



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

DEMOCRITUS
UNIVERSITY
OF THRACE

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ



ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Θεωρία και Εφαρμογές για Μηχανικούς

Εξάμηνο: **9^ο**

Κωδικός: **ΠΜΣ ΥΜκΠ 5**

Μάθημα: **Επιλογής ΠΜΣ**

Διάλεξη **Δ.2. Αριθμητική Ανάλυση (επανάληψη βασικών εννοιών)**

Διδάσκων υπεύθυνος μαθήματος:

Χρήστος Β. Μακρής

Επίκουρος Καθηγητής (επί θητεία)

ΔΠΘ

Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ

Ειδίκευση: Υδραυλική & Περιβαλλοντική Τεχνική

ΜΔΕ Τεχνολογία Υδατικών Πόρων ΕΜΠ

Ειδίκευση: Διαχείριση Παράκτιας Ζώνης

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ

Ειδίκευση: Υπολογιστική Ρευστοδυναμική - Κυματομηχανική

Online - Εξ αποστάσεως Παραδόσεις - Πολ. Μηχ. ΔΠΘ - Ξάνθη, 11-18 Νοεμβρίου 2024

Δ.2. Διάρθρωση Παρουσίασης (α)

1. Ανακεφαλαίωση/υπενθύμιση βασικών εννοιών Υδραυλικής και Μηχανικής Ρευστών

- Συνάρτηση ροής
- Γραμμή ροής
- Εξίσωση Bernoulli
- Κυκλοφορία-στροβιλότητα
- Συνάρτηση δυναμικού
- Διαστατική ανάλυση
- Αδιάστατοι Αριθμοί

Reynolds Re , Froude Fr , Peclet Pe , Mach Ma , Prandtl Pr , Iribarren Ir , Keulegan–Carpenter KC ,
Rayleigh Ra , Richardson Ri , Strouhal St , Taylor Ta , Ursell Ur , Archimedes Ar , ...

2. Εισαγωγή στη Ρευστοδυναμική

- Εξισώσεις ροής
 - ✓ Διατήρηση της μάζας
 - ✓ Διατήρηση της ορμής
 - ✓ Διατήρηση της ενέργειας

Δ.2. Διάρθρωση Παρουσίασης (β)

3. Εισαγωγή στα υπολογιστική υδραυλική και ρευστομηχανική

- Γενικά θέματα μαθηματικής προσομοίωσης
- Υπολογιστικά πλέγματα
- Ανάπτυξη αριθμητικού αλγόριθμου
- Βασικές θεωρήσεις και απαιτούμενα βήματα

4. Εισαγωγή στα Υπολογιστικά/Αριθμητικά Μοντέλα Προσομοίωσης

- Πλαίσιο αριθμητικής μοντελοποίησης
- Καλά δομημένα μαθηματικά μοντέλα και αριθμητικές προσεγγίσεις
- Διακριτοποίηση και αριθμητική επίλυση μαθηματικών/αριθμητικών μοντέλων
- Αξιοπιστία μοντέλων προσομοίωσης

5. Εισαγωγή στην ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικών μοντέλων

- Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
- Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων
- Μέθοδος πεπερασμένων όγκων
- Αρχικές και οριακές συνθήκες ροής

Δ.2. Διάρθρωση Παρουσίασης (Υ)

6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

- Αριθμητική προσέγγιση και παρεμβολή
- Αριθμητική ολοκλήρωση
- Επίλυση συστημάτων εξισώσεων
- Σειρές Fourier
- Πεπερασμένες διαφορές
- Αριθμητική λύση αλγεβρικών συστημάτων

7. Επίλογος

- Ύλη για επανάληψη

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Γραμμή ροής

Λόγω της πολυπλοκότητας των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των ρευστών, είναι θεμιτό να γίνουν παραδοχές για τη φύση της ροής, οι οποίες θα διευκολύνουν την επίλυση των προβλημάτων. Μερικά είδη ιδανικών ροών είναι δυνατό να περιγραφούν με τη θεωρία της ροϊκής συνάρτησης καθώς και με τη θεωρία της συνάρτησης δυναμικού (Σούλης, 1986).

Παραδοχές που χρησιμοποιούνται είναι:

Ιδανικό ή Ιδεατό ρευστό

Ασυμπίεστη ή συμπιεστή αλλά μη συνεκτική ροή. Στη θεώρηση μη συνεκτικής ροής οι διατμητικές τάσεις αγνοούνται πλήρως. Στην προκείμενη περίπτωση, ο συντελεστής του μοριακού ιξώδους μ θεωρείται ότι είναι μηδέν.

Ομοιογενές και ισότροπο ρευστό

Οι φυσικές ιδιότητες του ρευστού παραμένουν σταθερές στον χώρο και τον χρόνο.

Με περαιτέρω απλοποίηση των υπολογισμών είναι δυνατό να θεωρηθεί σταθερή και δισδιάστατη ροή. Σημερινές τεχνολογικές δυνατότητες \rightarrow ασταθείς, συνεκτικές 3D ροές

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

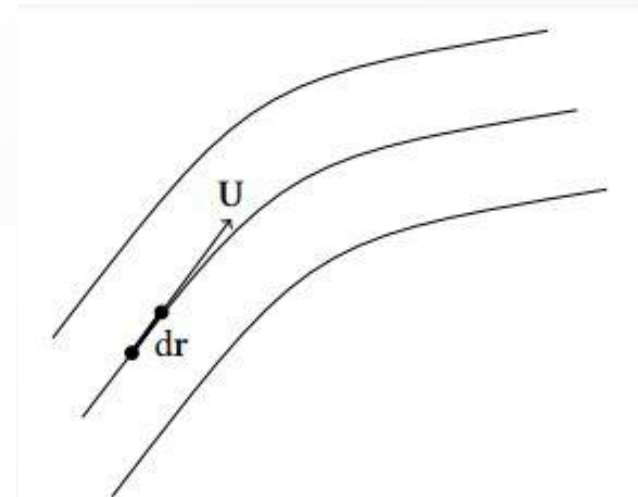
Γραμμή ροής (streamline)

Ως γραμμή ροής ορίζεται εκείνη η καμπύλη σε κάθε σημείο της οποίας η τοπική ταχύτητα είναι εφαπτόμενη σε αυτή. Δύο άμεσες συνέπειες του ορισμού αυτού είναι ότι η συνιστώσα της ταχύτητας στην κάθετη ως προς τη ροϊκή γραμμή διεύθυνση θα μηδενίζεται πάντα και ότι δύο ροϊκές γραμμές δεν είναι δυνατό να τέμνονται για μη μηδενικές ταχύτητες καθώς αυτό θα σήμαινε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας θα ήταν εφαπτόμενο σε δύο διαφορετικές καμπύλες συγχρόνως. Η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει τις γραμμές ροής μπορεί να προκύψει παρατηρώντας ότι το διάνυσμα της τοπικής ταχύτητας ενός ροϊκού στοιχείου, $U(u,v,w)$, θα πρέπει να είναι παράλληλο με το διαφορικό διάνυσμα μετατόπισης του στοιχείου αυτού πάνω στη γραμμή ροής, $dr(dx,dy,dz)$, όπως φαίνεται το Σχήμα δίνοντας $\mathbf{U} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$

ή ισοδύναμα

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} v & w \\ dy & dz \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} u & w \\ dx & dz \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} u & v \\ dx & dy \end{vmatrix} \hat{k} = 0 \Rightarrow$$

$$(vdz - wdy) \hat{i} - (udz - wdx) \hat{j} + (udy - vdx) \hat{k} = 0.$$



Σχήμα 3.1: Γραμμές ροής σε μόνιμο πεδίο.

