση ισοδυναμίας *ψηλός άνθρωπος* $\Rightarrow$ *βαρύς άνθρωπος* είναι η J_3, δηλαδή η συνεπαγωγή $J_{Lukasiewicz}$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3. ΤΙΜΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΥΠΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΩΝ.

1η συνεπαγωγή $J_{Kleene-Dienes}$	2η συνεπαγωγή J_{Zadeh}	3η συνεπαγωγή $J_{Lukasiewicz}$	4η συνεπαγωγή $J_{Reichenbach}$
$0.3 \overset{1}{\Rightarrow} 0.5 = 0.7$	$0.3 \overset{2}{\Rightarrow} 0.5 = 0.7$	$0.3 \overset{3}{\Rightarrow} 0.5 = 1$	$0.3 \overset{4}{\Rightarrow} 0.5 = 0.85$
$0.9 \overset{1}{\Rightarrow} 1 = 1$	$0.9 \overset{2}{\Rightarrow} 1 = 0.9$	$0.9 \overset{3}{\Rightarrow} 1 = 1$	$0.9 \overset{4}{\Rightarrow} 1 = 1$
$0 \overset{1}{\Rightarrow} 0 = 1$	$0 \overset{2}{\Rightarrow} 0 = 1$	$0 \overset{3}{\Rightarrow} 0 = 1$	$0 \overset{4}{\Rightarrow} 0 = 1$
$0.9 \overset{1}{\Rightarrow} 0.9 = 0.9$	$0.9 \overset{2}{\Rightarrow} 0.9 = 0.9$	$0.9 \overset{3}{\Rightarrow} 0.9 = 0.9$	$0.9 \overset{4}{\Rightarrow} 0.9 = 0.91$

2.8. Εφαρμογή αξιολόγησης ασαφών συνεπαγωγών

2.8.1. Περιγραφή της εφαρμογής

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε μια παραδειγματική εφαρμογή αξιολόγησης ασαφών συνεπαγωγών για τη σχέση που συνδέει τους ψηλούς ανθρώπους με το μεγάλο βάρος. Στην παρούσα θα αναλύσουμε μια εφαρμογή η οποία αναφέρεται σε πραγματικά, δημοσιευμένα σε διεθνή βάση δεδομένων, στατιστικά στοιχεία.

Στον αεροπορικό κλάδο έχει διαπιστωθεί υψηλότατη συσχέτιση μεταξύ της οικονομικής μεγέθυνσης μιας περιοχής, η οποία συνήθως αποτιμάται ικανοποιητικά μέσω του κατά κεφαλήν Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (ΑΕΠ) και του αριθμού αεροπορικών ταξειδιών που πραγματοποιούν οι κάτοικοι της περιοχής. Υπάρχει ένα πλήθος δημοσιευμένων εργασιών που αναλύουν και επιβεβαιώνουν τη συσχέτιση αυτή, [Chin and Tay, 2001; Ishutkina and Hansman, 2009; Marazzo et al., 2010; Suryani et al., 2010; Chang, 2012; Chi and Baek, 2013, Profillidis and Botzoris, 2015].

Με βάση τα δημοσιευμένα στοιχεία της Παγκόσμιας Τράπεζας Επενδύσεων [World Bank, 2015], δίνουμε στον Πίνακα 2.4 το κατά κεφαλήν ΑΕΠ για το έτος 2013 σε US$ (εκφρασμένο σε Ισοτιμία Αγοραστικής Δύναμης[5] και σταθερές τιμές 2011) και τον αριθμό αεροπορικών ταξειδιών ανά 1,000 κατοίκους, επίσης για το έτος 2013, σε 98 χώρες παγκοσμίως σε διάφορες ηπείρους, οι οποίες χώρες αντιπροσωπεύουν περισσότερο από 80% του ΑΕΠ και του επιβατικού αεροπορικού μεταφορικού έργου παγκοσμίως.

