ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑ

Μαριάννα Τζεκάκη

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

tzekaki@auth.gr

Η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών στο σχολείο οργανώνεται γύρω από τις δράσεις των μαθητών στα προτεινόμενα από το πρόγραμμα και τον εκπαιδευτικό έργα. Στην παρουσίαση επιχειρείται μια ανάλυση της έννοιας και του περιεχομένου της μαθηματικής δραστηριότητας κάτω από το πρίσμα της θεωρίας δραστηριότητας σε συνδυασμό με άλλες θεωρητικές προσεγγίσεις. Μελετώνται επίσης τα χαρακτηριστικά και οι παράγοντες που επιτρέπουν στα προτεινόμενα στην τάξη μαθηματικά έργα να ενθαρρύνουν την ανάπτυξη μαθηματικών δραστηριότητας και μαθηματικής σκέψης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ερευνητές της Μαθηματικής εκπαίδευσης αναφέρονται συχνά στη μαθηματική δράση, τα μαθηματικά έργα, τις μαθηματικές ασκήσεις, ενώ ένα σύνολο από λέξεις εμπλέκονται στο επιστημονικό λεξιλόγιο. Λέξεις όπως δραστηριότητα (activity), δράση (action), έργο (task), πράξη (operation), ενασχόληση, ενέργεια (act), εξάσκηση (practice) κ.ά εμφανίζονται συχνά σε κείμενα, κάποιες φορές με συνώνυμο και κάποιες φορές με διαφορετικό νόημα, χωρίς ίσως να έχουν αποσαφηνισθεί οι υπονοούμενες διαφορές. Τα περισσότερα από αυτά τα νοήματα σχετίζονται με τη μαθηματική εκπαίδευση, αφορούν διαφορετικές προσεγγίσεις και μπορούν να αναλυθούν σε πολλές διαστάσεις.

Τα Μαθηματικά είναι μια υψηλή δημιουργική δραστηριότητα που εμπλέκει ιδιαίτερο τρόπο σκέψης, ικανότητες και μεθόδους. Στο πλαίσιο της δραστηριότητας αυτής το άτομο καλείται να προσεγγίσει καταστάσεις σφαιρικά, να διερευνήσει εναλλακτικές κατανοήσεις και λύσεις, να αναγνωρίσει κοινές δομές πίσω από καταστάσεις διαφορετικού περιεχομένου, να εντοπίσει τις μεταξύ τους σχέσεις και να αναδείξει κανονικότητες, να επεξεργαστεί ‘έξυπνους’ και λιτούς τρόπους αντιμετώπισης, να αναστοχαστεί πάνω στη δράση και σκέψη του και να γενικεύσει την εμπειρία του (Schoenfeld, 1992).

Απαιτούνται ιδιαίτερες ικανότητες για να αναπτυχθούν αυτές οι διαδικασίες, λογική και κριτική σκέψη, επινοητικότητα, μεθοδικότητα, συστηματική αντίληψη ίσως ακόμα φαντασία; Είναι σε θέση η εκπαίδευση να τις αναπτύξει στους μαθητές ή θα αφορούν πάντα ένα μέρος από αυτούς;

Η μαθηματική εκπαίδευση έχει σταματήσει ήδη από τη δεκαετία του 90 να ενδιαφέρεται για την εκμάθηση κανόνων κι επίλυση ασκήσεων και επικεντρώνεται στην ανάπτυξη αυτής της μορφής ικανοτήτων. Θέτει ανάμεσα στους στόχους της, όχι μόνο την ανάπτυξη εννοιών και διαδικασιών, αλλά και τη δημιουργία στους μαθητές μια στάσης *να σκέφτονται και να λειτουργούν με μαθηματικό τρόπο*, να ασκηθούν *στην επίλυση προβλήματος* και *να αναπτύξουν αναστοχαστική σκέψη* ώστε τα Μαθηματικά να αποκτήσουν νόημα για αυτούς (Keitel, 2006). Τα στοιχεία αυτά εμφανίζονται και στα προγράμματα σπουδών στη χώρα μας δίνοντας στην παραδοσιακή διδασκαλία ένα νέο, πιο απαιτητικό προσανατολισμό. Το ΔΔΠΣ το 2003 διατυπώνει με γενικότερο τρόπο την ανάγκη τα Μαθηματικά να ασκούν τους μαθητές στη μεθοδική και κριτική σκέψη, ενώ στο νέο πρόγραμμα σπουδών ο προσανατολισμός αυτός γίνεται πιο σαφής:

> Οι σύγχρονες θεωρίες στο πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης υποδεικνύουν ότι ένα σημερινό Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά οφείλει να αποθαρρύνει την έμφαση στην απλή γνώση και την εφαρμογή εννοιών και διαδικασιών, επενδύοντας στη μελέτη των συνδέσεων μεταξύ τους και στην ανάπτυξη μαθηματικών ικανοτήτων, στάσεων και πεποιθήσεων που να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν με αποτελεσματικό τρόπο προβλήματα μέσα από τα μαθηματικά και μέσω των μαθηματικών (ΠΣ, 2011, σ.3)

Μέσα σε ένα τέτοιο προσανατολισμό αναδεικνύεται επιτακτική η ανάγκη για αποσαφηνίσεις σχετικά με το τι αποτελεί μαθηματική ικανότητα, ποιος είναι αυτός ο μαθηματικός τρόπος σκέψης και λύσης, ποιο είναι το περιεχόμενο και ο τρόπος της μαθηματικής δραστηριότητας, τι είναι μαθηματική δράση, μαθηματικό έργο, πώς εμφανίζεται και πώς χρησιμοποιείται ή συνδέεται με τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών;

Οι αποσαφηνίσεις αυτές μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση και εφαρμογή των σύγχρονων προγραμμάτων σπουδών, τη δημιουργία κατάλληλων υλικών και αντίστοιχων πόρων και -το σημαντικότερο- να στηρίξουν αλλαγές στις διδακτικές πρακτικές και στη μορφή λειτουργίας της τάξης των Μαθηματικών.