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Γραμμή ροής

Διαφορές: γραμμή ροής (streamline), ινώδης φλέβα (streakline) και τροχιά (pathline)

https://www.youtube.com/watch?v=8MUPQbazkLQ&ab_channel=CPPMechEngTutorials

Ο καθορισμός των τιμών αυτής στο υπολογιστικό πεδίο μπορεί να οδηγήσει αμέσως στον υπολογισμό των ταχυτήτων σε κάθε κόμβο. Εφόσον είναι γνωστές οι ταχύτητες, τότε από την εξίσωση του Bernoulli προσδιορίζεται η κατανομή των πιέσεων στο χώρο, διότι το ολικό φορτίο διατηρείται σταθερό στο πεδίο ροής.

Από τις κατανομές πιέσεων μεγάλου ενδιαφέροντος είναι εκείνες που υπολογίζονται στα όρια μιας κατασκευής. Η γνώση των πιέσεων στα όρια οδηγεί στον υπολογισμό των ασκούμενων δυνάμεων στην κατασκευή.

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \text{σταθερό} = H$$

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Εξίσωση Bernoulli

Bernoulli's Equation

The diagram illustrates Bernoulli's Equation as the sum of three energy components:

- Static Pressure (P):** Labeled as "Pressure Energy" and "Fluid Pressure".
- Dynamic Pressure ($\frac{\rho}{2} V^2$):** Labeled as "Kinetic Energy". It is associated with "Density" (ρ) and "Velocity" (V).
- Hydrostatic Pressure ($\rho g h$):** Labeled as "Potential Energy". It is associated with "Density" (ρ), "Elevation" (h), and "Gravitational Acceleration" (g).

The equation is shown as: $P + \frac{\rho}{2} V^2 + \rho g h = \text{constant}$

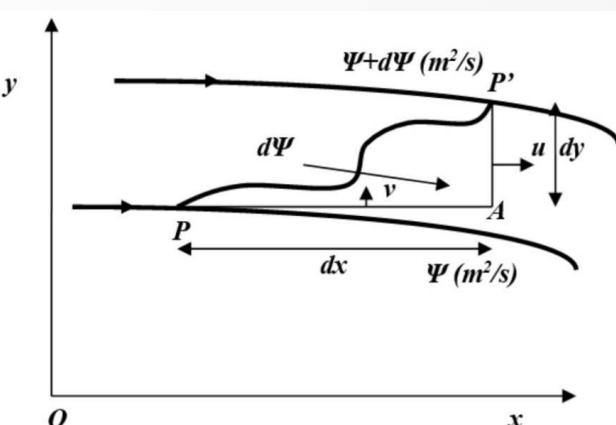
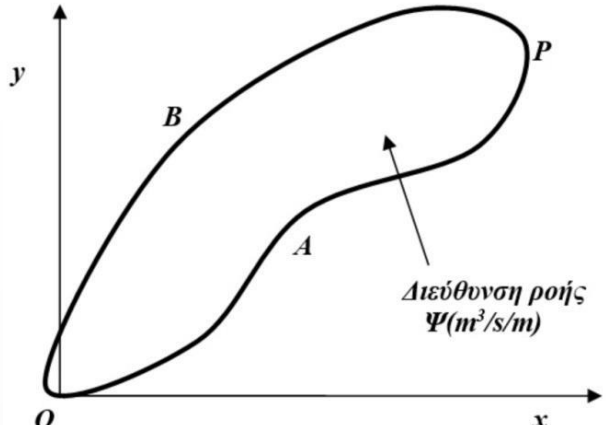
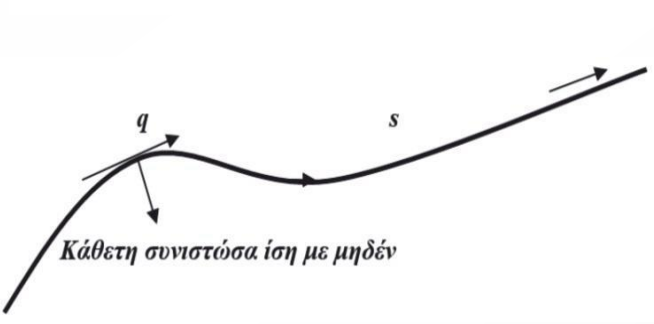
$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \text{σταθερό} = H$$

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Συνάρτηση ροής

Μια ροϊκή γραμμή έχει την εξής ιδιότητα: τη στιγμή της θεώρησης, το ρευστό να κινείται παντού κατά μήκος της γραμμής, δηλαδή το διάνυσμα της ταχύτητας να είναι εφαπτομενικό της καμπύλης γραμμής σε κάθε σημείο αυτής (Σούλης, 1986). Η συνισταμένη q , η οποία είναι η ολική ταχύτητα της ροής (Σχήμα 1.6), είναι εφαπτομενική της καμπύλης s . Η συνιστώσα της ταχύτητας, η κάθετη προς την καμπύλη s , σε κάθε σημείο αυτής είναι ίση προς μηδέν. Ας θεωρηθεί το Σχήμα 1.7. Η παροχή ανά μονάδα μήκους, η διερχόμενη από την OAP, η οποία δεν είναι ροϊκή γραμμή, έστω ότι είναι Ψ . Από τη διατήρηση της συνέχειας της μάζας, ο όγκος ρευστού, ο εισερχόμενος στον χώρο OAPBO, είναι ίσος με τον εξερχόμενο από τον όγκο του ρευστού. Δηλαδή, η Ψ εγκάρσια προς την OAP είναι ίση προς την Ψ εγκάρσια προς την OBP και προς κάθε άλλη καμπύλη, η οποία αρχίζει από το O και καταλήγει προς το P. Το σημείο P λέγεται ότι έχει Ψ μονάδες ροής μεταξύ των O και P και εγκάρσια προς οποιαδήποτε γραμμή που συνδέει το O με το P. Η παροχή μεταξύ του O και ενός σημείου P εξαρτάται από το σημείο του χώρου στο οποίο ευρίσκεται το P. Είναι δηλαδή $\Psi=f(x,y)$. Το ότι η Ψ είναι σταθερή κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής ορίζει και την ονομασία της, η οποία δίνεται ως ροϊκή συνάρτηση Ψ .

$$d\Psi + v dx = u dy$$



Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Συνάρτηση ροής

και επειδή $\Psi=f(x,y)$:

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy \qquad u = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x} = 0$$

(1.50)

Δηλαδή, η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας της μάζας.