2.8.2. Ασαφοποίηση των δεδομένων

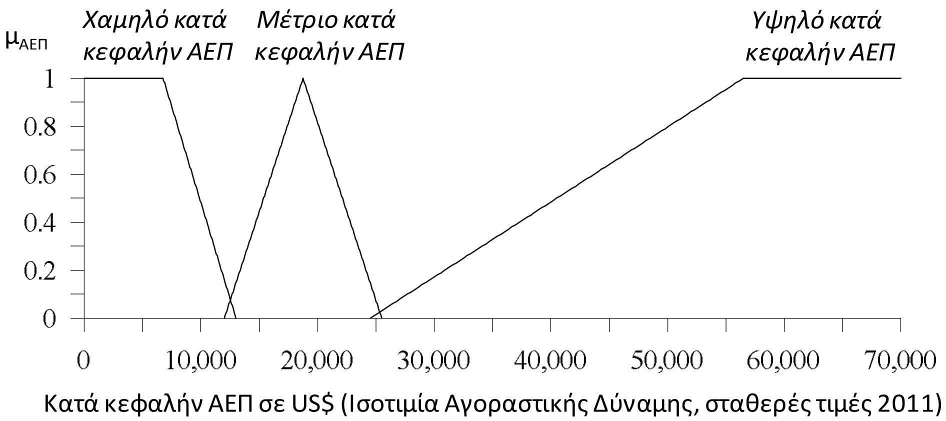
Λαμβάνοντας υπόψη το διαχωρισμό των χωρών ως προς το κατά κεφαλήν ΑΕΠ που προτείνει η Παγκόσμια Τράπεζα αλλά και άλλοι διεθνείς οργανισμοί και συνεκτιμώντας το γεγονός ότι τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 αφορούν ισοτιμία αγοραστικής δύναμης, εκφράσαμε το ασαφές σύνολο *«Μέγεθος του κατά κεφαλήν ΑΕΠ»* (ΑΕΠ) και το διακρίναμε σε *«Χαμηλό κατά κεφαλήν ΑΕΠ»*, *«Μέτριο κατά κεφαλήν ΑΕΠ»* και *«Υψηλό κατά κεφαλήν ΑΕΠ»* με τη βοήθεια ασαφών τριγωνικών και τραπεζοειδών αριθμών, (Σχήμα 2.3). Με παρόμοιο τρόπο εκφράσαμε και το ασαφές σύνολο *«Συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»* (ΑΤ) και το διακρίναμε σε *«Μικρή συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»*, *«Μέτρια συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»* και *«Υψηλή συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»*, (Σχήμα 2.4).

---

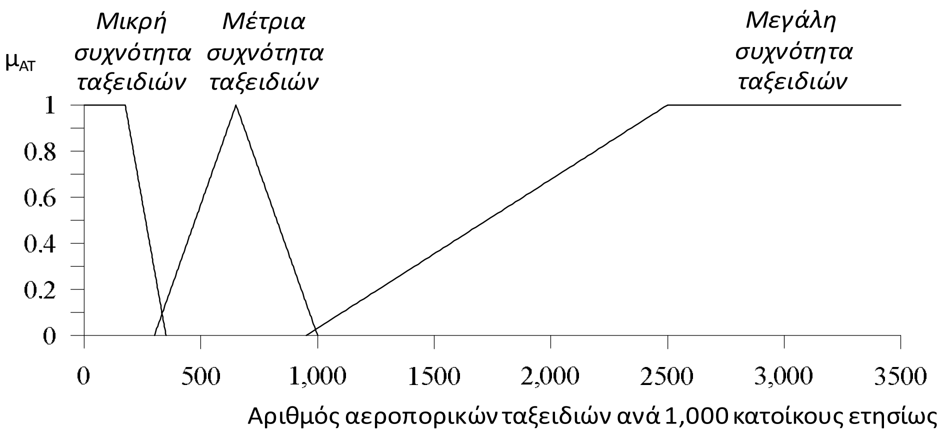
[5] Ισοτιμία αγοραστικής δύναμης (purchasing-power parity (PPP)) είναι μια θεωρία και μια τεχνική ταυτόχρονα περί συναλλαγματικών ισοτιμιών, σύμφωνα με την οποία μια μονάδα οποιουδήποτε νομίσματος μιας χώρας θα πρέπει να αγοράζει την ίδια ποσότητα αγαθών σε όλες τις συγκρινόμενες χώρες. Χρησιμοποιείται ώστε να λαμβάνονται υπόψη οι διαφορές στις αμοιβές και στο κόστος ζωής ανάμεσα σε διάφορες χώρες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4. ΑΕΠ ΚΑΙ ΑΕΡΟΠΟΡΙΚΟ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΟ ΕΡΓΟ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΧΩΡΕΣ ΠΑΓΚΟΣΜΙΩΣ.

