

Διδακτική Μεθοδολογία

**Μαθαίνοντας
και διδάσκοντας μαθηματικά**

Χαράλαμπος Σακονίδης

ΥΠΕΠΘ

Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα 2004

Μέτρο 1.1. ΕΠΕΑΕΚ II

Εκπαίδευση Μουσουλμανοπαίδων 2002-2004

Επιστημονική υπεύθυνη της σειράς
«Κλειδιά και Αντικλειδιά»

Αλεξάνδρα Ανδρούσου

*Ο **Χαράλαμπος Σακονίδης** είναι Επίκουρος Καθηγητής στη Διδακτική των Μαθηματικών στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης.*

Κλειδιά και Αντικλειδιά

Είναι άραγε δυνατόν να δουλέψει κανείς αποτελεσματικά σε ένα απομονωμένο, ορεινό χωριό της Θράκης, όταν νιώθει αδυναμία επικοινωνίας λόγω γλώσσας; Πώς βρίσκει ένας εκπαιδευτικός ισορροπία ανάμεσα στους κανόνες του σχολικού θεσμού, στις απαιτήσεις των εξετάσεων, στα περιεχόμενα του αναλυτικού προγράμματος και στις ανάγκες των παιδιών; Πώς διδάσκει κανείς ελληνικά, όταν πάνω από τα μισά παιδιά στην τάξη είναι αλλόγλωσσα; Υπάρχουν τρόποι να κινητοποιήσουμε τα παιδιά ώστε να ενδιαφερθούν για το σχολείο; Πώς αξιολογούμε εάν οι μαθητές έμαθαν ή όχι ιστορία; Αντέχεται η σιωπή των μαθητών από το δάσκαλο; Πώς διορθώνουμε τα λάθη των παιδιών; Πώς επικοινωνούμε σε μια σχολική τάξη; Υπάρχει χώρος για ευχαρίστηση στο σημερινό σχολείο;

Τα παραπάνω ερωτήματα και πολλά άλλα απασχολούν τους εκπαιδευτικούς και συνδέονται άμεσα με την καθημερινή διδακτική τους πράξη. Κάθε τάξη ορίζεται ως συνάντηση υποκειμένων με διαφορετική το καθένα προσωπική ιστορία που καλούνται να δράσουν σε ένα ενιαίο πλαίσιο. Αυτή η συνάντηση δεν είναι εύκολη ούτε ανέ-

φελη και δεν υπακούει σε προδιαγεγραμμένους κανόνες. Αντιθέτως, είναι γεμάτη συγκρούσεις, δυσκολίες, συγκινήσεις, απογοητεύσεις, ικανοποιήσεις και δημιουργεί συνεχώς νέα ερωτήματα που αναζητούν απαντήσεις.

Τα Κλειδιά και Αντικλειδιά δεν πρόκειται να αποπειραθούν να δώσουν απαντήσεις, αλλά *εργαλεία* που θα επιτρέψουν στους αναγνώστες/χρήστες τους να συνθέσουν τις δικές τους λύσεις που αντιστοιχούν στη δική τους πραγματικότητα. Αυτό βασίζεται στην αρχή ότι η σχολική πραγματικότητα είναι πολύπλοκη, δυναμική, απρόβλεπτη και κυρίως μοναδική. Άρα, δεν υπάρχει μία μόνο λύση, μία συνταγή μαγική που λύνει τα προβλήματα. Κάθε εκπαιδευτικό πλαίσιο έχει τις δικές του παραμέτρους που πρέπει πριν από όλα να εντοπιστούν για να αναζητηθούν στη συνέχεια οι κατάλληλες λύσεις.

Τα Κλειδιά και Αντικλειδιά είναι *εργαλεία ανάγνωσης* της σχολικής πραγματικότητας. Δηλαδή, κάθε κείμενο που έχετε στα χέρια σας αποτελεί μια προσπάθεια σύντομης απάντησης σε ένα ερώτημα (π.χ. πώς μαθαίνουν τα παιδιά;) από τη σκοπιά μιας επιστημονικής προσέγγισης (π.χ. της γνωστικής ψυχολογίας). Μπορεί ωστόσο σε άλλο κείμενο να συναντήσετε απάντηση στο ίδιο ερώτημα από διαφορετική επιστημονική σκοπιά (π.χ. την

κοινωνιολογία). Τα κείμενα, γραμμένα από εκπαιδευτικούς και πανεπιστημιακούς διάφορων ειδικοτήτων, ακολουθούν την ίδια δομή: Ξεκινούν από μια σκηνή σε ένα σχολικό πλαίσιο, αναλύουν τι συμβαίνει και ύστερα διατυπώνουν απαντήσεις στηριγμένες σε μία επιστήμη. Δηλαδή, με αφετηρία την εκπαιδευτική *πράξη*, περνούν μέσα από μια διαδικασία ανάλυσης και σύνθεσης από τη *θεωρία*, για να καταλήξουν στα χέρια σας σαν *κλειδιά* για τη δική σας διδακτική πρακτική.

Τα κείμενα συνδέονται λειτουργικά μεταξύ τους γιατί καθένα αναδεικνύει και μια ξεχωριστή ψηφίδα από την πραγματικότητα της εκπαιδευτικής πράξης. Μελετώντας και δουλεύοντας πάνω στον τρόπο με τον οποίο τα κείμενα συνδέονται μεταξύ τους, φανταστήκαμε πολλά από τα κλειδιά που μπορούν να ξεκλειδώσουν πολλά από τα φαινόμενα που αναλύουμε. Ωστόσο, μόνο εσείς μπορείτε να κατασκευάσετε τα αντικλειδιά που έχουν νόημα τη συγκεκριμένη στιγμή για το δικό σας πλαίσιο, που κάνουν... κλικ και ανοίγουν μια «πόρτα» που οδηγεί σε δικές σας λύσεις.

Αυτή η πολυπρισματική, διεπιστημονική προσέγγιση της καθημερινής εκπαιδευτικής πράξης είναι προφανές ότι χρησιμοποιεί ως έναυσμα μια ευρεία ποικιλία αναφορών

σε σχολικές πραγματικότητες: τάξεις στην πόλη, στο βουνό, μονοθέσια σχολεία, μειονοτικά σχολεία της Θράκης, σχολεία με πολλούς αλλόγλωσσους μαθητές, σχολεία σημερινά, στην Ελλάδα και αλλού, άλλοτε και τώρα. Είναι κοινή πεποίθηση όλων όσοι συμμετέχουμε σε αυτή τη σειρά ότι συχνά βοηθάει να αναγνώσει κανείς τη δική του εκπαιδευτική πραγματικότητα βλέποντας κάτι ανάλογο που συμβαίνει σε μια άλλη τάξη, σε ένα άλλο πλαίσιο, ώστε μέσα από την ανάλυση και την κατανόησή του να μεταφέρει την εμπειρία αυτής της γνώσης στη δική του πραγματικότητα, στο δικό του πλαίσιο. Η απόσταση από τα δικά μας πράγματα τελικά βοηθάει να τα καταλάβουμε καλύτερα.

Τρεις θεματικές ενότητες, η *Διδακτική Μεθοδολογία*, το *Κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο της εκπαίδευσης* και τα ζητήματα *Ταυτότητας και Ετερότητας*, αποτελούν τον καμβά πάνω στον οποίο, μέσα από διαφορετικές επιστημονικές προσεγγίσεις, προσπαθούμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα της καθημερινής εκπαιδευτικής πρακτικής. Δεν κρύβουμε τις δυσκολίες ούτε αποσιωπούμε τα όρια των προτάσεων που κάνουμε και δεν πιστεύουμε ότι η ευθύνη για τις λύσεις είναι μόνο στα χέρια των εκπαιδευτικών. Υποστηρίζουμε όμως ότι μπορούν οι εκπαιδευτικοί να πάρουν στα χέρια τους τα εργαλεία που

θα τους επιτρέψουν να καταλάβουν καλύτερα το πλαίσιο μέσα στο οποίο εργάζονται, να το βελτιώσουν και να αντλήσουν ικανοποίηση από τη δουλειά τους.

Τα Κλειδιά και Αντικλειδιά ευτύχησαν να συναντήσουν στη διαδρομή τους άξιους τεχνίτες που τόσο στην έντυπη όσο και στην ηλεκτρονική μορφή τα έκαναν ανθεκτικά, λειτουργικά και... έτοιμα να ξεκλειδώσουν. Τους ευχαριστώ όλους και όλες θερμά.