Τα στοιχεία αυτά θα δοκιμάσουμε να αναπτύξουμε στην συγκεκριμένη παρουσίαση προσπαθώντας να κάνουμε συνδέσεις με τις σύγχρονες θεωρίες διδασκαλίας και μάθησης και αποσαφηνίζοντας με συγκεκριμένες εφαρμογές στα μαθηματικά έργα.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Τι σημαίνει «δραστηριότητα» (activity);

Πριν επικεντρωθούμε στη μαθηματική δραστηριότητα είναι σημαντικό να αποσαφηνίσουμε το νόημα της ίδιας της δραστηριότητας, διακρίνοντας την από άλλες εκφράσεις ή νοήματα όπως *δράση* (action), *ενέργεια* (act), *πράξη* (operation) κ.ά.

Ως *δραστηριότητα* μπορεί να εννοηθεί ένα σύστημα από δράσεις με τις όποιες ένα ή περισσότερα *υποκείμενα* λειτουργούν σε ένα *αντικείμενο* (υλικό ή ιδεατό) προκειμένου να επιτευχθεί ένα επιθυμητό αποτέλεσμα. Οι δραστηριότητες είναι προσανατολισμένες προς τα *κίνητρα*, τα οποία είναι επίσης υλικά ή ιδεατά και ικανοποιούν κάποιες ανάγκες. Οι (συγκεκριμένες) *δράσεις* αποτελούν διαδικασίες που εξυπηρετούν τις δραστηριότητες και διευθύνονται από συνειδητούς *στόχους*. Οι δράσεις με τη σειρά τους πραγματοποιούνται με *πράξεις* που καθορίζονται από τις *συνθήκες* της δραστηριότητας. Τις παραπάνω διακρίσεις κάνει αρχικά ο Leont'ev, υποστηρίζοντας ότι η δραστηριότητα με την οποία εμπλέκεται ένα άτομο δεν αφορά μόνο τη συγκεκριμένη και ‘πρακτική’ δράση αλλά αντανακλάται στην πνευματική δραστηριότητα με την οποία η υλική πραγματικότητα παρουσιάζεται στη συνείδηση του ατόμου (Leont'ev,1981).

Με την έννοια αυτή, το ‘τι κάνουν’ οι άνθρωποι εξετάζεται στη βάση των πράξεων με τις οποίες αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον, ώστε οι διαφορετικές μορφές δράσης να αντιμετωπίζονται ως αναπτυξιακές διαδικασίες που επιτρέπουν να μελετήσει κάποιος την ανθρώπινη δραστηριότητα και σκέψη.

Η Θεωρία Δραστηριότητας (Activity Theory) είναι ένα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο αναλύει τις ανθρώπινες πρακτικές ως αναπτυξιακές διαδικασίες τόσο σε ατομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο και χρησιμοποιεί τη *δραστηριότητα* ως βασική μονάδα μελέτης των ανθρώπινων πρακτικών. Κατά την ΘΔ η σχέση υποκειμένου και αντικειμένου δεν είναι άμεση αλλά πραγματοποιείται με τη διαμεσολάβηση εργαλείων (artifacts, τεχνουργημάτων).

Ένα εργαλείο μπορεί να είναι ‘φυσικό’ (εργαλεία για την διαχείριση αντικειμένων) ή ‘νοητικό’ (διεργασίες, κανόνες ή ρόλοι που επηρεάζουν τον τρόπο συμπεριφοράς). Μια δραστηριότητα εμπλέκει λοιπόν διάφορα εργαλεία/τεχνουργήματα (ιδέες, στρατηγικές, σχήματα, σήματα ή άλλες αναπαραστάσεις) που όχι μόνο διαμεσολαβούν αλλά και πιθανά τροποποιούνται στη διάρκεια της δραστηριότητας. Επίσης το αποτέλεσμα μιας δραστηριότητας μπορεί να είναι επίσης ένα τεχνούργημα που πιθανά να χρησιμοποιηθεί και σε άλλες δράσεις (Hershkowitz et als., 2001; Christiansen, & Walther, 2001)

Στο αρχικό ‘τρίγωνο΄ υποκείμενο δραστηριότητας- αντικείμενο δραστηριότητας και εργαλεία που διαμεσολαβούν η σκανδιναβική σχολή με τον Engestrom (1999) προσθέτει τους *κανόνες* και την *κοινότητα* από τα άτομα που εμπλέκονται άμεσα ή έμμεσα με το έργο, με τους *κανονισμούς* που ακολουθούν, την *κατανομή εργασιών* αλλά και το *αποτέλεσμα* (το τελικό προϊόν), δίνοντας έτσι βαρύτητα στο κοινωνικό πλαίσιο.

Μέσα από το σχήμα αυτό η Θεωρία Δραστηριότητας ερμηνεύει τη μάθηση με βάση τα συστήματα δράσης των ατόμων που ξεκινώντας από αρχικά ερωτήματα ή προβλήματα και αντιφάσεις ή αμφισβητήσεις, αναζητούν και εφαρμόζουν ένα νέο μοντέλο δράσης, το οποίο δοκιμάζουν και σταθεροποιούν.

Πολλές προσεγγίσεις αξιοποιούν τη δραστηριότητα των ατόμων προκειμένου να αντιληφθούν όχι μόνο τι κάνουν οι άνθρωποι αλλά και πως σκέφτονται για αυτό που κάνουν (Wenger, 1998; Lave & Wenger, 1991). Ο Chevallard (2007) χρησιμοποιεί την έννοια της *πραξεολογίας*, της μελέτης δηλαδή της ανθρώπινης δράσης, για να ερευνήσει τη μαθηματική ανάπτυξη. Για τον ερευνητή πραξεολογία για τα Μαθηματικά αποτελεί η επιστημονική περιγραφή και ανάλυση του τι κάνουν και σκέφτονται οι άνθρωποι όταν ‘κάνουν μαθηματικά’. Το ‘μαθαίνω Μαθηματικά’ αποτελεί ένα ‘κάνω Μαθηματικά’ που (σε αντιστοιχία με την προσέγγιση της Θεωρίας Δραστηριότητας) σημαίνει λύνω ένα πρόβλημα ή απαντώ σε μια ερώτηση ή γενικότερα αντιμετωπίζω μια κατάσταση ξεκινώντας από προηγούμενα θεωρητικά στοιχεία και διαθέσιμες τεχνικές για να επεξεργαστώ νέους τρόπους, νέες εξηγήσεις και νέες δικαιολογίες για να πετύχω αυτό που κάνω.