Χώρα	Κατά κεφαλήν ΑΕΠ (US$)	Αεροπορ. ταξείδια ανά 1,000 κατοίκους ετησίως	Χώρα	Κατά κεφαλήν ΑΕΠ (US$)	Αεροπορ. ταξείδια ανά 1,000 κατοίκους ετησίως	Χώρα	Κατά κεφαλήν ΑΕΠ (US$)	Αεροπορ. ταξείδια ανά 1,000 κατοίκους ετησίως
Afghanistan	1,884	39.7	Ελλάδα	24,540	776.2	Paraguay	7,833	104.6
Albania	10,405	312.2	Guyana	6,336	240.1	Philippines	6,326	297.9
Algeria	12,893	115.7	Honduras	4,445	52.6	Portugal	25,596	1133.7
Australia	42,831	3064.4	Hong Kong	51,509	4759.1	Russian Fed.	23,564	459.8
Austria	44,376	1784.0	Hungary	22,914	964.0	Rwanda	1,426	45.8
Bahrain	42,428	3372.0	India	5,238	60.2	Saudi Arabia	52,068	1010.0
Bangladesh	2,853	13.3	Indonesia	9,254	340.6	Senegal	2,170	35.0
Benin	1,733	13.3	Kazakhstan	22,467	384.7	Serbia	12,893	184.4
Bhutan	7,167	288.3	Kenya	2,705	100.9	Singapore	76,237	5659.2
Bolivia	5,934	183.6	Kuwait	84,188	1004.1	South Africa	12,106	319.2
Brazil	14,555	478.7	Kyrgyz Rep.	3,110	91.9	South Asia	4,870	55.1
Brunei	69,474	2881.3	Lao PDR	4,667	170.0	Spain	31,596	1081.3
Burkina Faso	1,582	6.3	Lebanon	16,623	437.4	Sri Lanka	9,426	234.0
Cambodia	2,944	50.9	Libya	20,371	404.5	Sudan	3,265	14.7
Cameroon	2,739	12.9	Lithuania	24,483	353.5	Suriname	15,556	480.4
Canada	41,894	2034.4	Luxembourg	87,737	1633.9	Switzerland	54,697	3337.8
Chad	2,022	2.6	Madagascar	1,369	23.5	Tajikistan	2,432	76.6
Chile	21,714	783.2	Mali	1,589	2.2	Tanzania	1,718	27.9
China	11,525	259.9	Malta	28,828	3788.0	Togo	1,346	123.4
Congo,Dem.Rep	783	2.8	Mauritania	2,945	79.5	Trinidad & Tob.	29,469	1975.0
Congo, Rep.	5,680	164.4	Mexico	16,291	357.2	Turkey	18,660	992.3
Cote Ivoire	3,107	21.3	Moldova	4,521	156.7	Uganda	1,368	4.8
Croatia	20,063	403.7	Mongolia	9,132	224.9	Ukraine	8,508	118.2
Cyprus	27,394	1061.4	Morocco	6,967	203.4	UAE	57,045	7403.2
Egypt	10,733	120.8	Mozambique	1,070	24.4	UK	37,017	1845.7
Estonia	25,132	506.2	Namibia	9,276	222.7	USA	51,340	2350.6
Ethiopia	1,336	60.2	Nepal	2,173	25.2	Uzbekistan	5,002	85.0
Finland	38,846	1966.6	Netherlands	44,945	1978.7	Venezuela	17,615	350.7
France	37,154	1010.7	New Zealand	32,808	3068.2	Vietnam	5,125	203.8
Gambia	1,608	79.4	Niger	887	4.9	Yemen, Rep.	3,832	51.4
Georgia	6,946	38.3	Nigeria	5,423	21.6	Zambia	3,800	10.5
Germany	43,207	1302.6	Oman	42,649	1375.0	Zimbabwe	1,773	23.6
Ghana	3,864	31.5	Pakistan	4,454	42.8			



ΣΧΗΜΑ 2.3. ΤΟ ΑΣΑΦΕΣ ΣΥΝΟΛΟ «ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΟΥ ΚΑΤΑ ΚΕΦΑΛΗΝ ΑΕΠ».