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Κυκλοφορία-στροβιλότητα

Ας θεωρηθεί η κυκλοφορία δk (m^2/s), δηλαδή το γινόμενο της ταχύτητας επί την διανυθείσα απόσταση, γύρω από ένα στοιχειώδες ορθογώνιο διαστάσεων $\delta x \delta y$ (Σχήμα, Brebbia & Ferrante, 1983). Έστω ότι η κυκλοφορία είναι θετική κατά διεύθυνση αντίθετη προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Η στοιχειώδης κυκλοφορία δk είναι:

$$\delta k = u \delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x \right) \delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y \right) \delta x - v \delta y$$

$$\delta k = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x \delta y - \frac{\partial u}{\partial y} \delta x \delta y$$

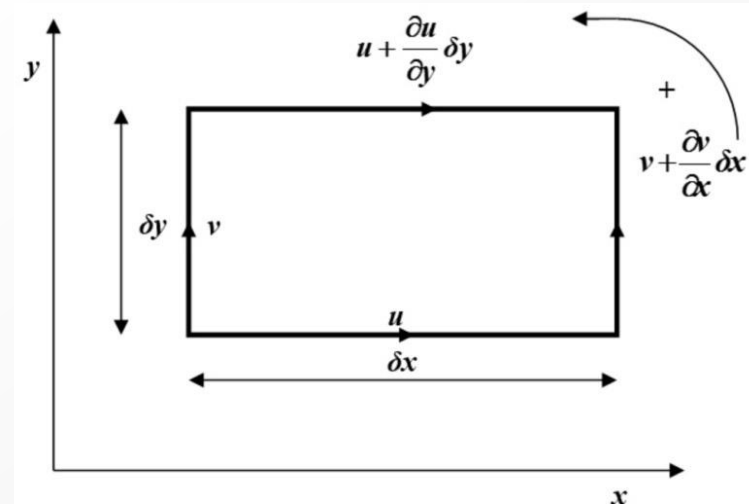
Η στροβιλότητα ζ (s^{-1}) ορίζεται ως ο λόγος της κυκλοφορίας δk γύρω από στοιχειώδες εμβαδό $\delta x \delta y$ ως προς το εμβαδό αυτό. Είναι:

$$\zeta = \frac{\delta k}{\delta x \delta y} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

Η ανωτέρω είναι η εξίσωση του *Laplace*. Στη γενική περίπτωση είναι:

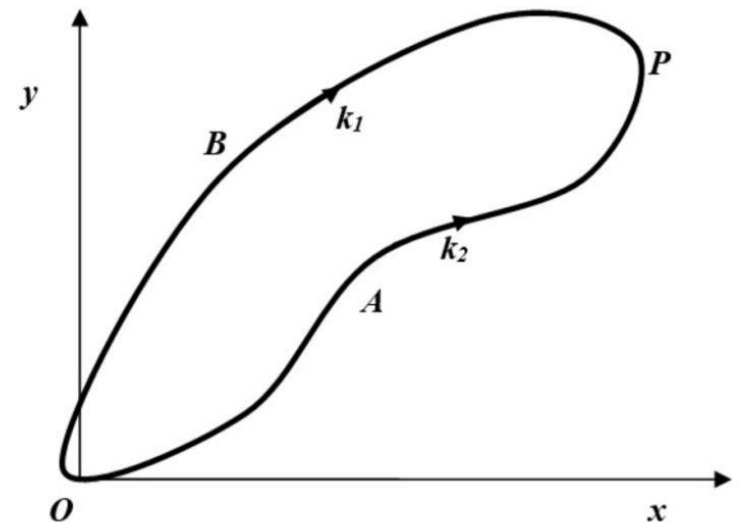
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\zeta$$



Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Συνάρτηση δυναμικού

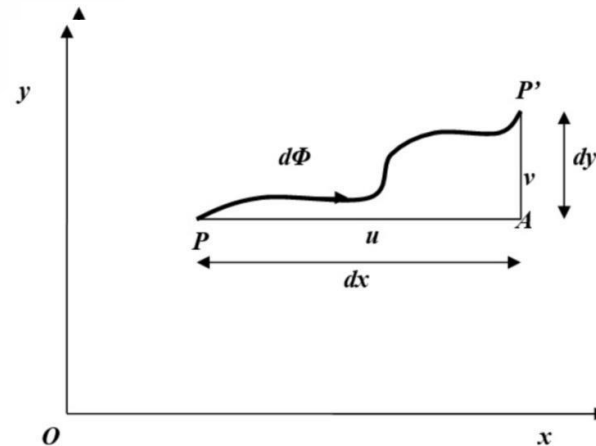
Η συνάρτηση δυναμικού εφαρμόζεται, όταν η ροή είναι αστρόβιλη, όπου δηλαδή είναι $\zeta=0$. Η διάκριση μεταξύ αστρόβιλης- στροβιλώδους ροής είναι δυνατό να γίνει εύκολα κατανοητή με τη θεώρηση της κίνηση των καθισμάτων του μεγάλου τροχού του λούνα παρκ τα οποία υποτίθεται ότι παριστούν ρευστά σωματίδια. Η κυκλοφορία κατά μήκος της OAP είναι k_1 ενώ κατά μήκος της OBP είναι k_2 (Σχήμα 1.12). Η συνολική κυκλοφορία κατά μήκος της κλειστής καμπύλης $OAPBA$ είναι $k=k_1+(-k_2)=\oint\zeta\delta x\delta y=0$ για αστρόβιλη ροή ($\zeta=0$). Η κυκλοφορία, λοιπόν, μέσω οποιασδήποτε διαδρομής είναι μοναδική για την αστρόβιλη ροή. Το σημείο P λέγεται ότι έχει ένα δυναμικό κυκλοφορίας μεγαλύτερο της τιμής την οποία είχε στο σημείο O κατ' αυτή τη μοναδική τιμή.



Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Συνάρτηση δυναμικού

Η αστρόβιλη ροή ονομάζεται και δυναμική ροή. Η Φ είναι συνάρτηση της απόστασης κατά μήκος ροϊκής γραμμής και αυξάνει στη διεύθυνση ροής. Οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων, τα οποία έχουν σταθερή τιμή Φ , είναι γραμμές κάθετες στη ροϊκή γραμμή και ονομάζονται «ισοδυναμικές γραμμές». Οι ροϊκές και οι ισοδυναμικές γραμμές είναι κάθετες μεταξύ τους. Για να υπολογιστεί η σχέση του δυναμικού της ταχύτητας Φ με τις συνιστώσες u, v της ταχύτητας, ας θεωρηθεί το πεδίο ροής του Σχήματος 1.14. Έστω ότι η κυκλοφορία και, κατά συνέπεια η στροβιλότητα, στον χώρο PAP' είναι ίση με μηδέν. Είναι:



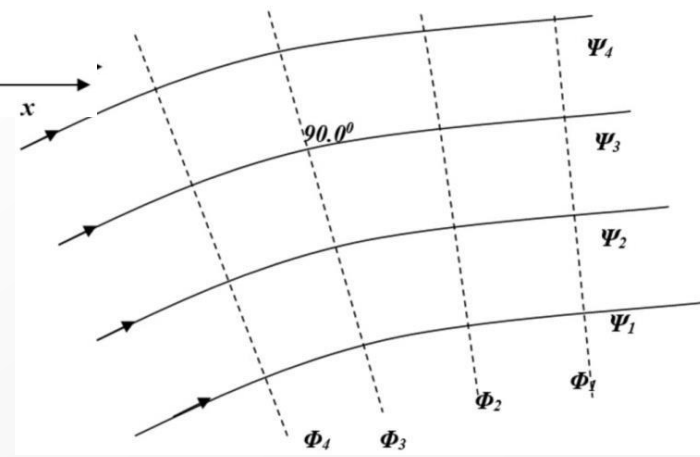
$$d\Phi = u dx + v dy$$

και επειδή $\Phi = f(x, y)$, ισχύει:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

Από τις ανωτέρω δύο εξισώσεις προκύπτει:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$



Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Συνάρτηση δυναμικού

Η ύπαρξη συνάρτησης δυναμικού Φ αυτόματα ικανοποιεί την εξίσωση στροβιλότητας:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

επειδή:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = 0$$

Η εξίσωση της συνέχειας της μάζας γράφεται:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

και με αντικατάσταση των τιμών από την Εξ. 1.52:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

η οποία είναι η εξίσωση του *Laplace*.

https://www.youtube.com/watch?v=x8_pfo1-Mml&ab_channel=TheCompleteGuidetoEverything

https://www.youtube.com/watch?v=zN0zDrQimXU&ab_channel=SteveBrunton

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Διαστατική ανάλυση

Με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης συσχετίζονται μεταξύ τους διαφορετικές φυσικές ποσότητες, ταυτοποιώντας τα θεμελιώδη μεγέθη τους (όπως η μάζα, ο χρόνος, το μήκος κ.τ.λ.) και τις μονάδες μέτρησης (όπως τα μέτρα, τα χιλιόγραμμα ή τις λίβρες κ.τ.λ.), και παρακολουθώντας αυτές τις διαστάσεις στους υπολογισμούς ή τις συγκρίσεις, που εκτελούνται. Η διαστατική ανάλυση εφαρμόζεται ευρέως στις φυσικές επιστήμες και τη μηχανική ως τεχνική μετατροπής μονάδων μέτρησης με κανόνες της άλγεβρας.

Η ιδέα των φυσικών διαστάσεων εισήχθη το 1822 από τον Fourier. Ομοειδείς φυσικές ποσότητες έχουν τις ίδιες διαστάσεις και μπορούν να συγκριθούν άμεσα μεταξύ τους, σε ίδιες μονάδες, ακόμη και αν αρχικά εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης (π.χ. μέτρα ή πόδια). Αντίθετα, φυσικές ποσότητες διαφορετικών διαστάσεων δε μπορούν να εκφραστούν με ίδιες μονάδες και επομένως να συγκριθούν. Λόγου χάρη, το να συγκριθεί ένα χιλιόγραμμο με ένα λεπτό της ώρας δεν έχει απολύτως κανένα φυσικό νόημα.

Οποιαδήποτε ισότητα (και ανισότητα) με φυσικό νόημα οφείλει να έχει ίδιες διαστάσεις στο δεξί και αριστερό μέλος, μια ιδιότητα γνωστή ως διαστατική ομοιογένεια. Ο έλεγχος της διαστατικής ομοιογένειας είναι μια κοινή εφαρμογή της διαστατικής ανάλυσης, που εξυπηρετεί στον έλεγχο ορθότητας των παραγόμενων υπολογισμών και εξισώσεων. Επίσης, χρησιμεύει ως οδηγός και περιοριστής των παραγόμενων εξισώσεων, που περιγράφουν ένα φυσικό σύστημα, ελλείπει πιο αυστηρής παραγωγής.

https://en.wikibooks.org/wiki/Fluid_Mechanics/Dimensional_Analysis

https://www.me.psu.edu/cimbala/learning/fluid/Dim_anal/dim_anal.htm

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Διαστατική ανάλυση

- **Θεμελιώδεις διαστάσεις** Οι βασικές διαστάσεις που επιλέγουμε. Όλα τα μεγέθη, στην Μηχανική Ρευστών μπορούν να εκφραστούν βάσει των θεμελιωδών διαστάσεων που έχουμε επιλέξει.

Επιλέγουμε τις εξής βασικές διαστάσεις

- -Μήκος [L] (length)
- - Χρόνος [T] (time)
- -Μάζα [M] (mass)
- **Εξαγόμενες διαστάσεις**

Λοιπές διαστάσεις πλην των βασικών

$$\text{Εμβαδόν} = \text{Μήκος} \times \text{Πλάτος} = L^2 \cdot T^0 \cdot M^0$$

$$\text{Ταχύτητα} = \text{Απόσταση} / \text{χρόνος} = L^1 \cdot T^{-1} \cdot M^0$$

$$\text{Επιτάχυνση} = \text{Ταχύτητα} / \text{χρόνος} = L^1 \cdot T^{-2} \cdot M^0$$

$$\text{Πίεση} = \text{Δύναμη} / \text{Εμβαδόν} = \frac{LT^2M}{L^2} = L^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M$$

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Αδιάστατοι Αριθμοί

Reynolds Re

ρ is the density of the fluid (SI units: kg/m³)

u is the flow speed (m/s)

L is a characteristic linear dimension (m) (see the below sections of this article for examples)

μ is the dynamic viscosity of the fluid (Pa·s or N·s/m² or kg/(m·s))

ν is the kinematic viscosity of the fluid (m²/s).

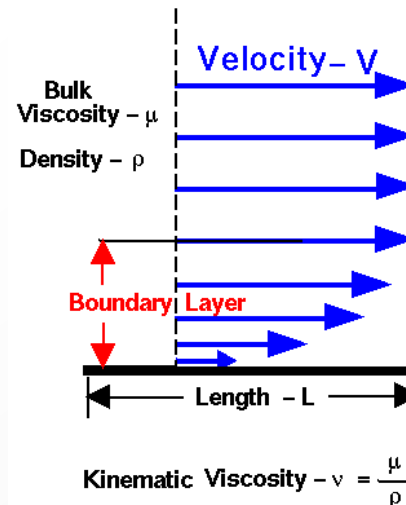
πρότυπα ροής σε διαφορετικές καταστάσεις μετρώντας την αναλογία μεταξύ αδρανειακών δυνάμεων και δυνάμεων συνεκτικότητας