Πριν προσανατολιστούμε στην αποσαφήνιση της έννοιας της μαθηματικής δραστηριότητας που μας ενδιαφέρει είναι σημαντικό να αναρωτηθούμε γιατί για τους υποστηρικτές της Θεωρίας Δραστηριότητας οι θέσεις της ανακαλυπτικής ή τη κονστρουκτιβιστικής (ακόμα και κοινωνικοπολιτικής) άποψης που υποστηρίζουν ότι το ενεργό άτομο παράγει νοήματα και κατασκευάζει γνώση μέσα από την αλληλεπίδραση με το πραγματικό και κοινωνικό περιβάλλον δεν μοιάζουν επαρκή να αντιμετωπίσουν όλες τις όψεις της μαθησιακής διαδικασίας;

Είναι σαφές ότι η προσέγγιση αυτή με επίκεντρο τη δραστηριότητα -με την έννοια που αναλύθηκε προηγούμενα- εκτός από την αποτροπή της ασάφειας που έχει ο όρος «κατασκευάζει», δοκιμάζει να συνυπολογίσει στη μελέτη της παράγοντες που στις άλλες προσεγγίσεις δεν καλύπτονται επαρκώς όπως την ενότητα ατομικού και συλλογικού, τη λειτουργία του κοινωνικο – πολιτιστικού περιβάλλοντος, την ιστορία του κάθε ατόμου, το ρόλο των τεχνουργημάτων, τα κίνητρα, τις κοινότητες, την πολυπλοκότητα της πραγματικότητας με τους πόρους που έχουν αναπτυχθεί, κλπ. Έτσι η μάθηση αποτελεί μια σύνθετη γνωστική δραστηριότητα που αναπτύσσει δράσεις σε μια κοινωνικοπολιτισμική πρακτική, χρησιμοποιεί εργαλεία, αναπτύσσει νοήματα και διαμορφώνει αξίες (Van Oers, 2006). Αξιοποιώντας στοιχεία της προσέγγισης αυτής στη Μαθηματική Εκπαίδευση είναι σημαντικό να αναρωτηθούμε ποιές δράσεις, με τι εργαλεία οδηγούν σε ποια νοήματα και ποιες αξίες ειδικά για τα μαθηματικά;

Συνοψίζοντας, για τις προσεγγίσεις που επικεντρώνονται στη δραστηριότητα η γνωστική ανάπτυξη πραγματοποιείται στο πλαίσιο της ολοκλήρωσης κάποιων δράσεων μέσα σε ευρύτερα κοινωνικο-πολιτισμικά πλαίσια. Στη διάρκεια των δράσεων αυτών που πραγματοποιούνται με κάποιους στόχους το υποκείμενο βελτιώνεις τις πράξεις, τα εργαλεία, τα νοήματα, αλλά πιθανά και τη μορφή αλληλεπίδρασης με το κοινωνικό πλαίσιο.

Ποια είναι τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας;

Αναφέραμε ήδη ότι η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών δεν περιορίζεται στην ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών, εννοιών και διαδικασιών, αλλά ενθαρρύνει την ανάπτυξη μιας ανθρώπινης δραστηριότητας μέσα σε καταστάσεις που πραγματοποιούνται σε συγκεκριμένα θεσμικά κοινωνικά κέντρα, όπως είναι το εκπαιδευτικό σύστημα ή τα σχολεία.

Ποια είναι λοιπόν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά αυτής της δραστηριότητας;

Με τι κριτήρια θα αξιολογήσουμε αν μια δράση που αναπτύσσουν οι μαθητές είναι μαθηματική;

Ποιες είναι οι ερωτήσεις, τα προβλήματα, τα έργα ή οι καταστάσεις που οδηγούν στην ανάπτυξη της δραστηριότητας αυτής;

Οι προσεγγίσεις που βρίσκουμε στο ζήτημα αυτό είναι πολλές, άλλες παράλληλες και άλλες συμπληρωματικές και πιθανά μια σύνθεσή τους θα μπορούσε να δώσει τις απαντήσεις που αναζητούμε. Οι περισσότεροι ερευνητές μιλούν για δραστηριότητες που προσανατολίζονται στην διατύπωση και επίλυση προβλημάτων, σκέψη και ευέλικτο συλλογισμό, επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση, αναστοχαστική επικοινωνία και γενίκευση. Οι μαθητές αναπτύσσουν συνήθειες και ρουτίνες σκέψης, μια μαθηματική προδιάθεση και μαθηματική οπτική που χαρακτηρίζεται από την τάση για αναζήτηση κανονικοτήτων, για την κατανόηση δομών και δημιουργία συνδέσεων, κατάλληλη χρήση πηγών και ανάπτυξη δυναμικών συλλογισμών και χαρακτηρίζει μια υψηλού επιπέδου σκέψη (αναφέρονται μόνο ορισμένοι, Steinbring, 2005; Ben-Zvi and Arcavi, 2001; Serpinska

Lerman, 1996; Schoenfeld, 1992; Resnick, 1987). Οι Sarama & Clements (2009) εξειδικεύοντας υποστηρίζουν ότι ανάμεσα στις πιο χαρακτηριστικές δράσεις που εξοικειώνουν τα παιδιά με την μαθηματική επεξεργασία και στηρίζουν την ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών χαρακτηριστικές είναι: η αναζήτηση *κανονικοτήτων και κοινών δομών*, η διαδικασία *ανάλυσης και σύνθεσης*, η *αντίληψη των μονάδων*, *και η ανάπτυξη συνδέσεων*.

Στο ίδιο πνεύμα οι Ball et als. (Rand, 2002) περιγράφουν τις μαθηματικές πρακτικές ως ένα 'know- how' που, πέρα από τη γνώση του συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου, αναφέρονται σε συγκεκριμένα πράγματα που κάνουν οι επιτυχημένοι γνώστες και χρήστες των Μαθηματικών: δικαιολογούν, κάνουν δηλώσεις, χρησιμοποιούν συμβολικές παραστάσεις με άνεση, κάνουν γενικεύσεις, κ.ά.