Αλεξάνδρα Ανδρούσου
Εκπαιδευτική Ψυχολόγος
Νοέμβριος 2002

Από τη σειρά «Κλειδιά και Αντικλειδιά» κυκλοφορούν τα βιβλία:
θεματικό πεδίο *Διδακτική Μεθοδολογία*

- *Διδάσκοντας ιστορία*
Αβδελά Ε.
- *Κίνητρο στην εκπαίδευση*
Ανδρούσου Α.
- *Ανάγνωση και ετερότητα*
Αποστολίδου Β.
- *Εμπύχωση στην τάξη*
Δημητρίου Α., Λαγοπούλου Β., Νικολάου Β.
- *Κοινωνικό πλαίσιο και διδακτική πράξη*
Ζωγραφάκη Μ.
- *Η επικοινωνιακή προσέγγιση του γλωσσικού μαθήματος*
Ιορδανίδου Α., Σφυρόερα Μ.
- *Δημιουργικές δραστηριότητες και διαδικασίες μάθησης*
Κουτσούρη Α.
- *Για τη μέθοδο project*
Μάγος Κ.
- *Διαθεματική προσέγγιση της γνώσης*
Σφυρόερα Μ.
- *Διαφοροποιημένη παιδαγωγική*
Σφυρόερα Μ.
- *Η επεξεργασία της εικόνας στη σχολική τάξη*
Σφυρόερα Μ.
- *Το λάθος ως εργαλείο μάθησης και διδασκαλίας*
Σφυρόερα Μ.
- *Φυσικές Επιστήμες: διδασκαλία και εκπαίδευση*
Τσελφές Β.

- *Μουσική στο σχολείο*
Τσιρίδης Π.
- *Διδασκαλία σε ομάδες*
Χοντολίδου Ε.
- *Η επανατροφοδότηση των μαθητών στα γραπτά τους κείμενα*
Χοντολίδου Ε.

Θεματικό πεδίο Κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο της εκπαίδευσης

- *Κοινωνικές ανισότητες στο σχολείο*
Ασκούνη Ν.
- *Οικογένεια και σχολείο*
Δραγώνα Θ.
- *Στερεότυπα και προκαταλήψεις*
Δραγώνα Θ.
- *Η μη λεκτική επικοινωνία στο σχολείο*
Κούρτη Ε.
- *Πολιτισμός και σχολείο*
Πλεξουσάκη Ε.
- *Η μειονοτική εκπαίδευση της Θράκης*
Τσιτσελίκης Κ.
- *Γλώσσα του σπιτιού και γλώσσα του σχολείου*
Φραγκουδάκη Α.
- *Η εθνική ταυτότητα, το έθνος και ο πατριωτισμός*
Φραγκουδάκη Α.
- *Η ικανότητα του λόγου και η γλωσσική διδασκαλία*
Φραγκουδάκη Α.

θεματικό πεδίο *Ταυτότητες και Ετερότητες*

- «Εμείς» και οι «άλλοι»: εμπειρίες εκπαιδευτικών
Δημητρίου Α., Λαγοπούλου Β., Πετρίδης Τ.
 - Ταυτότητα και εκπαίδευση
Δραγώνα Θ.
 - Επικοινωνία και ταυτότητες σε μια πολύγλωσση οικογένεια
Μανουσοπούλου Α.
 - Γλωσσική ετερότητα στην Ελλάδα
Μπαλτσιώτης Λ.
 - Ταυτότητες και λογοτεχνία στο σχολείο
Χοντολίδου Ε.
-

Για περισσότερα «Κλειδιά και Αντικλειδιά»:
www.kleidiakaiantikleidia.net

Μαθαίνοντας και διδάσκοντας μαθηματικά

Σκηνή 1η

Η Λία είναι μαθήτρια της Στ' τάξης του δημοτικού σχολείου.

Εκπαιδευτικός: *Μια παρέα 5 παιδιών αποφάσισε να παραγγείλει 2 πίτσες. Πόσα ίσα κομμάτια πίτσας δικαιούται να φάει το καθένα;*

Λία: *Πίτσες... οικογενειακές ή ατομικές;*

Εκπ.: *Ας πούμε οικογενειακές.*

Λία: *Θα χωρίσουμε τις πίτσες σε οκτώ κομμάτια...*

Εκπ.: *Οκτώ; Γιατί οκτώ;*

Λία: *Τόσα κομμάτια δεν έχει η οικογενειακή πίτσα που παραγγέλνουμε από την πιτσαρία;*

Σκηνή 2η

Η Ελένη και ο Μάριος, δύο 12χρονοι μαθητές, εξηγούν πώς υπολόγισαν το άθροισμα $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

Εκπ.: *Μπορείτε να μου εξηγήσετε γιατί το κάνατε αυτό;*

Ελένη: *Γιατί κάνουμε τους «κάτω» αριθμούς ίδια κλάσματα.*

Εκπ.: Και γιατί θα πρέπει να κάνετε τους «κάτω» αριθμούς ίδιους;

Ελένη: Γιατί δεν μπορείς να τα προσθέσεις αν είναι τρίτα και τέταρτα.

Μάριος: Πρέπει να βρεις τον αριθμό που τον διαιρούν και το 3 και το 4. Και μετά, πόσες φορές χωράει το 3 στο 12 και μετά τέσσερις φορές το 2 είναι 8... αυτό είναι 17/12...

Εκπ.: Ωραία, αντί να γράψετε $2/3 + 3/4$, γράψατε $8/12 + 9/12$. Θα μπορούσε κάποιος να νομίσει ότι κάνατε άλλο άθροισμα;

Μάριος: Ναι.

Εκπ.: Τι θα του λέγατε;

Μάριος: Πρέπει να τα κάνει δωδέκατα αν δεν είναι τα ίδια.

Εκπ.: Αλλά κάποιος μπορεί να νομίσει ότι κάνετε κάποιο διαφορετικό άθροισμα.

Μάριος: Ναι... έτσι το μάθαμε.

Οι παραπάνω σκηνές είναι ενδεικτικές τόσο του τρόπου με τον οποίο διαμορφώνεται η μαθηματική γνώση, όσο και του είδους της μαθηματικής γνώσης που κατασκευάζουν οι μαθητές, ως αποτέλεσμα των διαδικασιών μάθησης και διδασκαλίας που ακολουθούνται στην τάξη. Παρά το γεγονός ότι η έρευνα στο χώρο της μαθηματι-

κής εκπαίδευσης γνώρισε τεράστια ανάπτυξη τα τελευταία 30 περίπου χρόνια, τα ευρήματά της δεν κατάφεραν να επηρεάσουν με άμεσο και αποτελεσματικό τρόπο τη διδακτική πράξη, η οποία παραμένει εγκλωβισμένη σε πρακτικές που έχουν αποδειχτεί αναποτελεσματικές και συχνά επιζήμιες. Οι νέες οπτικές που διαμορφώθηκαν, οι οποίες υποδεικνύουν την απομάκρυνση της διδασκαλίας από το μοντέλο της «μετάδοσης της γνώσης» και ενθαρρύνουν την υιοθέτηση εναλλακτικών προσεγγίσεων που ευνοούν την ενεργό κατασκευή της γνώσης από το μαθητή σε ανοικτά μαθησιακά περιβάλλοντα (στο πλαίσιο των οποίων αναγνωρίζεται η καθοριστική συμβολή της αλληλεπίδρασης ψυχολογικών, πολιτισμικών και κοινωνικών παραμέτρων στη διαμόρφωσή της), δεν άγγιξαν ουσιαστικά την εκπαιδευτική πραγματικότητα. Στις ελάχιστες περιπτώσεις που αυτό επιχειρήθηκε, δεν προχώρησε πέρα από μια, πρώτου επιπέδου, αναπροσαρμογή και συχνά απλή «μεταμφίεση» των παλαιών πρακτικών με καινούρια ένδυση. Το αποτέλεσμα ήταν μια, υβριδικής μορφής, διδακτική πράξη με εξαιρετικά πενιχρά οφέλη, η οποία όμως οικειοποιήθηκε το χαρακτηρισμό της «σύγχρονης», δικαιώνοντας την επιφυλακτικότητα και, ορισμένες φορές, ακόμη και την καχυποψία της ευρύτερης εκπαιδευτικής κοινότητας για κάθε μορφής εναλλακτική προσέγγιση.

Στις επόμενες ενότητες επιχειρείται μια πρώτη αποτύπωση του πλαισίου της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως αυτό οριοθετείται από τα σύγχρονα επιστημονικά δεδομένα. Η αποτύπωση επιχειρείται στη βάση των παρακάτω ερωτημάτων, τα οποία θεωρούμε ότι συνιστούν βασικούς άξονες για τον προσδιορισμό της ταυτότητάς της:

- Τι μαθηματικά θέλουμε να μάθουν οι μαθητές;
- Σε ποιο είδος μαθηματικής σκέψης θέλουμε να μυήσουμε τους μαθητές;
- Πώς γίνεται σήμερα κατανοητό το φαινόμενο της μάθησης στα μαθηματικά;
- Ποιοι μαθητές και γιατί αποτυγχάνουν στα μαθηματικά;
- Ποιες είναι οι ιδιαιτερότητες της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών σε μια πολυπολιτισμική τάξη;

Τι μαθηματικά θέλουμε να μάθουν οι μαθητές;

Οι αντιλήψεις της επιστημονικής κοινότητας σε ό,τι αφορά στην ταυτότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης άλλαξαν σημαντικά τις τελευταίες δεκαετίες. Οι προτεινόμενες διδακτικές προσεγγίσεις μετατοπίστηκαν από

την επιδίωξη της απλής κατάκτησης συγκεκριμένων αριθμητικών και γεωμετρικών δεξιοτήτων από τους μαθητές στην έμφαση σε διαδικασίες μάθησης μέσα από την ανακάλυψη και στη συνέχεια, σήμερα, στην εστίαση στην επίλυση προβλήματος. Τα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών των μαθηματικών επικεντρώνονται στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του συλλογισμού, στην καλλιέργεια ικανοτήτων και δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος και στην απόκτηση από τους μαθητές εμπιστοσύνης στον εαυτό τους γι' αυτές τις ικανότητες. Η έμφαση της διδακτικής πράξης στην τάξη δίνεται πλέον στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κάνουν λογικές συνδέσεις και διατυπώνουν τις σκέψεις τους κατά την ενεργό εμπλοκή τους στην επίλυση προβλημάτων, καθώς παράλληλα αναπτύσσουν άλλες δεξιότητες και ικανότητες οι οποίες θεωρούνται σημαντικές στην κοινωνία μας. Βασικός προσανατολισμός της σύγχρονης μαθηματικής εκπαίδευσης είναι ότι οι μαθητές, για να μπορέσουν να αποδώσουν νόημα στα μαθηματικά, θα πρέπει να τα αντιληφθούν και να τα χρησιμοποιήσουν ως εργαλείο συλλογισμού και επίλυσης προβλημάτων, με αυτοπεποίθηση και συνείδηση των προκλήσεων και των απολαύσεων που προσφέρει η ενασχόληση με αυτά.