$$Re = \frac{uL}{\nu} = \frac{\rho uL}{\mu}$$



Reynolds Number

Glenn
Research
Center



Reynolds Number = Re

$$Re = \text{ratio} = \frac{\text{Inertia Force}}{\text{Viscous Force}}$$

$$Re = \frac{\rho V \frac{dV}{dx}}{\mu \frac{d^2V}{dx^2}}$$

$$Re = \frac{\rho V V / L}{\mu V / L^2}$$

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

Reynolds Number is dimensionless

$$Re = \frac{V L}{\nu}$$

Re f = Reynolds Number per foot

$$Re f = \frac{V}{\nu}$$

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

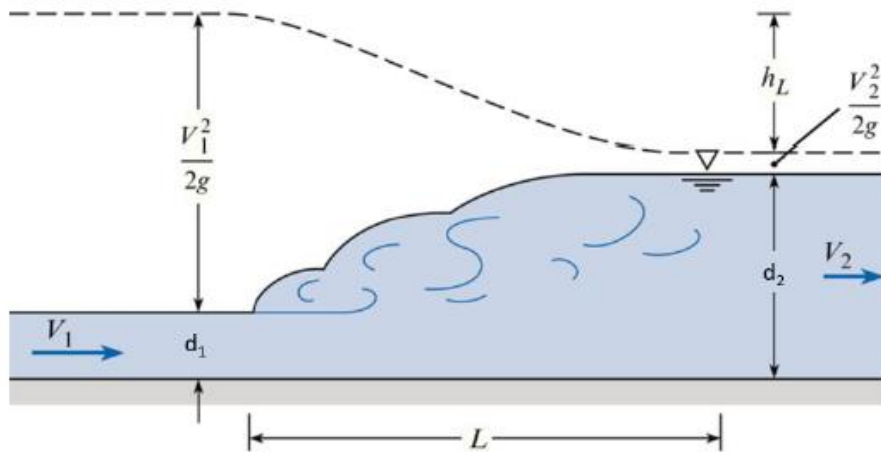
Αδιάστατοι Αριθμοί

Froude Fr

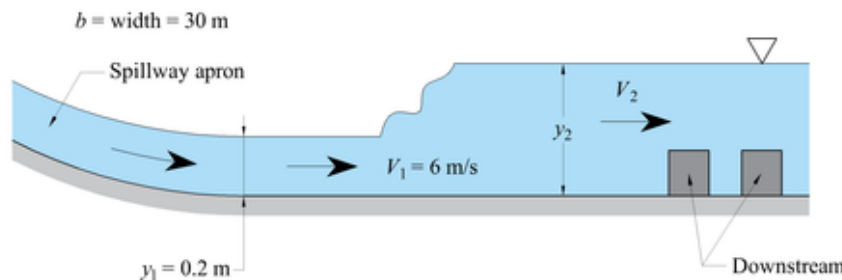
αναλογία της αδράνειας ροής προς το εξωτερικό πεδίο
(το τελευταίο σε πολλές εφαρμογές απλώς λόγω βαρύτητας).

Ο αριθμός Froude βασίζεται στην αναλογία ταχύτητας-μήκους

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gL}}$$



Froude number.	Flow type.
Fr = 1	Flow is critical if is equal to 1.0.
Fr > 1	Greater than 1 means flow is supercritical
Fr < 1	If it less than 1 means subcritical flow will occur.



Example 10.8 Hydraulic Jump

- Water on the horizontal apron of the 30 m -wide spillway shown in Fig. E10.8a has a depth of 0.2 m and a velocity of 6 m/s . Determine the depth, y_2 , after the jump, the Froude numbers before and after the jump, Fr_1 and Fr_2 , and head loss (h_L) due to jump

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right)$$

$$Q_1 = Q_2,$$

$$Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gy_2}}$$

$$h_L = 1 - \frac{y_2}{y_1} + \frac{Fr_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{y_1}{y_2} \right)^2 \right]$$

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Αδιάστατοι Αριθμοί

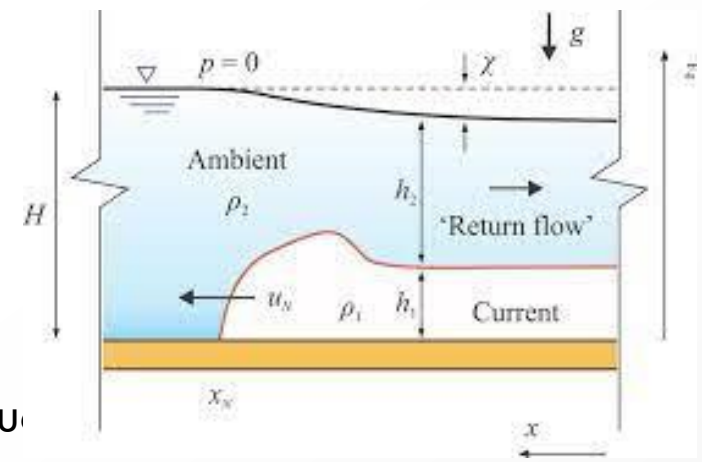
Πυκνομετρικός αριθμός Froude Fr

Όταν χρησιμοποιείται στο πλαίσιο της προσέγγισης Boussinesq, ο πυκνομετρικός αριθμός Froude ορίζεται ως:

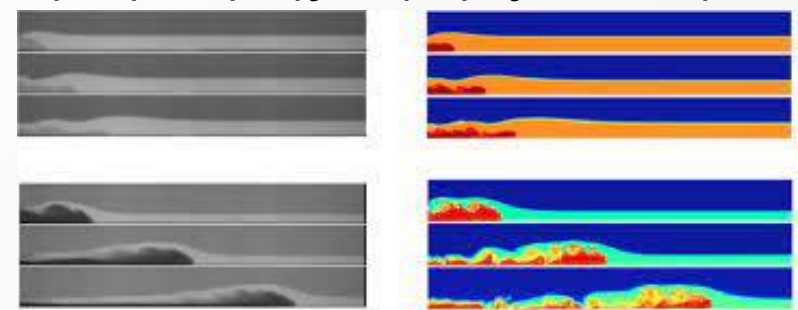
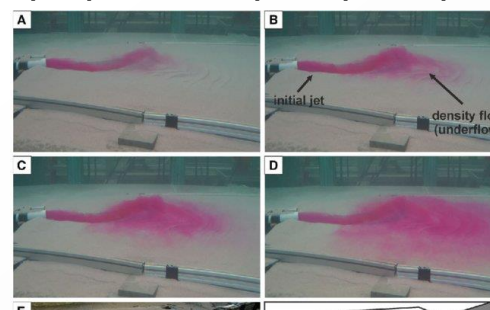
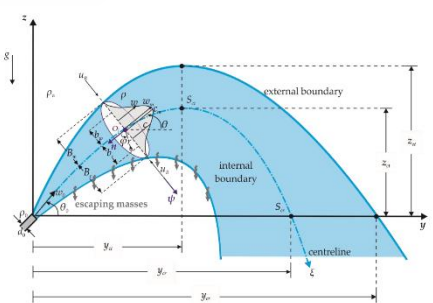
$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g'h}}$$

όπου g' είναι η μειωμένη βαρύτητα:

$$g' = g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}$$



Ο πυκνομετρικός αριθμός Froude προτιμάται συνήθως από του αδιαστασιοποιήσουν την προτεινόμενη «εκδοχή τιμής» της ταχύτητας σε σχέση με τον αριθμό Richardson που συναντάται πιο συχνά όταν εξετάζουμε στρωματωμένα πεδία διάτμησης (με διακριτές στοιβάδες ροής). Για παράδειγμα, το μέτωπο ενός ρεύματος βαρύτητας κινείται με αριθμό Froude μετώπου περίπου ίσο με μονάδα ή σε φαινόμενα συμπάραυσης σε φλέβες και πλούμια.



Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Αδιάστατοι Αριθμοί

Peclet Pe

Ορίζεται ότι είναι η αναλογία του ρυθμού μεταγωγής (advection) μιας φυσικής ποσότητας από τη γενική ροή προς την ταχύτητα διάχυσης της ίδιας ποσότητας που καθοδηγείται από μια κατάλληλη «κλίση» (gradient). Στο πλαίσιο της μεταφοράς ύλης ή μάζας, ο αριθμός Péclet είναι το γινόμενο του αριθμού Reynolds και του αριθμού Schmidt ($Re \times Sc$). Στο πλαίσιο των θερμικών υγρών, ο θερμικός αριθμός Péclet είναι ισοδύναμος με το γινόμενο του αριθμού Reynolds και του αριθμού Prandtl ($Re \times Pr$).

$$Pe = \frac{\text{advective transport rate}}{\text{diffusive transport rate}}$$

$$Pe_L = \frac{u/L}{D/L^2} = \frac{L^2/D}{L/u} = \frac{\text{diffusion time}}{\text{convection time}}$$

$$Pe_L = \frac{Lu}{D} = Re_L Sc$$

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Αδιάστατοι Αριθμοί

Schmidt Sc
$$Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D} = \frac{\text{viscous diffusion rate}}{\text{molecular (mass) diffusion rate}}$$

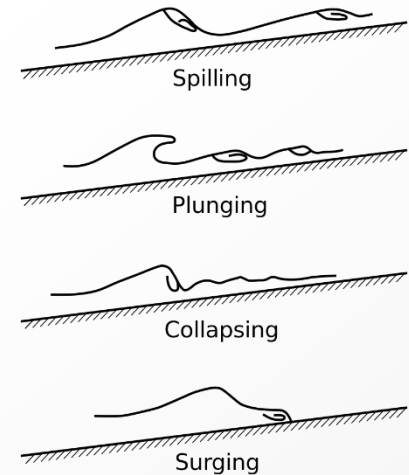
- ν is the kinematic viscosity or (μ/ρ) in units of (m^2/s)
- D is the mass diffusivity (m^2/s) .
- μ is the dynamic viscosity of the fluid $(Pa \cdot s \text{ or } N \cdot s/m^2 \text{ or } kg/m \cdot s)$
- ρ is the density of the fluid (kg/m^3) .

Iribarren Ir

$$\xi = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{H/L_0}},$$

$$L_0 = \frac{g}{2\pi} T^2,$$

breaker type	ξ_0 -range	ξ_b -range
surging or collapsing	$\xi_0 > 3.3$	$\xi_b > 2.0$
plunging	$0.5 < \xi_0 < 3.3$	$0.4 < \xi_b < 2.0$
spilling	$\xi_0 < 0.5$	$\xi_b < 0.4$



Keulegan–Carpenter KC

$$K_C = \frac{VT}{L},$$

- V is the amplitude of the flow velocity oscillation (or the amplitude of the object's velocity, in case of an oscillating object),
- T is the period of the oscillation, and
- L is a characteristic length scale of the object, for instance the diameter for a cylinder under wave loading.



Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Αδιάστατοι Αριθμοί

Mach Ma

$$M = \frac{u}{c},$$

M is the local Mach number,

u is the local flow velocity with respect to the boundaries (either internal, such as an object immersed in the flow, or external, like a channel), and c is the speed of sound in the medium, which in air varies with the square root of the [thermodynamic temperature](#).

Prandtl Pr

Ο αριθμός Prandtl ορίζεται ως ο λόγος της ορμής διάχυσης προς τη θερμική διάχυση

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{momentum diffusivity}}{\text{thermal diffusivity}} = \frac{\mu/\rho}{k/(c_p\rho)} = \frac{c_p\mu}{k}$$

- ν : momentum diffusivity (kinematic viscosity), $\nu = \mu/\rho$, (SI units: m²/s)
- α : thermal diffusivity, $\alpha = k/(\rho c_p)$, (SI units: m²/s)
- μ : dynamic viscosity, (SI units: Pa s = N s/m²)
- k : thermal conductivity, (SI units: W/(m·K))
- c_p : specific heat, (SI units: J/(kg·K))
- ρ : density, (SI units: kg/m³).

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2}$$

Grashof Gr

προσεγγίζει τον λόγο της άνωσης προς τις ιξώδεις δυνάμεις που δρουν σε ένα ρευστό. Εμφανίζεται συχνά στη μελέτη καταστάσεων που περιλαμβάνουν φυσική συναγωγή και είναι ανάλογος με τον αριθμό Re

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Αδιάστατοι Αριθμοί

$$Ri = \frac{\text{buoyancy term}}{\text{flow shear term}} = \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2} \quad Ri = g' \frac{\partial \rho / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2}$$

Richardson Ri

Εάν ο αριθμός Richardson είναι $\ll 1$, η άνωση δεν είναι σημαντική στη ροή. Εάν είναι $\gg 1$ η άνωση είναι κυρίαρχη (με την έννοια ότι δεν υπάρχει επαρκής κινητική ενέργεια για την ομογενοποίηση των ρευστών). Εάν ο αριθμός Richardson είναι 1, τότε η ροή είναι πιθανό να καθοδηγείται από την άνωση: η ενέργεια της ροής προέρχεται από τη δυναμική ενέργεια στο σύστημα αρχικά.