Ο Freudenthal (1983) κατανοεί τη μαθηματική δραστηριότητα ως ένα τρόπο *δημιουργίας μοντέλων* για την αντιμετώπιση και κατανόηση των πραγματικών καταστάσεων και ο Brousseau (1997) ως την αναζήτηση κατάλληλων απαντήσεων που προκύπτουν από τις *καταστάσεις-προβλήματα*. Και οι δύο επιδιώκουν να δημιουργήσουν αντίστοιχα πλαίσια και έργα η διαπραγμάτευση των οποίων θα οδηγήσει στη προσέγγιση εννοιών. Για το Chevallard (2007) η δημιουργία μιας μαθηματικής '*πραξεολογίας*' (δηλαδή μαθηματικής πράξης και σκέψης) αποτελεί την αντιμετώπιση καταστάσεων που προέρχονται από ερωτήματα που «κάνουν νόημα» στο μαθηματικό σύμπαν των μαθητών.

Οι Noss, Healy και Hoyles (1997) υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά νοήματα προέρχονται από τις *μαθηματικές* συνδέσεις και αυτό είναι σημαντικό στη μαθηματική δραστηριότητα (κάτι που οι μαθητές δεν μαθαίνουν αλλά κάνουν). Ο Ernest (2006) θεωρεί τα Μαθηματικά ως εκείνη την περιοχή της ανθρώπινης προσπάθειας και γνώσης που περισσότερο από άλλα χρησιμοποιεί ένα ευρύ και μοναδικό φάσμα σημάτων και συμβόλων και δραστηριότητας που στηρίζεται σε αυτά, άρα αντιλαμβάνεται τη δράση και μάθηση των Μαθηματικών ως μια διαδικασία *συμβολοποίησης*. Αντίστοιχα ο Steinbring (2005) τα αντιμετωπίζει ως μια δυναμική σύνδεση καταστάσεων – σημάτων και εννοιών στο επιστημολογικό του τρίγωνο.

Για τον Radford (2006) και την προσέγγιση της 'αντικειμενοποίησης' (objectification) η μάθηση των Μαθηματικών ξεπερνάει την επίλυση προβλήματος και το 'κάνω Μαθηματικά' και αφορά περισσότερο την *απόκτηση μορφών στοχασμού* για τον κόσμο σύμφωνα με συγκεκριμένες ιστορικά πολιτιστικές μορφές σκέψης που διαφοροποιούνται από άλλες μορφές σκέψης. Για την προσέγγιση αυτή η δράση ή η επίλυση ενός προβλήματος χωρίς την εξήγηση ή τη μεταφορά σε γενικότερο πλαίσιο αποτελεί μόνο μέρος της μαθηματικής ανάπτυξης.

Οι Lave & Wenger (1991) αναφέρονται επιπλέον ότι η συμμετοχή των μαθητών σε μια κοινωνική πρακτική και τη δραστηριοποίηση σε ειδικό περιβάλλον και συνθήκες μαθηματικής κουλτούρας τους οδηγεί στην *ανάπτυξη μιας ταυτότητας* καθώς η μάθηση εμπεριέχει πάντα την δημιουργία μιας ταυτότητας. Κατά την προσέγγιση αυτή οι μαθηματικές πρακτικές αποτελούν επαναλαμβανόμενες δράσεις που οι μαθητές επαναλαμβάνουν ως χρήστες των Μαθηματικών, κάνοντας και με την έννοια αυτή κατανοώντας τις γνώσεις αυτές.

Με όλα τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι πολλές μαθησιακές και διδακτικές προσεγγίσεις στηρίζονται πάνω στην ιδέα της «δραστηριότητας», αν και διαφοροποιούνται ως προς τον προσανατολισμό της. Είναι επίσης φανερό ότι ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται τα άτομα ή τα συστήματα τη φύση της μαθηματικής γνώσης επιδρά πάνω στον τρόπο που επίσης αντιλαμβάνονται τη μαθηματική δραστηριότητα και την ίδια τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η εργαλειακή αντίληψη για τη φύση των Μαθηματικών οδηγεί τη μαθηματική δραστηριότητα να γίνεται αντιληπτή ως απομνημόνευση και εφαρμογή διαδικασιών (που πιθανά ισχύει ακόμα σε κάποια εκπαιδευτικά συστήματα). Αντίστοιχα η κατανόηση τους ως κατασκευή οδηγεί στην αντίληψη της διαχείρισης μιας συγκεκριμένης κατάστασης για τη δημιουργία νοήματος, ενώ τέλος η ως άποψη ότι είναι ανακαλυπτική οδηγεί στην αναζήτηση/ανάδειξη κάποιου εσωτερικού κανόνα (χωρίς κατασκευή ή δημιουργία) (Stech, 2008). Κατά συνέπεια οι περισσότερες προσεγγίσεις αναγνωρίζουν τη σημασία της μαθηματικής δραστηριότητας τα χαρακτηριστικά που της δίνουν όμως επηρεάζονται από πολλούς και διαφορετικούς παράγοντες.

Είναι γενικότερα αποδεκτό ότι η απλή ενασχόληση με μαθηματικά αντικείμενα δεν επαρκεί για να θεωρηθεί ότι οι μαθητές αναπτύσσουν μαθηματική δραστηριότητα, όπως επίσης ότι και μόνη της η δραστηριοποίηση δεν επαρκεί για την ανάπτυξη δράσης με μαθηματικό τρόπο. Οι μαθητές αναπτύσσουν διαφορετικές μορφές δραστηριότητας και είναι προς διερεύνηση το ποια ή ποιες οδηγούν και αναπτύσσουν μαθηματικές ιδέες. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μια κατασκευή με επικαλύψεις σχημάτων. Κάποιοι από αυτούς τοποθετούν άμεσα τα σχήματα, δοκιμάζοντας και διορθώνοντας, κάποιοι άλλοι δοκιμάζουν να τα φανταστούν και στη συνέχεια να τοποθετήσουν και τέλος κάποιοι δημιουργούν κάποια σχέδια για να βρουν τους σχηματισμούς. Είναι όλες αυτές οι δράσεις ίδιες, είμαι μαθηματικές δράσεις ή οδηγούν σε μαθηματικές ιδέες; Αντίστοιχα μπορούμε να προβληματιστούμε για δράσεις στη διάρκεια των οποίων οι μαθητές στηριγμένοι στις γνώσεις τους για τα εμβαδά των επιφανειών οδηγούνται στον υπολογισμό της επιφάνειας ενός στερεού, για παράδειγμα προσθέτουν τα εμβαδά των εδρών. Έχει αυτή η δράση μαθηματικά χαρακτηριστικά, οδηγεί τους μαθητές τελικά στην κατανόηση της επιφάνειας των στερεών και στην δημιουργία του τύπου του εμβαδού;