Ποια είναι, όμως, εκείνα τα χαρακτηριστικά των μαθηματικών που τα αναδεικνύουν σε σημαντικό για την κοινωνία μας πεδίο γνώσης στο οποίο είναι επιθυμητό και επιβεβλημένο να έχουν πρόσβαση όλοι οι μαθητές;

Τα μαθηματικά αποτελούν μια πολυσύνθετη ανθρώπινη προσπάθεια. Είναι βασικό η σχολική τους εκδοχή να εξασφαλίζει στους μαθητές τη δυνατότητα να εκτιμήσουν εκείνα τα στοιχεία αυτού του σημαντικού επιτεύγματος του ανθρώπινου πολιτισμού τα οποία το καθιστούν ένα τόσο ισχυρό εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου μας και να τους εκπαιδεύσει σε αυτά. Πιο συγκεκριμένα, θα ήταν σημαντικό η διδασκαλία των μαθηματικών να προσφέρει στους μαθητές ευκαιρίες για να προσεγγίσουν, και στη συνέχεια να αξιοποιήσουν, τα παρακάτω θεμελιώδη γνωρίσματα της μαθηματικής γνώσης:

α) Τα μαθηματικά καθιστούν δυνατή την αναπαράσταση σχέσεων, μετατρέποντάς τες έτσι σε «υλικές» οντότητες που μπορεί να χειριστεί ο ανθρώπινος νους.

Οι σχέσεις δε γίνονται αντιληπτές με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο γίνονται αντιληπτά τα αντικείμενα που συσχετίζονται. Συνάγονται μετά από παρατήρηση και διακρίνονται για την αφαιρετική τους φύση. Για να τις χειρι-

στούμε, χρειάζεται να τις κάνουμε «ορατές», με κάποιο τρόπο. Τα μαθηματικά επιτυγχάνουν αυτό ακριβώς, αναπαριστώντας τις αφηρημένες σχέσεις με σύμβολα, σχήματα και διαγράμματα.

β) Τα μαθηματικά καθιστούν δυνατή την πρόσβαση της σκέψης σε ένα πλήθος από τυπικά σχήματα (πράξεις, συναρτήσεις κτλ.).

Αντικείμενο των μαθηματικών αποτελεί η μελέτη της συμπεριφοράς τυπικών (αφηρημένων) σχημάτων (π.χ. πράξεων, συναρτήσεων κτλ.). Για να κάνουν τη μελέτη αυτή εφικτή, χρησιμοποιούν μεταβλητές (αλγεβρικές ή άλλες) για να δηλώσουν δομές και διαδικασίες, μετατρέποντας έτσι το γενικό σε ειδικό και συγκεκριμένο και άρα προσπελάσιμο από τη σκέψη.

γ) Τα μαθηματικά εθίζουν τον ανθρώπινο νου στη θεώρηση και στην εφαρμογή εναλλακτικών προσεγγίσεων.

Η ενασχόληση των μαθηματικών με πλήθος τυπικών σχημάτων ενθαρρύνει την αξιοποίηση εναλλακτικών προσεγγίσεων για την ερμηνεία μιας κατάστασης. Επιπλέον, οδηγεί τη σκέψη σε πειραματισμό, δηλαδή στη μελέτη των συνεπειών της εφαρμογής συγκεκριμένων υποθέσεων σε μια κατάσταση και στην εκτέλεση προσομοιώσεων της κατάστασης σε διάφορα γνωστικά πεδία.

Τα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών παρέχουν ελάχιστες ευκαιρίες στους μαθητές να αναγνωρίσουν, να εκτιμήσουν και να αξιοποιήσουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά των μαθηματικών. Στη συντριπτική τους πλειοψηφία προβάλλουν τη θεώρηση ότι υπάρχει ένας και μοναδικός τρόπος «μαθηματοποίησης» μιας κατάστασης και στόχος του μαθητή είναι να εντοπίσει τη μαθηματική δομή που ενυπάρχει σε αυτήν. Πολύ συχνά μάλιστα ενθαρρύνουν την απομνημόνευση γεγονότων και αλγορίθμων και την απλή εφαρμογή τους. Αντίθετα, όσα προηγήθηκαν υποδεικνύουν ότι, για να μπορέσει ο μαθητής να συνειδητοποιήσει και να αξιοποιήσει την ισχύ των μαθηματικών, χρειάζεται να του δοθούν οι δυνατότητες να αναπτύξει ικανότητες και δεξιότητες όπως:

- να αναπαριστά με μαθηματικό τρόπο μια κατάσταση, χρησιμοποιώντας φυσικά αντικείμενα, νοητικές εικόνες, σχεδιαγράμματα, τη γλώσσα, μαθηματικά σύμβολα ή όποιον άλλο τρόπο,
- να αναζητά κανονικότητες,
- να θέτει ερωτήματα για τον τρόπο με τον οποίο τα μέρη ενός προβλήματος συγκροτούν το όλο,
- να χρησιμοποιεί ένα σύνολο από αποτελεσματικές στρατηγικές,
- να αναζητά εναλλακτικές προσεγγίσεις σε ένα πρόβλημα, να τις σχεδιάζει, να πειραματίζεται με αυτές, εκτε-

λώντας προσομοιώσεις ή με όποιον άλλο τρόπο, να τις συγκρίνει, να τις αξιολογεί και να τις επαληθεύει.

Οι παραπάνω ικανότητες και δεξιότητες θεωρείται σήμερα σημαντικό να αναπτύσσονται σε τρεις άξονες. Ο πρώτος αφορά στη μαθηματική γνώση που είναι χρήσιμη για την επαγγελματική και κοινωνική ζωή του ατόμου και περιλαμβάνει:

- βασικές μαθηματικές δεξιότητες και αριθμητικές γνώσεις, καθώς και την εφαρμογή τους σε καθημερινές καταστάσεις, όπως οικονομικές συναλλαγές και εργασία,
- τρόπους επίλυσης μιας ποικιλίας πρακτικών και άλλων προβλημάτων,
- μαθηματικές γνώσεις που:
 - αποτελούν τη βάση για την περαιτέρω μελέτη των μαθηματικών αλλά και άλλων γνωστικών πεδίων,
 - είναι αναγκαίες για τη λειτουργία του ατόμου ως πολίτη, ως κριτικού αναγνώστη των κοινωνικών θεμάτων και ιδιαίτερα των θεμάτων δικαιοσύνης, περιβάλλοντος κτλ.,
 - εξασφαλίζουν την απόκτηση προσόντων απαραίτητων για μια επιτυχή επαγγελματική σταδιοδρομία.

Ο δεύτερος άξονας αφορά στην ανάπτυξη του μαθητή ως αυτόνομης προσωπικότητας και περιλαμβάνει:

- την ανάπτυξη της εμπιστοσύνης του στις προσωπικές του μαθηματικές ικανότητες και δεξιότητες,
- την ανάπτυξη της δημιουργικότητας και της προσωπικής του έκφρασης μέσα από τα μαθηματικά.

Ο τρίτος, τέλος, άξονας επικεντρώνεται στην αναγνώριση από τους μαθητές της συμβολής των μαθηματικών στην κοινωνία και τον πολιτισμό κάθε λαού. Είναι αναγκαίο να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα από τα σπουδαιότερα επιτεύγματα του ανθρώπινου είδους και ότι κάθε κοινωνία και κάθε πολιτισμός χάραξε το δικό του δρόμο στην προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης.

Σε ποιο είδος μαθηματικής σκέψης θέλουμε να μυήσουμε τους μαθητές;

Στην προηγούμενη ενότητα υποστηρίχτηκε ότι οι μαθηματικές εμπειρίες μάθησης που είναι σήμερα επιθυμητές για τους μαθητές συνδέονται με ικανότητες όπως η επαναδιατύπωση ή η τροποποίηση μιας προβληματικής κατάστασης, η ανάλυση των μερών ενός προβλήματος και

του τρόπου με τον οποίο αλληλεπιδρούν και συγκροτούν το όλο, η αποτελεσματική χρήση αναπαραστάσεων, η διατύπωση και ο έλεγχος υποθέσεων, η αναζήτηση κανονικοτήτων, ο σχεδιασμός και η εκτέλεση ενεργειών για την επίλυση ενός προβλήματος, η αναζήτηση εναλλακτικών προσεγγίσεων κτλ.

Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι το είδος της μάθησης που είναι σήμερα επιθυμητό στα μαθηματικά δε διαφέρει ουσιαστικά από αυτό που είναι επιθυμητό για την ανάγνωση και τη γραφή. Για παράδειγμα, οι Strickland και Morrow (1989), επικεντρώνοντας τη μελέτη τους σε παιδιά προνηπιακής και νηπιακής ηλικίας, σύγκριναν δύο προσεγγίσεις στη μάθηση της ανάγνωσης και της γραφής, επιχειρώντας να αναδείξουν τα πλεονεκτήματα της μιας έναντι της άλλης. Η πρώτη δίνει έμφαση στην άσκηση των μαθητών σε γλωσσικές δεξιότητες, ενώ η δεύτερη, γνωστή στη βιβλιογραφία ως «αναδυόμενος εγγραμματισμός», την οποία οι συγγραφείς υποστηρίζουν, εστιάζεται στην ενθάρρυνση και αξιοποίηση πρακτικών επίλυσης προβλήματος. Ένα παράδειγμα της τελευταίας περίπτωσης από την ελληνική πραγματικότητα¹, παρόμοιο με αυτό που αναφέρουν οι Strickland

¹ Το παράδειγμα προέρχεται από δεδομένα που συγκεντρώθηκαν από τη Δρα Χαρά Κορτέση-Δαφέρμου για τη μελέτη της

και Morrow για να υποστηρίξουν τα σχετικά επιχειρήματά τους, αποτελεί η περίπτωση του Φίλιππου, η οποία περιγράφεται με λεπτομέρεια παρακάτω.

Η δασκάλα, στο πλαίσιο δημιουργικών δραστηριοτήτων γραφής, προτείνει στην Α' τάξη ενός δημοτικού σχολείου:

Εκπ.: *Να γράψετε τι σας αρέσει να κάνετε πολύ.*

Φίλιππος: *Ταξίδια!* (με ενθουσιασμό)

Εκπ.: *Γράψε πρώτα τη λέξη «ταξίδια», λοιπόν.*

Ο Φίλιππος γράφει «ταξι...» και σταματά. Αρχίζει να λέει δυνατά μια σειρά από λέξεις, όπως «ξύλο» και «ταξί», επικαλούμενος έτσι την αναπτυσσόμενη γνώση του για τις κανονικότητες της γλώσσας. Αντίθετα με το μαθητή που επαναλαμβάνει «ξου» όταν βλέπει το γράμμα «ξ», ο Φίλιππος έχει μάθει ότι υπάρχουν σταθερές στη γλώσσα στις οποίες μπορεί κανείς να στηριχτεί. Το «ξ» γι' αυτόν είναι μια περίπτωση που άξιζε να διερευνηθεί. Η δασκάλα του παρακολουθεί διακριτικά τις προσπάθειές του, σημειώνοντας τις αλλαγές στις οποίες υπόκειται στη συνέχεια η γραφή της λέξης «ταξίδια». Αρχίζοντας με τη γραφή «ταχι» (από τη λέξη TAXI που

εξέλιξης της γραφής των παιδιών στο πλαίσιο των Πιλοτικών Προγραμμάτων Ενισχυτικής Διδασκαλίας (ΕΠΕΑΕΚ II – ΑΠΘ, με επιστημονική υπεύθυνη την Καθηγήτρια Τζέλα Βαρνάβα-Σκούρα).

γνώριζε), ο Φίλιππος μετακινήθηκε στη γραφή «ταχιδγία», αλλά ήταν φανερό ότι κάτι δεν του άρεσε σε αυτήν. Άρχισε, λοιπόν, να κοιτά γύρω του. Η προσπάθειά του τράβηξε την προσοχή της Μαρίας η οποία καθόταν δίπλα του.

Μαρία: *Δεν το γράφεις σωστά. Αυτό είναι χ, που το έχει και το όνομα του Χάρη.*

«Τακσι...» επανήλθε ο Φίλιππος, διστάζοντας για τη συνέχεια αυτή τη φορά. Άρχισε να κοιτά διερευνητικά το χώρο (μια πρακτική στην οποία είχαν μυηθεί τα παιδιά, καθώς στην τάξη υπήρχαν πίνακες αναφοράς με γλωσσικό υλικό χρήσιμο για τις καθημερινές δραστηριότητες και επιγραφές που ενημέρωναν για το περιεχόμενο κουτιών, συρταριών και ντουλαπιών). Το μάτι του έπεσε πάνω στο μεγάλο κουτί με την επιγραφή «Ξύλινα παιγνίδια».

Φίλιππος: Ξ, ξ, ξ (δυνατά)

Το βλέμμα του φωτίστηκε και με ενθουσιασμό σημείωσε τη λέξη «ταξιδγία».

Φίλιππος: *Ουφ! Το έγραψα!* (με ευχαρίστηση)

Στη νέα του, λοιπόν, προσπάθεια ξεπέρασε το πρόβλημα με το «ξ», όχι όμως και με το «δια», παρά το γεγονός ότι η επιγραφή «Ξύλινα παιγνίδια» περιείχε τη «λύση» και γι' αυτό το μέρος της λέξης, που, ωστόσο, τράβηξε την προσοχή του. Ξανακοίταξε προσεκτικά την επιγρα-

φή. Προβληματίστηκε. Ξανακοίταξε αυτό που είχε γράψει. Τελικά, διόρθωσε «ταξίδια», μονολογώντας δυνατά.

Φίλιππος: *Δε γράφουμε το γ, το ίδιο με τα «παιδιά»...* (απευθυνόμενος στη δασκάλα του, η οποία τον παρακολουθούσε διακριτικά, με φανερή ευχαρίστηση και ενδιαφέρον). *Κυρία, το έγγραφο σωστά;*

Μελετώντας προσεκτικά τις ιστορίες που έγραφε ο Φίλιππος στη διάρκεια των επόμενων μηνών, η δασκάλα του διαπίστωσε ότι η γραφή του βελτιωνόταν και ωρίμαζε και οι ιστορίες του γίνονταν πιο σύνθετες και πιο πλήρεις. Είχε διδαχτεί κάποια σημαντικά πράγματα για τις συνέπειες και τις ασυνέπειες της γλώσσας, ενώ η ικανότητά του να συνθέτει (ο βασικότερος στόχος της διδασκαλίας της γραφής) βρήκε έδαφος να αναπτυχθεί.

Η περίπτωση του Φίλιππου περιγράφεται παραπάνω με λεπτομέρεια γιατί αναδεικνύει βασικά στοιχεία στα οποία θεωρείται σήμερα σκόπιμο να εστιάζεται η μαθηματική εκπαίδευση, από την πρώτη κιόλας σχολική ηλικία. Συγκεκριμένα, αποκαλύπτει εκπληκτικές ομοιότητες με το είδος των μαθηματικών εμπειριών τις οποίες επιβάλλεται να παρέχει το σχολείο. Όταν στα μαθηματικά υποστηρίζουμε ότι θα πρέπει «να βοηθήσουμε το μαθητή να αναπτύξει μαθηματική ισχύ», συχνά δεν είναι σαφές τι εν-

νοούμε. Πολλά από τα στοιχεία τα οποία περιλαμβάνονται στην προσπάθεια του Φίλιππου να γράψει σωστά τη λέξη «ταξίδια» ανταποκρίνονται με εντυπωσιακή, θα μπορούσε να υποστηρίξει κανείς, ακρίβεια στις διαδικασίες και στις ενέργειες που θα πρέπει να χαρακτηρίζουν τις μαθησιακές εμπειρίες των μαθητών στα μαθηματικά.

Διαπιστώνουμε ότι ο Φίλιππος έχει συνειδητοποιήσει ότι ο *κατάλληλος τρόπος* για να προχωρήσει στη σωστή γραφή της λέξης «ταξίδια» είναι η *αναζήτηση κανονικότητων* της γλώσσας. Η προσεκτική παρατήρηση των μαθητών φανερώνει ότι αυτή η συνειδητοποίηση δεν μπορεί να θεωρηθεί δεδομένη. Συχνά στα μαθηματικά η πρακτική που ακολουθείται είναι «κάνε αυτό που σου λένε» ή «κάνε το όπως σου λένε», η οποία αποθαρρύνει τους μαθητές από το να αναζητούν κανονικότητες, πόσο μάλλον με δική τους πρωτοβουλία. Επιπλέον, ο Φίλιππος μάθαινε τότε να *επιχειρεί να χρησιμοποιεί κανονικότητες*, γεγονός σημαντικό, που διαφέρει από την απλή αναζήτηση κανονικότητων και αφορά στη συνειδητοποίηση ότι μια τέτοια αναζήτηση μπορεί να αποτελεί ένα πολύτιμο εργαλείο επίλυσης προβλημάτων.