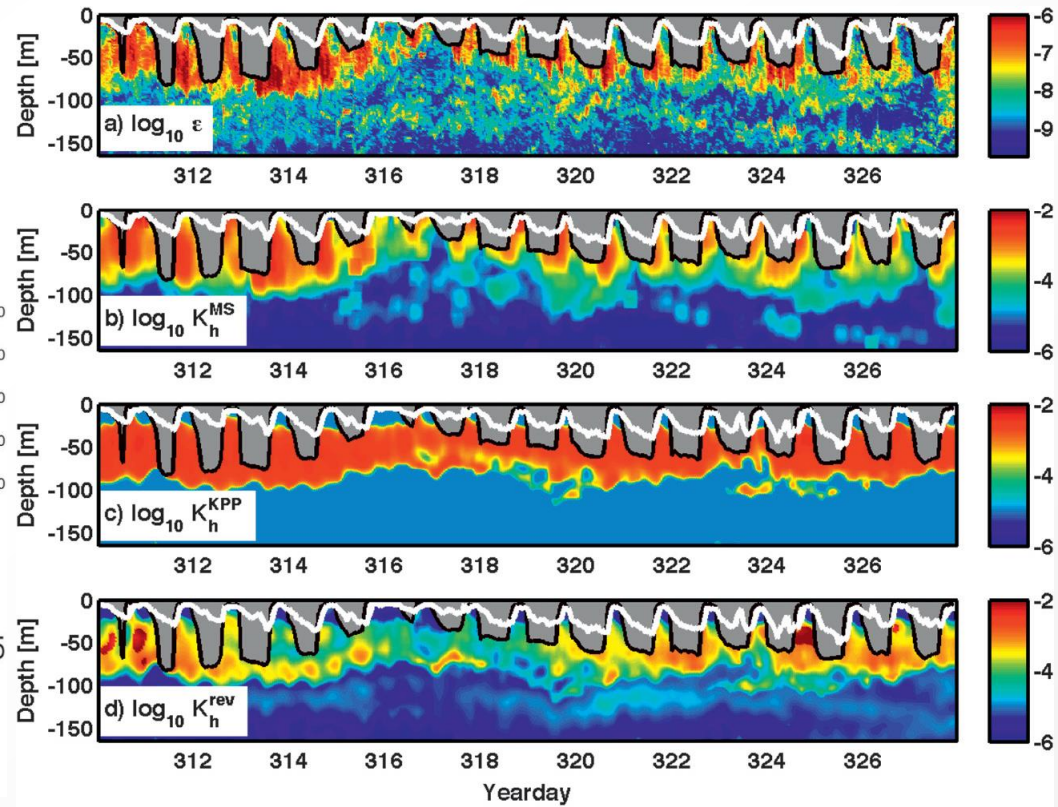
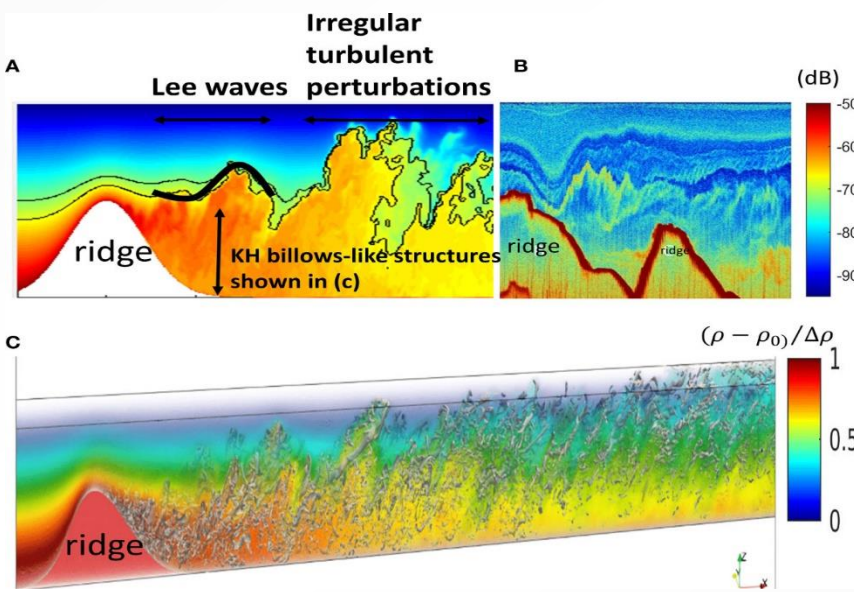


Fig. 2. Measured and modeled turbulence parameters. (a) Turbulence dissipation rate, (b) K_h^{MS} , (c) K_h^{KPP} , (d) K_h^{rev} .

Δ.2.1. Ανακεφαλαίωση βασικών εννοιών

Αδιάστατοι Αριθμοί

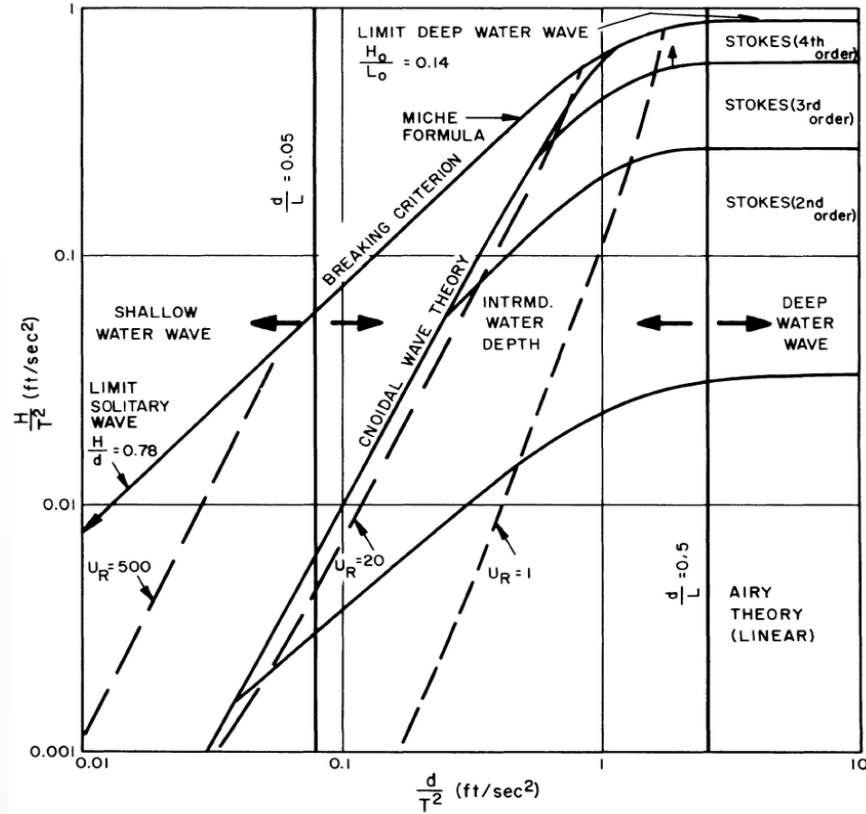
- H : the wave height, i.e. the difference between the elevations of the wave crest and trough,
- h : the mean water depth, and
- λ : the wavelength, which has to be large compared to the depth, $\lambda \gg h$.

Ursell Ur

So the Ursell parameter U is the relative wave height H/h times the relative DEEP wavelength λ/h squared.

Για μακρά κύματα ($\lambda \gg h$) με μικρό αριθμό Ursell, ισχύει $U \ll 32\pi^2/3 \approx 100$, η θεωρία γραμμικών κυματισμών. Διαφορετικά (και πιο συχνά) πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια μη γραμμική θεωρία για αρκετά μακρά κύματα ($\lambda > 7h$) – όπως η εξίσωση Korteweg–de Vries ή οι εξισώσεις Boussinesq

$$U = \frac{H}{h} \left(\frac{\lambda}{h} \right)^2 = \frac{H \lambda^2}{h^3},$$



Δ.2.2. Εισαγωγή στη Ρευστοδυναμική

Εξισώσεις ροής

Πριν γίνει η ανάπτυξη των βασικών εξισώσεων της ροής, ήτοι της διατήρησης της μάζας και της διατήρησης της ενέργειας, είναι χρήσιμο να αναφερθούν, επιγραμματικά, τα βασικότερα από τα είδη ροής, τα οποία δύναται να προκύψουν στη πράξη.