Αν ακόμα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα του περίφημου puzzle του Brousseau (1997), όπου τα παιδιά παλεύοντας με την δυσκολία να μεγαλώσουν ένα puzzle χρησιμοποιώντας αθροιστικές στρατηγικές οδηγούνται στην αναλογική προσέγγιση και ολοκληρώνουν την κατασκευή. Τι χαρακτηριστικά έχει αυτή η δράση; Καταλήγουν οι μαθητές να αντιληφθούν ή να γενικεύσουν την έννοια της αναλογίας; Ή όταν αργότερα μελετούν πίνακες αναλογικών τιμών καταλήγουν να γενικεύσουν την έννοια της αναλογικής συνάρτησης;

Η θέση ότι η μαθηματική μάθηση αναπτύσσεται με την ενεργό δραστηριοποίηση των μαθητών με επίλυση, αναζήτηση, πειραματισμό, δημιουργία ή κατασκευή, ανταλλαγή και επικοινωνία είναι ο κοινός τόπος πολλών θεωριών. Θα μπορούσαμε όμως να υπογραμμίσουμε ότι η μαθηματική δραστηριότητα αποτελεί (σύμφωνα και με τη θεωρία της δραστηριότητας) ένα σύνολο *μαθηματικών δράσεων* που από τη σύνθεση των προηγούμενων θέσεων συνοψίζονται στις ακόλουθες: αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, κανονικοτήτων και κοινών δομών, ανάλυση και σύνθεση σε μέρη και μοναδιαία τμήματα, δημιουργία συνδέσεων, σύνδεση με παραστάσεις, σήματα και σύμβολα, εξήγηση/δικαιολόγηση, αναστοχαστική δράση και δράση γενίκευσης. Όλα τα παραπάνω πραγματοποιούνται μέσα από ένα σύνολο διεργασιών που ξεκινώντας από ερωτήματα, προβλήματα ή άγνωστες καταστάσεις αναπτύσσουν υποθέσεις, επιλύουν και μοντελοποιούν με τη χρήση εργαλείων ή πηγών, τεκμηριώνουν, επεξεργάζονται μεταγνωστικά και τυποποιούν.

Οι διεργασίες ή πολλές από αυτές δεν σχετίζονται μόνο με τα Μαθηματικά. Όπως υπογραμμίζει κι ο Radford (2006) αν και συχνά οι μαθητές εμπλέκονται και δραστηριοποιούνται σε πλούσιες και ενδιαφέρουσες δραστηριότητες δεν είναι σίγουρο ότι θα κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις και γενικεύσεις προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης μαθηματικής γνώσης. Προς την επίτευξη αυτή είναι απαραίτητη εκτός από την ανάπτυξη των μαθηματικών δράσεων που αναφέρθηκαν προηγούμενα, η επικέντρωση στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών και τα αντίστοιχα μαθηματικά νοήματα, ο αναστοχασμός πάνω στη δράση και η μεταγνωστική επεξεργασία.

Τα στοιχεία αυτά κάνουν τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών ένα ιδιαίτερο απαιτητικό έργο όπου πολλές από τις διαστάσεις διαφορετικών προσεγγίσεων συνυπάρχουν (Τζεκάκη, 2007). Στο πλαίσιο αυτό ο σχεδιασμός κατάλληλων έργων και εργαλείων είναι κρίσιμος (Hoyles, 2005), καθώς τα έργα αυτά χρειάζεται από τη μία να οδηγούν στην ανάπτυξη μαθηματικής δραστηριότητας όπως περιγράψαμε προηγούμενα (γιατί η δραστηριότητα αυτή καλλιεργεί στην ουσία τη σκέψη και την προσωπικότητα των ατόμων) και από την άλλη να συνδυάζουν στοιχεία που να οδηγούν τους μαθητές στην προσέγγιση των ‘επιστημονικών’ (κατά Vygotsky) εννοιών που ο περιορισμός σε πραγματικές καταστάσεις και περιστασιοποιημένη μάθηση πιθανά δεν μπορεί να οδηγήσει.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑ

Τα μαθηματικά έργα που προτείνονται στην σχολική τάξη έχουν ιδιαίτερη σημασία γιατί αποτελούν το συγκεκριμένο πλαίσιο πάνω στο οποίο καλείται να αναπτυχθεί η μαθηματική δραστηριότητα, να προσεγγίσουν οι μαθητές το μαθηματικό νόημα και να ασκηθούν στη μαθηματική λειτουργία. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται το τι σημαίνει ‘κάνω μαθηματικά’ από την εμπειρία και την πρακτική τους στη τάξη των Μαθηματικών κι αυτή η εμπειρία στηρίζεται στις δραστηριότητες και τα έργα που πραγματοποιούνται εκεί (Schoenfeld, 1992).

Σήμερα που το ενδιαφέρον δεν επικεντρώνεται στο περιεχόμενο αλλά στη μαθηματική δραστηριότητα που αναπτύσσεται στην τάξη είναι περισσότερο σημαντικά τα ερωτήματα που σχετίζονται με ποια έργα μπορούν να οδηγήσουν τους μαθητές σε μαθηματική δραστηριότητα και ποιο νόημα αναπτύσσουν οι μαθητές με την εμπλοκή τους στα έργα αυτά (Kaldrimidou, Sakonidis, & Tzekaki, 2008; Howson, 2005; Yackel, Cobb, & Wood, 1998). Απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά βοηθούν περισσότερο στην επιλογή των περιεχομένων των προγραμμάτων σπουδών όπως και των σχολικών έργων που προτείνονται για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Δοκιμάζουμε λοιπόν να αποσαφηνίσουμε το νόημα του μαθηματικού έργου συνδέοντάς το με τη μαθηματική δραστηριότητα και τις μαθηματικές δράσεις που αναλύσαμε προηγούμενα. Αν κι ο τρόπος διαχείρισης των μαθηματικών έργων στη σχολική τάξη είναι κρίσιμος, το ζήτημα αυτό δεν θα μας απασχολήσει στη συγκεκριμένη προσέγγιση