ΣΧΗΜΑ 2.4. ΤΟ ΑΣΑΦΕΣ ΣΥΝΟΛΟ «ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΑΕΡΟΠΟΡΙΚΩΝ ΤΑΞΕΙΔΙΩΝ ΑΝΑ 1,000 ΚΑΤΟΙΚΟΥΣ».

Η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς τραπεζοειδούς αριθμού *«Χαμηλό κατά κεφαλήν ΑΕΠ»* είναι η:

$$\mu_{\chi\alpha\mu\eta\lambda\acute{o}\ AE\Pi}(x)=\begin{cases} 1 & \text{για} \quad 0\le x\le 6750 \\ \dfrac{13000-x}{6250} & \text{για} \quad 6750\le x\le 13000 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \tag{2.14}$$

η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς τριγωνικού αριθμού *«Μέτριο κατά κεφαλήν Α-ΕΠ»* είναι η:

$$\mu_{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\iota o\ AE\Pi}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-12000}{6750} & \text{για} \quad 12000\le x\le 18750\\ \dfrac{25500-x}{6750} & \text{για} \quad 18750\le x\le 25500\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases} \tag{2.15}$$

και η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς τραπεζοειδούς αριθμού *«Υψηλό κατά κεφαλήν ΑΕΠ»* είναι η:

$$\mu_{\upsilon\psi\eta\lambda\acute{o}\ AE\Pi}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-24500}{32000} & \text{για} \quad 24500\le x\le 56500\\ 1 & \text{για} \quad x\ge 56{,}000\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases} \tag{2.16}$$

Σε ό,τι αφορά τη συχνότητα των αεροπορικών ταξειδιών, η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς τραπεζοειδούς αριθμού *«Μικρή συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»* είναι η:

$$\mu_{\mu\iota\kappa\rho\acute{\eta}\ \sigma\upsilon\chi\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau\alpha\xi\varepsilon\iota\delta\iota\acute{\omega}\nu}(x)=\begin{cases}1 & \text{για} \quad 0\le x\le 175\\ \dfrac{350-x}{175} & \text{για} \quad 175\le x\le 350\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases} \tag{2.17}$$

η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς τριγωνικού, αριθμού *«Μέτρια συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»* είναι η:

$$\mu_{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\iota\alpha\ \sigma\upsilon\chi\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau\alpha\xi\varepsilon\iota\delta\iota\acute{\omega}\nu}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-300}{350} & \text{για} \quad 300\le x\le 650\\ \dfrac{1000-x}{350} & \text{για} \quad 650\le x\le 1000\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases} \tag{2.18}$$

ενώ η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς τραπεζοειδούς αριθμού *«Υψηλή συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»* είναι η:

$$\mu_{\upsilon\psi\eta\lambda\acute{\eta}\ \sigma\upsilon\chi\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau\alpha\xi\varepsilon\iota\delta\iota\acute{\omega}\nu}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-950}{1550} & \text{για} \quad 950\le x\le 2500\\ 1 & \text{για} \quad x\ge 2500\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases} \tag{2.19}$$

2.8.3. Βαθμός αλήθειας ασαφών αριθμών

Από τα στοιχεία του Πίνακα 2.4 και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.14) έως (2.19) προκύπτουν οι βαθμοί αλήθειας των δεδομένων στα ασαφή σύνολα *«Μέγεθος του κατά κεφαλήν ΑΕΠ»* και *«Συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»*. Δίνουμε ενδεικτικά στον Πίνακα 2.5 (επόμενη σελίδα) τους βαθμούς αλήθειας για το «*Μέτριο κατά κεφαλήν ΑΕΠ*» και το «*Υψηλό κατά κεφαλήν ΑΕΠ*» και τους αντίστοιχους βαθμούς αλήθειας για τη *«Μέτρια συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»* και την *«Υψηλή συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»*.