Υιοθέτησε και διατήρησε κριτική στάση στην αναζήτησή του: παρακολουθούσε και έλεγχε τις επιλογές που επι-

χειρούσε στη λέξη «ταξίδια» και γι' αυτό αντιλήφθηκε και απέρριψε τελικά τη γραφή «ταξιδγια» ως μη ανταποκρινόμενη στους ήχους της λέξης «ταξίδια», αλλάζοντας, μετά την παρέμβαση της συμμαθήτριάς του και με δική του στη συνέχεια απόφαση, το «ταξιδγια» σε «ταξιδγια». Ο Φίλιππος ήταν *πρόθυμος να εγκαταλείπει μια ιδέα που είχε συγκροτήσει*, αν και όχι με ευκολία. Όταν είδε την επιγραφή «Ξύλινα παιγνίδια» ξεσήκωσε μόνο μέρος της και, χωρίς να εγκαταλείπει όλη την προηγούμενη ιδέα του, παρήγαγε το υβρίδιο «ταξίδγια». Επειδή, ωστόσο, συνέχισε να διατηρεί κριτική στάση απέναντι στη γραφή του, σύντομα εγκατέλειψε το «ταξίδγια» για το «ταξίδια».

Θα μπορούσε κανείς να αναλύσει την περίπτωση του Φίλιππου περισσότερο και να εντοπίσει επιπλέον ενέργειες τις οποίες υιοθέτησε για να αναπτύξει τις δυνάμεις του στη χρήση της ελληνικής γλώσσας. Το βασικό σημείο είναι ότι όλα όσα περιλαμβάνονται σε μια τέτοια διαδικασία είναι τόσο πολλά και τόσο σύνθετα, που θα ήταν αδύνατο να διδαχτούν όλα στα παιδιά. Ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να τα ενθαρρύνει και να τα καθοδηγήσει, αλλά η απόκτηση αυτών των ικανοτήτων και στάσεων θα προκύψει ως αποτέλεσμα της εμπειρίας του

παιδιού μέσα σε ένα υποστηρικτικό περιβάλλον που το προτρέπει να διαμορφώνει υποθέσεις και να τις διερευνά.

Συχνά υποστηρίζεται ότι πολλά εκπαιδευτικά προβλήματα μπορούν να επιλυθούν με τη συγκρότηση λεπτομερών και συγκεκριμένων Προγραμμάτων Σπουδών. Ωστόσο, τέτοια προγράμματα βασίζονται συνήθως, κατά κύριο λόγο, στην επίδειξη, στη διάλεξη και σε σχετικά αυτοματοποιημένες πρακτικές, με πολύ πιθανό αποτέλεσμα να μη δίνονται ευκαιρίες για αναζητήσεις και, κατά συνέπεια, να μην αποκτώνται καθόλου ικανότητες σαν αυτές που περιγράφθηκαν παραπάνω. Ο Φίλιππος, όπως είδαμε, αναζήτησε σιωπηρά, αλλά με ιδιαίτερα εκφραστικό τρόπο, βοήθεια, η οποία ήρθε από τη συμμαθήτριά του. Η παρέμβασή της, αν και ουσιαστική, υπήρξε αποτελεσματική μόνο γιατί ο Φίλιππος *την έκρινε ως τέτοια*. Πολλά λεπτομερή Προγράμματα Σπουδών δεν ενθαρρύνουν την κριτική ακρόαση του τι λένε και τι κάνουν τα παιδιά, αλλά αντίθετα ενθαρρύνουν μια παθητική αποδοχή αυτών που παρουσιάζει ο εκπαιδευτικός, όπως υποδεικνύει η δεύτερη σκηνή που είδαμε στην αρχή. Ο Φίλιππος έπρεπε να αποφασίσει μόνος του για πόσο διάστημα και πόσο προσεκτικά θα συνέχιζε να εργάζεται πάνω στις διαφορετικές εκδοχές του της λέξης «ταξίδια». Επέλεξε να μη στηριχτεί μόνο στη δασκάλα του γι' αυτήν του την από-

φαση. Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι ο Φίλιππος ένωθε την ανάγκη να κατευθύνει ο ίδιος την επίδοσή του στη γραφή και στην ανάγνωση. Αυτή ακριβώς η προσέγγιση και η στάση απέναντι στη γνώση αποτελεί το ζητούμενο και της μαθηματικής εκπαίδευσης σήμερα.

Πώς γίνεται σήμερα κατανοητό το φαινόμενο της μάθησης στα μαθηματικά;

Οι κυριότερες θεωρίες μάθησης μπορούν, γενικά, να διακριθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες, με βάση τον τρόπο θεώρησης του φαινομένου της μάθησης. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις θεωρίες οι οποίες αντιλαμβάνονται τη μάθηση ως διαδικασία «απόκτησης» και η δεύτερη αυτές που την προσεγγίζουν ως διαδικασία «συμμετοχής» (Sfard, 1998). Πιο συγκεκριμένα, οι θεωρίες μάθησης που ανήκουν στην πρώτη ομάδα εστιάζονται στην οικοδόμηση γνωστικών δομών από το άτομο (βλ., π.χ., Lerman, 2000), ενώ οι θεωρίες της δεύτερης κατηγορίας δίνουν έμφαση στο κοινωνικοπολιτισμικό περιβάλλον στο οποίο συμμετέχει το άτομο κατά τη διαδικασία μάθησης (βλ., π.χ., Lave & Wenger, 1991).

Στην προσέγγιση της μάθησης ως απόκτησης γνώσεων, το κοινωνικό περιβάλλον γίνεται αντιληπτό ως το πλαί-

σιο εντός του οποίου τα άτομα κατασκευάζουν τη γνώση. Ειδικότερα, δίνεται προτεραιότητα στο άτομο, ενώ το κοινωνικό περιβάλλον δρα ως «δοχείο» για τη διαδικασία μάθησης, επηρεάζοντας το σχήμα της, χωρίς όμως να συνιστά συστατικό της. Αντίθετα, στην οπτική της μάθησης ως «συμμετοχής», η διαδικασία μάθησης θεωρείται αναπόσπαστο κομμάτι των κοινωνικών πρακτικών. Το άτομο γίνεται αντιληπτό ως κοινωνικά συγκροτούμενη οντότητα, η τάξη συνιστά «κοινότητα πρακτικής» (Wenger, 1998) και η μάθηση σε αυτήν νοείται ως διαδικασία επίτευξης πλήρους συμμετοχής σε μια κοινωνικοπολιτισμική πρακτική.

Στο τέλος της προηγούμενης δεκαετίας διαφάνηκε μια προσπάθεια απομάκρυνσης από τη θεώρηση της μάθησης ως διαδικασίας απόκτησης γνώσης και υιοθέτησης της συμμετοχικής προσέγγισης. Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια παρατηρείται σύγκλιση των απόψεων των επιστημόνων προς την κατεύθυνση της αποδοχής των δύο θεωρήσεων ως συμπληρωματικών και όχι ως εναλλακτικών, με βασικό επιχείρημα ότι καθεμιά από αυτές είναι απαραίτητη, καθώς προσφέρει τη δυνατότητα κατανόησης και ερμηνείας διαφορετικών όψεων των διαδικασιών μάθησης και διδασκαλίας. Είναι, όμως, αυτονόητο ότι η έμφαση που προσδίδει ο εκπαιδευτικός στη μια ή στην

άλλη θεώρηση συμβάλλει καθοριστικά στη διαμόρφωση των πρακτικών τις οποίες υιοθετεί κατά την άσκηση του εκπαιδευτικού έργου.

Μια από τις συνέπειες της θεώρησης της μάθησης ως «απόκτησης» γνώσης αφορά στον τρόπο με τον οποίο διαχωρίζει το μαθητή από το αντικείμενο μάθησης. Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι μια τέτοια οπτική συνδέεται με λογικές «αγοράς». Η μαθηματική γνώση συγκροτείται από γεγονότα, έννοιες και διαδικασίες («αγαθά») τα οποία, με κάποιον τρόπο, θα πρέπει να «μεταβιβαστούν» στους μαθητές («καταναλωτές»). Ο εκπαιδευτικός («ιδιοκτήτης»), ο οποίος έχει πρόσβαση στα «αγαθά», μπορεί, μεταφορικά, να τα «παραδώσει» στους μαθητές. Μια επιπλέον συνέπεια αυτής της προσέγγισης σχετίζεται με τη διάκριση των αρμοδιοτήτων στην τάξη: οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν και οι μαθητές μαθαίνουν. Αν οι τελευταίοι αποτυγχάνουν, αυτό αποδίδεται είτε στον εκπαιδευτικό, ο οποίος απέτυχε να «παραδώσει τα αγαθά», είτε στο μαθητή, ο οποίος δεν κατάφερε να τα αποκτήσει και να τα διατηρήσει.

Σε αντίθεση με την παραπάνω θεώρηση, η μάθηση ως αποτέλεσμα της συμμετοχής του ατόμου σε συγκεκριμένες καταστάσεις επικεντρώνεται στην κοινωνική φύση

της διαδικασίας κατανόησης του αντικειμένου της μάθησης. Η γνώση γίνεται αντιληπτή ως προϊόν κοινωνικής συμφωνίας και συμμετοχής σε κοινωνικές πρακτικές και όχι ως κάτι το οποίο υφίσταται, ανεξάρτητα από αυτόν που μαθαίνει, σε αναμονή να μεταβιβαστεί. Για να γίνει αυτό κατανοητό, ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το ερώτημα: «Ποιο κλάσμα αναπαριστά το παρακάτω διάγραμμα;».