Ποιες μορφές έργων αντιμετωπίζουμε

Αρχικά είναι σημαντικό να αποσαφηνιστεί ότι στη διδασκαλία των Μαθηματικών αντιμετωπίζουμε διαφορετικούς τύπους έργων. Στη σύγχρονη βιβλιογραφία συναντάμε μεγάλο αριθμό προτάσεων για κατηγοριοποιήσεις (Shimizu et als., 2010) από τις οποίες συνοψίζουμε τις πιο σημαντικές. Τα έργα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν, εκτός από το μαθηματικό *περιεχόμενο* και τις *μαθηματικές δράσεις* που ενθαρρύνουν, ως προς την *οργάνωση* που απαιτούν (ατομικά, ομαδικά ή έργα ένα προς ένα), *τη χρήση εργαλείων* που προτείνουν (χειραπτικό υλικό, άλλα μέσα, τεχνουργήματα) και το *είδος* τους. Ως προς το είδος προτείνονται προβλήματα (απλά ή σύνθετα, ανοικτά, κ.ά), πραγματικές καταστάσεις και καθημερινές διαδικασίες (απαντήσεις σε ερωτήματα, αντιμετώπιση, επιλογή, κ.ά.), πρότζεκτ, διερευνήσεις ή πειραματισμούς, μελέτη καταστάσεων ή φαινομένων, κατασκευές, επεξεργασία δεδομένων, έργα μοντελοποίησης, παραστασιοποίησης, παιχνίδια και απλές ασκήσεις εφαρμογών. Τα παραπάνω σχετίζονται με ότι ονομάζεται *γνωστικές απαιτήσεις* ενός έργου που αναφέρονται στο είδος των διαδικασιών σκέψης που απαιτούνται στην αντιμετώπιση τους και αφορούν από απομνημόνευση και εφαρμογή διαδικασιών και αλγορίθμων χωρίς κατανόηση ή με κατανόηση ως την ανάλυση και σύνθεση, την αξιολόγηση, κριτική και δημιουργία κ.ά (Hennigsen & Stein, 1997).

Επιπλέον διαχωρισμοί μπορούν να γίνουν στο ρόλο των έργων μέσα στη σχολική τάξη που ο Kaur (2010) ταξινομεί σε έργα μάθησης, αναθεώρησης, πρακτικής και αξιολόγησης. Τα μαθηματικά έργα έχουν χαρακτηρισθεί επίσης από πολλούς ως 'αυθεντικά', 'πλούσια' και 'σύνθετα'. Η αυθεντικότητα συνδέει με την πραγματικότητα και την εμπειρία του που αναπτύσσει ο μαθητής ενώ η συνθετότητα σχετίζεται κατά τον Williams (2002) με τα λεκτικά, αριθμητικά, εννοιολογικά, αναπαραστατικά, νοητικά και νοηματικά χαρακτηριστικά. Ένα μαθηματικό έργο χαρακτηρίζεται ως 'πλούσιο' όταν έχει επαρκή συνθετότητα για να επιτρέψει τη χρήση πολλών προσεγγίσεων, στρατηγικών, τη δημιουργία πολλών αναπαραστάσεων, την δυνατότητα εύρεση πολλών λύσεων, την απαίτηση εξηγήσεων και τεκμηριώσεων κ.ά. και με την έννοια αυτή να πλουτίσει την αντίληψη των μαθητών για έννοιες και διεργασίες (Henningsen, & Stein, 1997).

Όλα τα παραπάνω αφορούν εκτός από τα μαθηματικά και άλλες κατηγορίας έργων.

Ποια τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του μαθηματικού έργου;

Αναφέραμε ήδη ότι αν και πολλοί ακόμα εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι όταν ένα έργο εμπλέκει ή καλεί τους μαθητές να ασχοληθούν με κάποια μαθηματικά αντικείμενα αυτό εξασφαλίζει ότι οι μαθητές 'κάνουν μαθηματικά' με την έννοια που αναπτύχθηκε νωρίτερα, στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές κάνουν πράξεις με θετικούς κι αρνητικούς αριθμούς με τη χρήση μοντέλων ή μόνο αριθμητικών συμβόλων, πολύ περιορισμένες από τις προαναφερθείσες μαθηματικές δράσεις πραγματοποιούνται.

Διαχωρίζοντας τα μαθηματικά από τα υπόλοιπα έργα μπορούμε να πούμε, σε μια πρώτη προσέγγιση ότι ένα μαθηματικό έργο, εκτός από τα προηγούμενα στοιχεία (γνωστικές απαιτήσεις, αυθεντικότητα, συνθετότητα κπλ) απαιτείται να αναπτύσσει *μαθηματική δραστηριότητα* και να ενθαρρύνει *μαθηματικές δράσεις* προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης μαθηματικής σκέψης.

Από αυτή την οπτική τα μαθηματικά έργα αντλούν θεωρητικά στοιχεία από τη Θεωρία Δραστηριότητας καθώς αναπτύσσουν δραστηριότητες και δράσεις με την αξιοποίηση και διαμοσολάβηση των κοινωνικο-πολιτισμικών στοιχείων και εργαλείων. Έτσι για τον Davidov που αξιοποιεί τη θεωρητική αυτή προσέγγιση στη διδασκαλία των Μαθηματικών, τα προτεινόμενα μαθηματικά έργα καλούνται να εισάγουν το γενικό και αφηρημένο ώστε να γίνει ορατό το ειδικό που αφορά το έργο. Εισάγει για παράδειγμα σύμβολα ή ενσωματώνει αναπαραστάσεις από τη χρήση των οποίων οι μαθητές θα κάνουν συνδέσεις ανάμεσα στις καθημερινές έννοιες που αναπτύσσουν αυθόρμητα με τα έργα και τις μαθηματικές έννοιες.