2.8.4. Βαθμός αλήθειας ασαφών συνεπαγωγών

Θα χρησιμοποιήσουμε έξι ασαφείς συνεπαγωγές, δυο συμμετρικές και τέσσερις μη συμμετρικές, τις εξής:

$$J_{Mamdani}(x,y)=\min\{x,\ y\} \tag{2.20}$$

$$J_{Larsen}(x,y)=x\cdot y \tag{2.21}$$

$$J_{Kleene-Dienes}(x,y)=\max\{1-x,\ y\} \tag{2.22}$$

$$J_{Zadeh}(x,y)=\max(\min(x,y),1-x) \tag{2.23}$$

$$J_{Lukasiewicz}(x,y)=\min(1-x+y,1) \tag{2.24}$$

$$J_{Reichenbach}(x,y)=1-x+x\cdot y \tag{2.25}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.20) έως (2.25) προσδιορίζουμε τους βαθμούς αλήθειας των ασαφών συνεπαγωγών *«Αν χαμηλό κατά κεφαλήν ΑΕΠ $\Rightarrow$ μικρή συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»*, *«Αν μέτριο κατά κεφαλήν ΑΕΠ $\Rightarrow$ μέτρια συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»* και *«Αν υψηλό κατά κεφαλήν ΑΕΠ $\Rightarrow$ μεγάλη συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών»* (δίνονται ενδεικτικά κάποιοι βαθμοί αλήθειας των διαφόρων μορφών συνεπαγωγής στον Πίνακα 2.6). Όπως όμως αναφέρθηκε στην §2.7, οι ασαφείς συνεπαγωγές *αναφέρονται* όλες *σε πραγματικές παρατηρήσεις* και *θεωρητικά θα έπρεπε να προκύψουν οι βαθμοί αλήθειας ίσοι προς 1*. Συνεπώς, μπορεί να αξιολογηθεί η καταλληλότητα των έξι συνεπαγωγών μέσω της απόκλισης των πραγματικών βαθμών αλήθειας κάθε συνεπαγωγής από το θεωρητικό βαθμό αλήθειας που ισούται με τη μονάδα. Οι υπολογισθείσες τιμές των αποκλίσεων των βαθμών αλήθειας για τις διάφορες ασαφείς συνεπαγωγής έχουν ως εξής:

$$\sigma_{J_{Mamdani}}=5.12 \qquad \sigma_{J_{Larsen}}=5.61 \qquad \sigma_{J_{Kleene-Dienes}}=3.16$$

$$\sigma_{J_{Zadeh}}=3.35 \qquad \sigma_{J_{Lukasiewicz}}=2.44 \qquad \sigma_{J_{Reichenbach}}=2.69$$

Η απόκλιση δηλαδή της συνεπαγωγής $J_{Lukasiewicz}$ είναι μικρότερη κατά 52.36% και 56.58% αντίστοιχα ως προς τις συμμετρικές συνεπαγωγές $J_{Mamdani}$ και J_{Larsen} που χρησιμοποιεί το MATLAB.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.5. ΒΑΘΜΟΙ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ.

Χώρα	Κατά κεφαλήν ΑΕΠ			Συχνότητα αεροπορικών ταξειδιών		
	Τιμή (σε US$)	$\mu_{\text{μέτριο ΑΕΠ}}$	$\mu_{\text{υψηλο ΑΕΠ}}$	Ταξείδια ανά 1,000 κατοίκους	$\mu_{\text{μέτρια ταξίδια}}$	$\mu_{\text{πολλά ταξίδια}}$
Brazil	14,555	0.379		478.72	0.511	
Suriname	15,556	0.527		480.40	0.515	
Mexico	16,291	0.636		317.23	0.164	
Lebanon	16,623	0.685		437.40	0.393	
Venezuela	17,615	0.832		250.66	0.145	
Turkey	18,660	0.987		992.27	0.022	
Croatia	20,063	0.805		403.67	0.296	
Libya	20,371	0.760		404.46	0.298	
Chile	21,714	0.561		783.18	0.619	
Kazakhstan	22,467	0.449		284.72	0.242	
Hungary	22,914	0.383		1,364.02	0.103	
Russian Fed.	23,564	0.287		459.83	0.457	
Lithuania	24,483	0.151		353.49	0.153	
Ελλάδα	24,540	0.142	0.001	776.19	0.639	0.000
Estonia	25,132	0.055	0.020	506.19	0.589	0.000
Portugal	25,596		0.034	1,133.71		0.119
Cyprus	27,394		0.090	1,061.38		0.072
Malta	28,828		0.135	3,788.03		1.000
Trinidad & Tobago	29,469		0.155	1,975.02		0.661
Spain	31,596		0.222	981.26		0.085
New Zealand	32,808		0.260	3,068.21		1.000
United Kingdom	37,017		0.391	1,845.71		0.578
France	37,154		0.395	1,010.68		0.039
Finland	38,846		0.448	1,966.57		0.656
Canada	41,894		0.544	2,034.42		0.700
Bahrain	42,428		0.560	3,371.98		1.000
Oman	42,649		0.567	1,375.03		0.274
Australia	42,831		0.573	3,064.44		1.000
Germany	43,207		0.585	1,302.58		0.227
Austria	44,376		0.621	1,784.04		0.538
Netherlands	44,945		0.639	1,978.66		0.664
United States	51,340		0.839	2,350.61		0.904
Hong Kong	51,509		0.844	4,759.11		1.000
Saudi Arabia	52,068		0.861	979.99		0.039
Switzerland	54,697		0.944	3,337.79		1.000
UAE	57,045		1.000	7,403.19		1.000
Brunei	69,474		1.000	2,881.28		1.000
Singapore	76,237		1.000	5,659.16		1.000
Kuwait	84,188		1.000	944.09		0.035
Luxembourg	87,737		1.000	1,633.92		0.441