Οι περισσότεροι άνθρωποι θα απαντούσαν $2/5$. Ωστόσο, αν αναγνωστεί με διαφορετικούς τρόπους, μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπαριστά το κλάσμα $3/5$ (τα μη σκιασμένα μέρη) ή το $1\frac{1}{2}$ (εκλαμβάνοντας το σκιασμένο μέρος ως μονάδα) ή ακόμη και το $12/3$ (εκλαμβάνοντας το μη σκιασμένο μέρος ως μονάδα). Δεν υπάρχει κάποιο εγγενές χαρακτηριστικό του διαγράμματος που να επιβάλλει το $2/5$ ως τη σωστή απάντηση. Δραστηριότητες όπως η παραπάνω απλώς προσφέρουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο τα άτομα-μαθητές μαθαίνουν ότι ο «αποδεκτός» (κοινωνικά συμφωνημένος) τρόπος ερμηνείας του διαγράμματος είναι $2/5$. Διαβάζουν, λοιπόν, το διάγραμμα ως $2/5$ γιατί αυτός είναι ο τρόπος ανάγνωσής του από τους εκπαιδευτικούς, τα βιβλία, τους συμμαθη-

τές κτλ. Ο μαθητευόμενος γίνεται, επομένως, μέρος μιας «κοινότητας πρακτικής» η οποία διαβάζει κλάσματα με αυτό τον τρόπο.

Η αντίληψη της τάξης ως «κοινότητας πρακτικής» εμπειριέχει την προσέγγιση της μάθησης ως συμμετοχής και καθιστά δυσδιάκριτα τα όρια μεταξύ διδασκαλίας και μάθησης, σε αντίθεση με την προσέγγιση της μάθησης ως απόκτησης γνώσεων, όπου υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ αυτών των δύο διαδικασιών. Σε μια κοινότητα πρακτικής, ο εκπαιδευτικός θεωρείται επίσης μαθητευόμενος και οι ευνοούμενες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών οδηγούν στο να νοούνται και αυτοί ταυτόχρονα ως δάσκαλοι ο ένας του άλλου. Επιπλέον, η ευθύνη της επιτυχίας ή της αποτυχίας της μάθησης είναι συλλογική, κοινή και για τους δύο εταίρους της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Είναι φανερό ότι η μαθήτρια η οποία απαντά με τον τρόπο που περιγράφεται στην πρώτη σκηνή επικαλείται την κοινότητα πρακτικής της «παραγγελίας έτοιμης τροφής». Ωστόσο, αυτό δεν της εξασφαλίζει μια μαθηματικά σωστή απάντηση, καθώς στην κοινότητα πρακτικής της τάξης των μαθηματικών οι πίτσες δεν παραγγέλλονται για να φαγωθούν, αλλά για να γίνουν κλάσματα. Η σύγχυση της συγκεκριμένης μαθήτριας δεν προσφέρει κάποια πληροφορία για τις

μαθηματικές της γνώσεις, αποκαλύπτει όμως τη σημασία της διάκρισης των κοινοτήτων πρακτικής στην προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης.

Είναι πλέον γενικά αποδεκτό ότι η μάθηση δεν αποτελεί απλώς μια ατομική διαδικασία ενεργού κατασκευής νοήματος, καθώς το κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον, οι ανθρώπινες πρακτικές και οι υλικές κατασκευές συμβάλλουν στη διαμόρφωση του τρόπου με τον οποίο το άτομο προσεγγίζει τη γνώση (μαθαίνει). Η αποδοχή αυτής της αντίληψης έχει σοβαρές συνέπειες τόσο σε επίπεδο οργάνωσης όσο και σε επίπεδο πράξης της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η υιοθέτησή της, για παράδειγμα, στη συγκρότηση ενός Προγράμματος Σπουδών θα σήμαινε μεγαλύτερη έμφαση στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και ικανοτήτων από τους μαθητές σχετικών με τη διατύπωση επιχειρημάτων, υποθέσεων και συμπερασμάτων, καθώς και με την επικοινωνία στο πλαίσιο εργασίας σε μικρές ομάδες. Η αξιοποίηση της παραπάνω αντίληψης στην εργασία στην τάξη θα οδηγούσε στο να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στο χαρακτήρα και στο περιεχόμενο των προτεινόμενων κοινωνικοπολιτισμικών δραστηριοτήτων, στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών αλλά και των μαθητών μεταξύ τους, στους όρους συμμετοχής κάθε μαθητή αλλά και του ίδιου του εκπαιδευτι-

κού στα δρώμενα της τάξης, καθώς και στις μεταβολές αυτών των όρων.

Ποιοι μαθητές και γιατί αποτυγχάνουν στα μαθηματικά;

Οι τεχνολογικές εξελίξεις της εποχής μας ανέδειξαν περισσότερο από ό,τι συνέβη σε κάθε άλλη χρονική περίοδο τη σημασία των μαθηματικών και, κατά συνέπεια, τη σημασία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Είναι πλέον φανερό ότι η επαγγελματική και η ευρύτερα κοινωνική επιτυχία του πολίτη του μέλλοντος θα εξαρτάται σε αρκετά μεγάλο βαθμό από την ικανότητά του να κατανοεί τη μαθηματική σκέψη και να χειρίζεται τη μαθηματική γνώση.

Όπως επισημάνθηκε και νωρίτερα, παρά την εντυπωσιακή ερευνητική δραστηριοποίηση στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης και τις αναρίθμητες προσπάθειες βελτίωσής της σε παγκόσμιο επίπεδο, στις έρευνες που αφορούν στη μαθηματική σχολική επίδοση καταγράφεται επανειλημμένα ένας ανησυχητικά μεγάλος αριθμός μαθητών που συνεχίζει να αποτυγχάνει στα μαθηματικά.

Με δεδομένη την επικράτηση της προσέγγισης της μάθησης ως διαδικασίας απόκτησης γνώσης (βλ. προηγούμενη ενότητα), η ερμηνεία αυτής της εντυπωσιακής και ταυτόχρονα ανησυχητικής αποτυχίας αναζητήθηκε, κυρίως, είτε στην περιορισμένη «χωρητικότητα» του νου ορισμένων μαθητών, η οποία δεν επιτρέπει την κατάκτηση ολόκληρης της απαιτούμενης γνώσης, είτε στην αποτυχία των μεθόδων διδασκαλίας και άρα του εκπαιδευτικού να «γεμίσουν» το νου κάποιων μαθητών με τα κατάλληλα «αγαθά». Ωστόσο, σε μια θεώρηση της μάθησης ως συμμετοχής σε διάφορες καταστάσεις, αυτή η αποτυχία επιδέχεται διαφορετική ερμηνεία. Συγκεκριμένα, αντί να θεωρηθεί αποτέλεσμα του μικρού δυναμικού μάθησης που διαθέτουν οι μαθητές που αποτυγχάνουν, γίνεται κατανοητή ως προϊόν των λιγότερων και μικρότερης εμβέλειας ευκαιριών που είχαν να συμμετάσχουν σε κατάλληλες δραστηριότητες.

Ανάμεσα στους μαθητές που αποτυγχάνουν στα μαθηματικά, αυτοί οι οποίοι προέρχονται από κοινωνικά και πολιτισμικά μειονοτικές ομάδες κατέχουν πρωτεύουσα θέση. Χαρακτηριστικά, η Zaslavsky (1991) αναφέρει ότι «στα χαμηλότερα επίπεδα επίδοσης στα διάφορα τεστ βρίσκονται... τα θύματα της διάκρισης με βάση το γένος και την κοινωνική τάξη... Οι μαθητές αυτοί ζουν σε πε-

ριοχές με χαμηλό επίπεδο δημόσιων υπηρεσιών, σε απομονωμένες κοινότητες, όπου τα σχολεία στερούνται επαρκών πόρων και οι δάσκαλοι είναι πεπεισμένοι ότι οι μαθητές είναι σε θέση να μάθουν μόνο απομνημονεύοντας». Η ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας οδηγεί στον εντοπισμό ενός αριθμού παραμέτρων οι οποίες συμβάλλουν σε αυτή την αποτυχία. Ανάμεσά τους η θεωρηση των μαθηματικών ως ενός, πολιτισμικά και κοινωνικά ουδέτερου, πεδίου γνώσης κατέχει εξέχουσα θέση.