Αντίστοιχα όμως και άλλες θεωρητικές προσεγγίσεις δίνουν σημαντικά στοιχεία για την διερεύνηση ή ανάπτυξη μαθηματικών έργων. Έτσι για τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων (Brouseeau, 1996,) κάθε κομμάτι μαθηματικής γνώσης αντιπροσωπεύεται από ένα σύνολο 'καταστάσεων' που αφορά προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο με τη χρήση αυτής τη γνώση. Το ερώτημα που θέτει η θεωρία αυτή είναι «*κάτω από ποιες συνθήκες αναπτύσσεται η συγκεκριμένη μαθηματική έννοια ή ιδέα;*» και άρα «*ποια έργα θα προταθούν για να αντιστοιχούν σε αυτές τις συνθήκες;*» μέσα στο θεσμικό σχολικό πλαίσιο. Με την έννοια αυτή τα προτεινόμενα μαθηματικά έργα όχι μόνο αναπτύσσουν την αναμενόμενη μαθηματική δραστηριότητα και μαθηματική σκέψη αλλά μέσα από το σύνολο των μαθηματικών πρακτικών συνδέονται με φαινόμενα παραγωγής συγκεκριμένης μαθηματικής γνώσης.

Σε αντιστοιχία ο Freudenthal προτείνει προβλήματα ή οι καταστάσεις που εκτός από το γεγονός ότι συνδέονται με την πραγματική ζωή και έχουν νόημα και ενδιαφέρον για τα παιδιά, τους φέρνουν σε επαφή με εκείνα τα φαινόμενα, για τα οποία οι μαθηματικές έννοιες και δομές που επιδιώκουμε να αναπτύξουμε αποτελούν τα οργανωτικά εργαλεία.

Από τα προηγούμενα γίνεται κατανοητό ότι τα προτεινόμενα μαθηματικά έργα και η καταλληλότητά τους προσεγγίζονται με πολλούς τρόπους, τα τελευταία ιδιαίτερα χρόνια η αντικατάσταση των παλιών μορφών ασκήσεων με αυθεντικά και πλούσια έργα που ενθαρρύνουν μαθηματική δραστηριότητα έχει οδηγήσει σε πολλές αναζητήσεις. Με ομοιότητες και διαφορές, η βασική επιδίωξη είναι η ανάπτυξη μαθηματικών δράσεων αλλά και το βασικό ερώτημα παραμένει ο τρόπος με τον οποίο η συγκεκριμένη προσέγγιση θα συνδεθεί με την επιδιωκόμενη μαθηματική γνώση. Η Keitel (2006) όπως και άλλοι ερευνητές δοκιμάζουν να αναπτύξουν ένα πλαίσιο μελέτης της λειτουργίας των μαθηματικών έργων στη σχολική τάξη μέσα από ένα σύνολο διερευνήσεων και καταλήγουν σε μια λίστα ερωτήσεων που βοηθάει την προηγούμενη διερεύνηση και συνοψίζουμε στον παρακάτω πίνακα:

Περιεχόμενο	Μαθηματική γνώση/νόημα	Ποια η σύνδεση με τη μαθηματική γνώση και ποιο μαθηματικό νόημα θα αναπτυχθεί με το έργο (αφορά νέα γνώση, νέα μέθοδο, επανοργάνωση προηγούμενης, νέα προσέγγιση;). Ποια σύνδεση με τις προϋπάρχουσες γνώσεις;
Έργο	Είδος έργου	Τι έργο προτείνεται; Πρόβλημα, πραγματική κατάσταση (απαντήσεις σε ερωτήματα, αντιμετώπιση, επιλογή, κ.ά.), πρότζεκτ, διερεύνηση ή πειραματισμός μελέτη φαινομένων, κατασκευή, επεξεργασία δεδομένων, έργο μοντελοποίησης, παραστασιοποίησης, παιχνίδι, άσκηση εφαρμογής;
Εργαλεία	Αναπαράσταση και άλλα μέσα	Τι είδος γλώσσας ή αναπαράστασης χρησιμοποιείται στο έργο; Είναι συμβολική, σύνθετη (με οικεία στοιχεία), αυθεντική σε σύνδεση με το έργο; Γενικότερα ποια εργαλεία μπορούν να χρησιμοποιηθούν, τι εξηγήσεις δίνονται, τι συνδέσεις, τι πηγές και ποια βοηθήματα;
Δράσεις	Μαθηματικές δράσεις	Τι δράση προτείνει στους μαθητές; Ποια σύνδεση με μαθηματικές δράσεις (αναζήτηση ιδιοτήτων, κανονικοτήτων, ανάλυση και σύνθεση, δημιουργία συνδέσεων, παραστασιοποίηση, εξήγηση/ δικαιολόγηση, αναστοχαστική δράση και δράση γενίκευσης

		Αναζητιούνται γενικές λύσεις, μέθοδοι, κανόνες; Ποια βήματα γενίκευσης;
Κίνητρα	Εμπλοκή των μαθητών	Γιατί οι μαθητές θα εμπλακούν και θα δράσουν; Με τι κίνητρα και με ποιους στόχους – για ποιο αποτέλεσμα;
Επεξεργασία	Γνωστικές απαιτήσεις	Ποιες διαδικασίες σκέψης απαιτούνται (απομνημόνευση και εφαρμογή διαδικασιών/αλγορίθμων χωρίς ή με κατανόηση, επίλυση/ αντιμετώπιση καταστάσεων, μοντελοποίηση, δικαιολόγηση, μεταγνωστική επεξεργασία, τυποποίηση, κριτική/ αξιολόγηση, δημιουργία);

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Ο χώρος της Μαθηματικής Εκπαίδευσης έχει αναπτύξει σημαντικούς προβληματισμούς στο θέμα της μαθηματικής δραστηριότητας και των μαθηματικών έργων αλλά υπάρχουν σημαντικά ερωτήματα που δεν έχουν ακόμα οριστικές απαντήσεις. Ανάμεσά τους το πώς αναπτύσσουν οι μαθητές τις διαδικασίες που αναφέραμε, πώς συνδέουν τις αρχικές ιδέες που σχηματίζουν για την αντιμετώπιση μιας κατάστασης ή ενός προβλήματος με τις επιδιωκόμενες μαθηματικές έννοιες, δηλαδή πώς συνδέουν την ατομική ή συλλογική ανάπτυξη νοήματος με την (επίσημη) μαθηματική γνώση, με ποια έργα και ποιες διαδικασίες οδηγούνται στις τροχιές ανάπτυξης και ολοκλήρωσης μαθηματικών εννοιών και κανόνων είναι ακόμα πεδία αναζήτησης.