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.6. ΒΑΘΜΟΙ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΤΩΝ ΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΩΝ.

Χώρα	Μέτριο ΑΕΠ ⇒ Μέτρια συχνότητα ταξιδιών						Υψηλό ΑΕΠ ⇒ Μεγάλη συχνότητα ταξειδιών					
	$J_{Mamdani}$	J_{Larsen}	$J_{Keene...}$	J_{Zadeh}	$J_{Lukasie.}$	$J_{Reichen.}$	$J_{Mamdani}$	J_{Larsen}	$J_{Keene...}$	J_{Zadeh}	$J_{Lukasie.}$	$J_{Reichen.}$
Brazil	0.379	0.193	0.621	0.621	1.000	0.815						
Suriname	0.515	0.272	0.515	0.515	0.989	0.745						
Mexico	0.164	0.104	0.364	0.364	0.528	0.468						
Lebanon	0.393	0.269	0.393	0.393	0.708	0.584						
Venezuela	0.145	0.120	0.168	0.168	0.313	0.289						
Turkey	0.022	0.022	0.022	0.022	0.035	0.035						
Croatia	0.296	0.239	0.296	0.296	0.491	0.433						
Libya	0.298	0.227	0.298	0.298	0.539	0.467						
Chile	0.561	0.347	0.619	0.561	1.000	0.787						
Kazakhstan	0.242	0.109	0.551	0.551	0.793	0.659						
Hungary	0.103	0.039	0.617	0.617	0.720	0.656						
Russian Fed.	0.287	0.131	0.713	0.713	1.000	0.844						
Lithuania	0.151	0.023	0.849	0.849	1.000	0.872						
Ελλάδα	0.142	0.091	0.858	0.858	1.000	0.949						
Estonia	0.055	0.032	0.945	0.945	1.000	0.978						
Portugal							0.034	0.004	0.966	0.966	1.000	0.970
Cyprus							0.072	0.006	0.910	0.910	0.981	0.916
Malta							0.135	0.135	1.000	0.865	1.000	1.000
Trinidad & Tobago							0.155	0.103	0.845	0.845	1.000	0.947
Spain							0.085	0.019	0.778	0.778	0.863	0.797
New Zealand							0.260	0.260	1.000	0.740	1.000	1.000
United Kingdom							0.391	0.226	0.609	0.609	1.000	0.835
France							0.039	0.015	0.605	0.605	0.644	0.620
Finland							0.448	0.294	0.656	0.552	1.000	0.846
Canada							0.544	0.380	0.700	0.544	1.000	0.837
Bahrain							0.560	0.560	1.000	0.560	1.000	1.000
Oman							0.274	0.156	0.433	0.433	0.707	0.588
Australia							0.573	0.573	1.000	0.573	1.000	1.000
Germany							0.227	0.133	0.415	0.415	0.643	0.548
Austria							0.538	0.334	0.538	0.538	0.917	0.713
Netherlands							0.639	0.424	0.664	0.639	1.000	0.785
United States							0.839	0.758	0.904	0.839	1.000	0.919
Hong Kong							0.844	0.844	1.000	0.844	1.000	1.000
Saudi Arabia							0.039	0.033	0.139	0.139	0.177	0.172
Switzerland							0.944	0.944	1.000	0.944	1.000	1.000
UAE							1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Brunei							1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Singapore							1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Kuwait							0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035
Luxembourg							0.441	0.441	0.441	0.441	0.441	0.441