Για πολλά χρόνια τα μαθηματικά θεωρούνταν παγκόσμια, αντικειμενικά και ανεξάρτητα από τις κοινωνικές, ιστορικές και πολιτισμικές συνθήκες μέσα στις οποίες αναπτύχθηκαν και ασκήθηκαν. Η φορμαλιστική και απρόσωπη παρουσίαση των σχολικών μαθηματικών ενίσχυσε αυτή την άποψη. Επιπλέον, τα σχολικά μαθηματικά ούτε κεφαλαιοποίησαν —στην πραγματικότητα αγνόησαν— την ποικιλία των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών ούτε άντλησαν από την κοινωνική και πολιτισμική πραγματικότητα στην οποία ανήκουν οι μαθητές και διαμέσου της οποίας μαθαίνουν. Πρόσφατες έρευνες αποκαλύπτουν ότι ένα μεγάλο μέρος της μαθηματικής γνώσης διαμορφώνεται έξω από το σχολείο, στο άμεσο περιβάλλον του μαθητή (π.χ. Jones, 1996). Αυτή η καθημερινή μαθηματική γνώση εμφανίζεται με διαφο-

ρετικές φόρμες από πολιτισμό σε πολιτισμό, ακόμη και μέσα στον ίδιο πολιτισμό (ανάλογα με το σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται). Η αδυναμία του εκπαιδευτικού συστήματος να αναγνωρίσει τις αποκλίνουσες από τα τυπικά σχολικά μαθηματικά μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών και να οικοδομήσει πάνω σε αυτές στερεί τη διδακτική διαδικασία από ένα ποικίλο, βιωματικό και, κατά συνέπεια, πολύτιμο εκπαιδευτικό υλικό. Ταυτόχρονα καταδικάζει σε αποτυχία τους μαθητές που αδυνατούν να αναπτύξουν τους κατάλληλους δεσμούς και τους απαραίτητους μετασχηματισμούς οι οποίοι θα τους επιτρέψουν να αποκτήσουν πρόσβαση, αλλά και έλεγχο, στα σχολικά μαθηματικά.

Η εκπαίδευση των μειονοτήτων απασχολεί εδώ και πολλά χρόνια την εκπαιδευτική κοινότητα. Ωστόσο, οι σχετικές προσπάθειες μέχρι σήμερα επικεντρώθηκαν, στη συντριπτική τους πλειοψηφία, στη διδασκαλία και στη μάθηση της γλώσσας. Αντικείμενα όπως τα μαθηματικά θεωρήθηκαν λίγο ως πολύ ανεξάρτητα από κοινωνικές και πολιτισμικές αξίες και δε συμπεριλήφθηκαν σε αυτή την ατζέντα δράσης. Οι τελευταίες όμως εξελίξεις στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι οποίες αναγνωρίζουν την επίδραση των κοινωνικοπολιτισμικών εμπειριών των μαθητών στη διαμόρφωση του μαθηματι-

κού νοήματος, υπογραμμίζουν ότι η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών αποτελούν μια ιδιαίτερη κοινωνική και πολιτισμική διαδικασία. Αυτή η οπτική επιβάλλει ένα νέο τρόπο αντιμετώπισης της μαθηματικής εκπαίδευσης ο οποίος αξιοποιεί, μέσα και έξω από το σχολείο, τις μαθηματικές πρακτικές στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές στην καθημερινή ζωή. Μια τέτοια θεώρηση εξυπηρετεί τις ανάγκες και απαιτήσεις τόσο των παιδιών των μειονοτικών ομάδων όσο και αυτών της κυρίαρχης ομάδας σε μια κοινωνία. Η επιτυχία της, όμως, εξαρτάται από τη συνειδητοποίηση από τον εκπαιδευτικό της αναγκαιότητας αλλαγής των πρακτικών του στην τάξη και της υιοθέτησης νέων, συμβατών με την παραπάνω θεώρηση. Βασικός προσανατολισμός αυτών των πρακτικών είναι η αντιμετώπιση των μαθητών ως μιας ομάδας ατόμων που ξεκινούν από διαφορετικές αφετηρίες και μπορούν να τα καταφέρουν, προσφέροντας σημαντικές, αν και συχνά αποκλίνουσες, εμπειρίες στη διαδικασία μάθησης. Η αξιοποίηση των διαφορετικών τους εμπειριών σε ένα πλαίσιο συλλογικής εργασίας μπορεί να αυξήσει την πρόσβαση μεγαλύτερου αριθμού μαθητών στη μαθηματική γνώση.

Ποιες είναι οι ιδιαιτερότητες της μάθησης
και της διδασκαλίας των μαθηματικών
σε μια πολυπολιτισμική τάξη;

Η μάθηση και η διδασκαλία στην τάξη των μαθηματικών αποτελούν διαδικασίες ιδιαίτερης πολυπλοκότητας. Ωστόσο, ταυτόχρονα συνιστούν, για τον εκπαιδευτικό και τον ερευνητή, μοναδικά και εξαιρετικού πλούτου πεδία δράσης για τη σε βάθος κατανόηση των τρόπων με τους οποίους το σχολείο, σε δυναμική αλληλεπίδραση με το ευρύτερο κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον, αναπαράγει τις κοινωνικές δομές, «κατασκευάζοντας» διαδρομές επιτυχίας και αποτυχίας και κατευθύνοντας, άμεσα ή έμμεσα, προς αυτές μαθητές με συγκεκριμένη προέλευση. Αυτή η κατανόηση είναι καθοριστική, καθώς αποτελεί την προϋπόθεση για το σχεδιασμό και την υλοποίηση παρεμβάσεων στην εκπαίδευση γενικότερα και στη μαθηματική εκπαίδευση ειδικότερα οι οποίες θα εξασφαλίζουν, στο μέτρο του εφικτού, ίσες ευκαιρίες εκ-

παίδευσης και, κατά συνέπεια, ίσες ευκαιρίες επαγγελματικής και ευρύτερης κοινωνικής επιτυχίας για όλους τους μαθητές.

Ειδικότερα, σε μια τάξη με μαθητές που έχουν διαφορετικές κοινωνικές ή/και πολιτισμικές, γλωσσικές και άλλες ταυτότητες —κυρίαρχη πλέον εκπαιδευτική πραγματικότητα όλων των σύγχρονων κοινωνιών— η πολυπλοκότητα και η ποικιλία των προκλήσεων που προσφέρουν η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών είναι ακόμη πιο έντονες αλλά ταυτόχρονα και πιο ορατές. Η μάθηση για τους περισσότερους μαθητές αυτών των τάξεων αποτελεί μια συνεχή και συχνά άνιση, στην κυριολεξία, πάλη επιβίωσης, καθώς, προτού ακόμη επικεντρωθούν οι μαθητές στη μαθηματική γνώση, θα πρέπει να διαχειριστούν με επιτυχία τις ποικίλες συγκρούσεις κοινωνικού, πολιτισμικού, γλωσσικού ή άλλου χαρακτήρα που αναπόφευκτα αντιμετωπίζουν. Το πρόβλημα γίνεται ακόμη εντονότερο όταν η μαθηματική γνώση προσφέρεται μέσα από ένα πλαίσιο λόγου το οποίο διαφέρει σημαντικά από αυτό του άμεσου περιβάλλοντός τους, όπως συνήθως συμβαίνει. Από την άλλη, η διδασκαλία σε αυτές τις τάξεις δεν μπορεί παρά να διακρίνεται από συνεχή διδακτικά διλήμματα σχετικά με το αν και πότε θα πρέπει να αξιοποιείται η μητρική γλώσσα των μαθη-

τών στην τάξη, πότε και πώς θα πρέπει να διαμεσολαβεί ο εκπαιδευτικός για να διευκολύνει τη μάθηση, πώς μπορεί να εξασφαλιστεί η σαφήνεια στην παρουσίαση της μαθηματικής γνώσης και η πρόσβαση σε αυτήν από όλους τους μαθητές κτλ.

Είναι προφανές ότι στις δίγλωσσες και πολύγλωσσες τάξεις, ανεξάρτητα από το αντικείμενο μάθησης και διδασκαλίας, το θέμα της γλώσσας και ευρύτερα της επικοινωνίας βρίσκονται στον πυρήνα του προβληματισμού και της σχετικής έρευνας. Σε ό,τι αφορά στα μαθηματικά, η σχέση μεταξύ γλώσσας και μαθηματικών σε δίγλωσσες τάξεις αποτέλεσε αντικείμενο συστηματικής έρευνας μόλις τα τελευταία 20 περίπου χρόνια. Μέχρι και τη δεκαετία του 1980, οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης εστίαζαν το ενδιαφέρον τους κυρίως στους γνωστικούς παράγοντες οι οποίοι επιδρούν στην κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές. Τα πορίσματα της σχετικής έρευνας δήλωναν ότι:

- η διγλωσσία δεν παρεμποδίζει τη μάθηση των μαθηματικών από δίγλωσσους μαθητές,
- υπάρχει μια στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ της γλωσσικής ανάπτυξης και της επίδοσης στα μαθηματικά.