Η ανάπτυξη των έργων στη σχολική τάξη οδηγούν στην καλλιέργεια αυτού που θα παρουσιάζαμε ως ‘μαθηματική επάρκεια’ που ο Kilpatric (Kilpatrick et al., 2001, p. 116) για το Mathematics Learning Study Committee of the US National Research Council συνοψίζει σε πέντε άξονες: εννοιολογική κατανόηση (εννοιών, πράξεων και σχέσεων), διαδικαστική κατανόηση (επιδεξιότητα στην εκτέλεση διαδικασιών), ικανότητα στην ανάπτυξη στρατηγικών (διατύπωση και λύση προβλημάτων), προσαρμοστικό συλλογιστική ικανότητα (για στοχασμό, εξήγηση και δικαιολόγηση) και παραγωγική προδιάθεση (απόδοση αξίας και εμπιστοσύνης στα Μαθηματικά). Η αξιολόγηση μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας θα μπορούσε πιθανά να επιτευχθεί από τον έλεγχο αυτών των κριτηρίων.

Οι διαφορετικές υποθέσεις μάθησης και οι διαφορετικές διδακτικές προτάσεις ξεκινούν από θέσεις κοινής αποδοχής όπως η ενεργοποίηση του μαθητή και η ανάγκη γενίκευσης των «τοπικών» λύσεων ενός προβλήματος ή μιας κατάστασης προς την κατεύθυνση της 'επίσημης' (κατά Brousseau) γνώσης, αλλά απατούνται ακόμα συνθέσεις που θα επιτρέψουν όχι μόνο σημαντικά ερευνητικά αποτελέσματα αλλά και πιο ολοκληρωμένες και αποτελεσματικές διδακτικές προτάσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ben-Zvi, D. and Arcavi, A.(2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics* 45: 35–65.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (2007). Readjusting Didactics to a Changing Epistemology, European, *Educational Research Journal*, 6 (2): 131-134.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, B. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education*, 243–307. Reidel.

Davydov, V.V. (1988). Problems of developmental teaching (Part I, II). *Soviet Education*, 30 (8-9), 6-37 & 3-83.

Engestrom, Y. (1999). Activity Theory and individual and social transformation. In Y. Engestrom, R. Mietinnen, & R.L. Punamaki (eds). *Perspectives on Activity Theory,* 19-38. Cambridge University Press.

Ernest, P. (2006). A Semiotic Perspective of Mathematical Activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics,* 61:67-101.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Kluwer.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education* 28: 524-49.

Howson, G. (2005). “Meaning” and School Mathematics. In J. Kiplatric, C. Hoyles, & O. Skovsmose (eds.), *Meaning in Mathematics Education*, 17-13. Springer.

Hoyles, C. (2005). Making Mathematics and Sharing Mathematics. Two paths to Co- constructing meanings. . In J. Kiplatric, C. Hoyles, & O. Skovsmose (eds.), *Meaning in Mathematics Education*, 139-158. Springer.

Kaldrimidou, M., Sakonidis, C. & Tzekaki, M (2008). Comparative readings of the nature of the mathematical knowledge under construction in the classroom, *ZDM*, 39: 235-245

Kaur, B. (2010). A Study of Mathematical Tasks from Three Classrooms in Singapore. In Y. Shimizu, B. Kaur, R. Huang, & D. J. Clarke (eds.), *Mathematical Tasks in Classrooms Around the World*, 15- 34. Sense Publishers.

Keitel, C. (2006). ‘Setting a Task’ in German Schools. Different Frames for Different Ambitions. In D. J. Clarke, C. Keitel, & Y. Shimizu (eds.), *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider’s Perspective*, 37-57. Sense Publishers.

Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics* 47(1): 101–116.

Leont’v, A.N. (1981). The problem of activity in psychology. In J.V. Wertsch (ed.), *The concept of activity in soviet psychology*, 37-71, NY.: Sharpe

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Noss, R., Healy, L. and Hoyles, C.(1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics* 33: 203–233.

RAND Mathematics Study Panel (2002). *Mathematical Proficiency for all Students: Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education* (DRU-2773-OERI). RAND Education and Science and Technology Policy Institute, Arlington, VA.

Resnick, L. (1987). Learning in School and Out. *Educational Researcher*, 6(9): 13-54.

Hershkowitz, R., Baruch B. Schwarz, B. B.,& Dreyfus,T. (2001). Abstraction in Context: Epistemic Actions. *Journal for Research in Mathematics Education* 32 (2): 195-222.

Radford, L. (2006). Elements of a Cultural Theory of Objectification, Special Issue on Semiotics, *Culture and Mathematical Thinking*: 103-129,

Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically; Problem Solving, Metacognition, and Sense making in Mathematics. In D. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 334-370. NY: MacMillan Publisher Co.

Shimizu,Y., Kaur, B., Rongjin Huang, R, Clarke, D. (2010). The Role of Mathematical Tasks in Different Cultures. In Y. Shimizu, B. Kaur, R. Huang, & D. J. Clarke (eds.), *Mathematical Tasks in Classrooms Around the World*, 1- 14. Sense Publishers.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, & C.Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Vol. 2, 827-876. Dortdrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stech, S. (2008). School Mathematics as a Developmantal Activity. In A. Watson, & P. Winbourne (eds.), *New Directions for Situated Cognition in Mathematics Education*, 13- 30. Sense Publishers.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological Perspective.* Springer.

Τζεκάκη, Μ (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg

Van Oers, B. (2006). An Activity Theory Approach to the Formation of Mathematical Cognition. Developing Topics through Predication in a mathematical Community. In J. Maasz & W. Schoeglmann (eds.), *New Mathematics Education Research and Practice*, 113-140. Sense Publishers.

Wenger, E. (1998*). Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Williams, G. (2002). Developing a shared understanding of task complexity. In L. Bazzini & C. Whybrow Inchley (Eds.), *Proceedings of CIEAEM53: Mathematical Literacy in the Digital Era*, 263-268.

Yackel, E., Cobb, P. & Wood, T. (1998). The interactive constitution of mathematical meaning in one second grade classroom: an illustrative example. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 17(4), 469-488.