Ωστόσο, όπως είναι σήμερα πλέον αποδεκτό, η σχολική επίδοση και, κατά συνέπεια, η επίδοση στα μαθηματικά καθορίζονται από ένα πολύπλοκο σχήμα παραγόντων που αλληλεπιδρούν. Είναι, επομένως, φανερό ότι οι επιδόσεις των διγλωσσων μαθητών στο συγκεκριμένο μάθημα δεν μπορούν να μελετηθούν αποκλειστικά σε σχέση με το επίπεδο της επάρκειάς τους σε μια γλώσσα. Αντίθετα, πρέπει να μελετηθούν σε συνάρτηση και με τις πρακτικές που υιοθετούνται στην τάξη, οι οποίες διαμορφώνονται από τα γενικότερα κοινωνικά, πολιτισμικά και πολιτικά δεδομένα της κοινωνίας μέσα στην οποία λειτουργεί το σχολείο. Έτσι, από τις αρχές του 1990 η σχετική έρευνα επικεντρώθηκε στις πρακτικές διδασκαλίας στην τάξη των μαθηματικών και στον τρόπο με τον οποίο η γλώσσα ή οι γλώσσες των μαθητών αλληλεπιδρούν με τη γλώσσα μάθησης και διδασκαλίας του μαθήματος και με το αντικείμενο μάθησης. Δηλαδή έστρεψε την προσοχή της από το μαθητή στο λόγο ο οποίος αναπτύσσεται μέσα στην τάξη, απενοχοποίησε το διγλωσσο μαθητή για τη χαμηλή του επίδοση στα μαθηματικά και άρχισε να αναζητά τα αίτια της στο ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον της μάθησης. Με άλλα λόγια, απομακρύνθηκε από μια σχετικά περιορισμένη οπτική της μάθησης ως μιας γνωστικής λειτουργίας του ατόμου και προσανατολίστηκε στην κατανόησή της ως συγκρο-

τούμενης μέσα από κοινωνικές πρακτικές και, ιδιαίτερα, πρακτικές λόγου. Η επικοινωνία στην τάξη και οι επικοινωνιακές ικανότητες του μαθητή δε θεωρούνται πλέον δεδομένες.

Οι σχετικές έρευνες προς αυτή την κατεύθυνση έδειξαν ότι (Adler, 2001):

- Η μετάβαση από τη μητρική γλώσσα στη γλώσσα διδασκαλίας του μαθήματος και, αντιστρόφως, από τους μαθητές και τον εκπαιδευτικό, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, εμπλουτίζει και ενδυναμώνει την ποιότητα της αλληλεπίδρασης στην τάξη, σε ό,τι αφορά στο μαθηματικό νόημα. Έτσι, για παράδειγμα, σε τάξεις όπου συμβαίνει αυτό ο λόγος που κυριαρχεί επικεντρώνεται στις μαθηματικές έννοιες, ενώ σε τάξεις όπου αυτό δε συμβαίνει ο λόγος (discourse) εστιάζεται σε υπολογιστικές διαδικασίες-βήματα.
- Το γλωσσικό περιβάλλον που φαίνεται να προσφέρει καλύτερες δυνατότητες στους δίγλωσσους μαθητές για επιτυχία στα μαθηματικά είναι αυτό στο οποίο ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει την αξιοποίηση της μητρικής γλώσσας των μαθητών και ταυτόχρονα εξασφαλίζει την πρόσβαση τόσο στη γλώσσα διδασκαλίας του μαθήματος

(π.χ. ελληνικά) όσο και στη γλώσσα και ευρύτερα στο λόγο (discourse) των μαθηματικών.

Σε σχέση με το τελευταίο, όπως κάθε αντικείμενο, έτσι και τα μαθηματικά έχουν τη δική τους «γλώσσα», το δικό τους τρόπο έκφρασης (π.χ. λεξιλόγιο που περιλαμβάνει πολλούς τεχνικούς όρους, απουσία ή συχνή χρήση κάποιων στοιχείων της φυσικής γλώσσας, όπως οι προσωπικές αντωνυμίες και η προστακτική έγκλιση αντιστοίχως, κτλ.). Αυτός ο λόγος, ιδιαίτερα σημαντικός για την κατασκευή του μαθηματικού νοήματος, δεν αναπτύσσεται αυθόρμητα και αβίαστα από τους μαθητές. Μαθαίνεται σε ένα πλαίσιο συμμετοχής σε μια κοινότητα όπου οι έμπειροι και ειδικοί (οι εκπαιδευτικοί ή ακόμη και οι μαθητές με υψηλές μαθηματικές επιδόσεις) μεταφράζουν, μοντελοποιούν, επαναδιατυπώνουν, ενθαρρύνουν και προκαλούν τη συμβολή των μαθητευόμενων στη σχολική πρακτική των μαθηματικών. Σε μια τέτοια αντίληψη, η μετάβαση από τη μια γλώσσα στην άλλη (ή, καλύτερα, από τον ένα λόγο στον άλλο) αναδεικνύεται σε κυρίαρχο πόλο μάθησης και διδασκαλίας και ο εκπαιδευτικός σε οδηγό λόγου στην τάξη των μαθηματικών.

Τα πιο πάνω φανερώνουν ότι σε ένα πολυγλωσσικό σχολικό περιβάλλον μια παρέμβαση η οποία στοχεύει

στη διαμόρφωση συνθηκών μάθησης και διδασκαλίας στα μαθηματικά που να εξασφαλίζουν ίσες ευκαιρίες σε όλους τους μαθητές θα πρέπει να επιχειρήσει, με συστηματικό τρόπο, να ενεργοποιήσει και τις τρεις παραπάνω διαστάσεις του περιβάλλοντος λόγου της τάξης των μαθηματικών σε καθημερινή βάση: λειτουργική αξιοποίηση της γλώσσας του μαθητή και εξασφάλιση της πρόσβασης του μαθητή στη γλώσσα της διδασκαλίας αλλά και των μαθηματικών.

Η μάθηση των μαθηματικών, όπως προκύπτει από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, δε νοείται πλέον ως μια προσωπική δραστηριότητα κατά την οποία το άτομο ασκείται στην εφαρμογή τυπικών κανόνων και διαδικασιών, αλλά ως μια συλλογική δραστηριότητα σκέψης και συλλογισμού. Με δεδομένο ότι είναι αδύνατο να γνωρίζουμε τι συμβαίνει στο νου κάθε μαθητή, ο μόνος τρόπος για να αυξήσουμε τις πιθανότητες επιτυχίας ενός μαθήματος είναι να μεγιστοποιήσουμε τις ευκαιρίες ανάπτυξης της νόησης του μαθητή στην τάξη, διαμορφώνοντας τις κατάλληλες συνθήκες για αλληλεπίδραση και επικοινωνία. Οι συνθήκες αυτές πρέπει να επικεντρώνονται στα μαθηματικά νοήματα στα οποία στοχεύουμε, με την ουσιαστική συμμετοχή όσο το δυνατόν περισσότερων μαθητών. Για να επιτευχθεί αυτό, όπως καθιστά σαφές η σχε-

τική βιβλιογραφία, θα πρέπει να διασφαλιστούν στο πλαίσιο της παρέμβασης δύο βασικές παράμετροι: κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό και επαρκής επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, τόσο εκτός όσο και εντός του σχολείου.

Βιβλιογραφία

- Adler J., *Teaching mathematics in multilingual classrooms*, Kluwer, Dordrecht, 2001
- Chi M., Glaser R. & Farr M., *The nature of expertise*, Erlbaum, Hillsdale, New Jersey, 1988
- Harvey R., "I can keep going up if I want to – one way of looking at learning mathematics", στο R. Harvey, D. Kerslake, H. Shuard & M. Torbe (eds), *Mathematics, Language, Teaching and Learning*, No 6, Ward Lock, London, 1983
- Jones L., "Somali children learning mathematics in Britain: a conflict of cultures", στο L. Puig & A. Gutierrez (eds), *Proceedings of the 20th Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Spain, τ. 3, 1996, σ. 153-160
- Lave J. & Wenger E., *Situated learning – Legitimate peripheral participation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988
- Lerman S., "The social turn in mathematics education research", στο J. Boaler (ed.), *Multiple perspectives on mathematics education and learning*, Ablex Publications, London, 2000
- Nunes T., «Μπορούμε να κάνουμε ένα παιδί "ενάριθμο";», *Γέφυρες*, 1, 2001, σ. 54-61

- Piaget J., *The principles of genetic epistemology*, Routledge and Kegan Paul, London, 1972
- Sfard A., "On two metaphors for learning and dangers of choosing just one", *Educational Researcher*, 27(2), 1998, σ. 4-13
- Strickland D.S. & Morrow L.M., "Developing skills: an emergent literacy perspective", *The Reading Teacher*, October 1989, σ. 82-83
- Wenger E., *Communities of practice: learning, meaning and identity*, Cambridge University Press, New York, 2001
- Zaslavsky C., "World cultures in the mathematics class", *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 1991, σ. 11-17

Πρόσθετη ελληνόγλωσση βιβλιογραφία για την προσέγγιση του θέματος

- Kazuko Kamii C., *Τα παιδιά ξαναεφευρίσκουν την αριθμητική*, μτφρ. Γ. Ζακοπούλου, Πατάκης, Αθήνα, 1995
- Margolinas C., *Η σημασία του σωστού και του λάθους στην τάξη των μαθηματικών*, μτφρ. Ε. Τζιμπλάκη, Σαββάλας, Αθήνα, 2003
- Τουμάσης Μπ., *Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών*, Gutenberg, Αθήνα, 1994
- Hughes M., *Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών*, επιμ. Σ. Βοσνιάδου, Gutenberg, Αθήνα, 1996

Επιμέλεια κειμένου: Μαρία Ζωγραφάκη
Τυπογραφική επιμέλεια: Παναγιώτα Διδάχου
Σελιδοποίηση: Ειρήνη Μίχα
Εξώφυλλο: Δάφνη Κονταργύρη, Ειρήνη Μίχα

Φωτογράφιση-μοντάζ, εκτύπωση
και βιβλιοδεσία: Δ. Ε. Ταμπακόπουλος