Για να λυθούν τα προβλήματα της Υδραυλικής Μηχανικής, απαιτείται η ταυτόχρονη ικανοποίηση και των τριών νόμων της (Holt, 1977):

- διατήρηση της μάζας (συνέχεια)
- διατήρηση της ενέργειας
- διατήρηση της ορμής

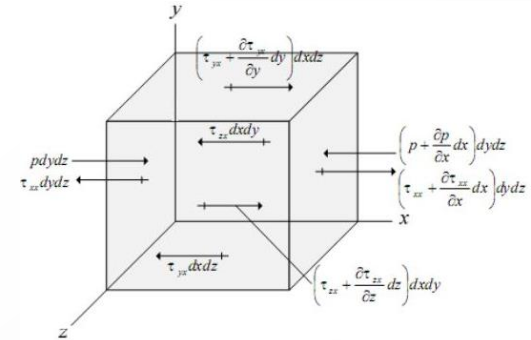


Figure 3: Moving fluid element model for the x component

Μονοδιάστατη ροή. Στοιχειώδης «ροϊκός σωλήνας» είναι εκείνος ο υποθετικός αγωγός ο οποίος σχηματίζεται από ένα σύνολο εσώκλειστων ροϊκών γραμμών. Επειδή εξ ορισμού δεν υπάρχει ροή κάθετη προς τις ροϊκές γραμμές, το ρευστό πρέπει να εισέλθει εντός του «ροϊκού σωλήνα» και να εξέλθει από τα άκρα μέρη του και μόνο. Έστω ότι τα στοιχειώδη εμβαδά των διατομών εισόδου είναι δA_1 και εξόδου δA_2 , ενώ οι αντίστοιχες στοιχειώδεις ταχύτητες είναι u_1 και u_2 . Είναι προφανές ότι η στοιχειώδης παροχή δQ , δηλαδή η παρεχόμενη ποσότητα ρευστού ΔV στη μονάδα χρόνου Δt , δίνεται:

$$\delta Q = u_1 \delta A_1 = u_2 \delta A_2$$

$$Q = UA = \text{σταθερή}$$

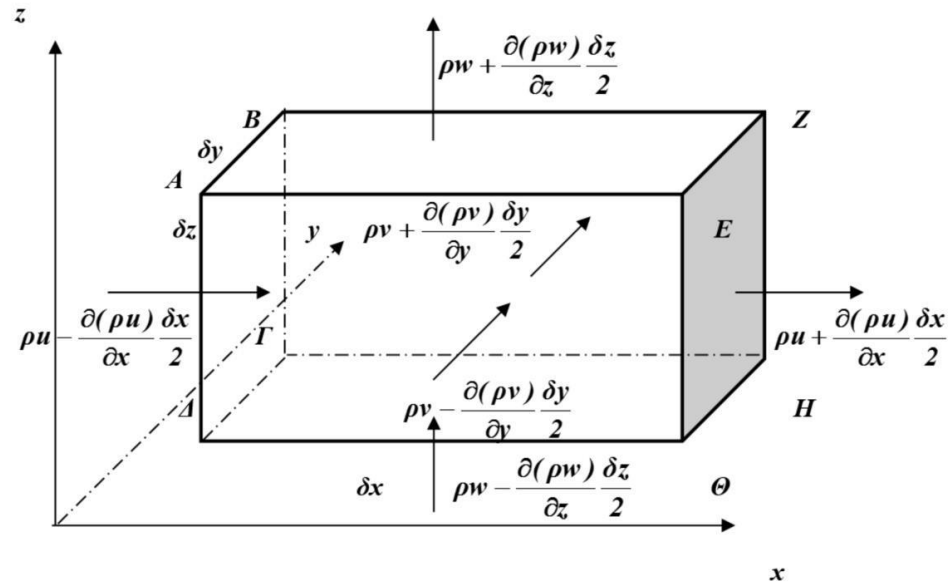
$$Q = \frac{\delta V}{\delta t}$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho_1 U_1 A_1 - \rho_2 U_2 A_2$$

Δ.2.2. Εισαγωγή στη Ρευστοδυναμική

Διατήρηση της μάζας

$$\delta \dot{m}_{AB\Gamma\Delta} = \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z$$



Παρόμοιες εκφράσεις μπορούν να γραφούν με την καθαρή ροή μέσω των υπόλοιπων ζευγών των επιφανειών. Έτσι, η ολική καθαρή εισροή μέσα στον όγκο ελέγχου θα είναι, $\delta \dot{m} = \delta \dot{m}_x + \delta \dot{m}_y + \delta \dot{m}_z$. Από τα πιο πάνω:

$$\delta \dot{m} = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \qquad \delta \dot{m} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \delta x \delta y \delta z)}{\partial t}$$

Για όλα τα ρευστά

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Για ασυμπίεστα ρευστά

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

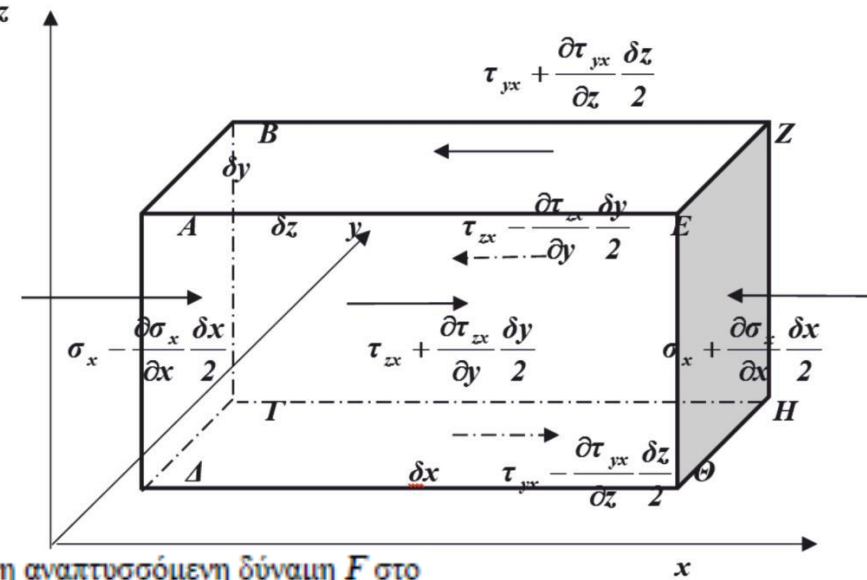
Δ.2.2. Εισαγωγή στη Ρευστοδυναμική

Διατήρηση της ορμής

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$\delta F = \frac{\rho \delta Q \delta t u_2 - \rho \delta Q \delta t u_1}{\delta t} = \rho \delta Q (u_2 - u_1)$$

$$F_x = \left[\rho X + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right] \delta x \delta y \delta z$$



Ορμή στη μονοδιάστατη ροή. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η αναπτυσσόμενη δύναμη F στο σώμα του ρευστού είναι ίση με τη μεταβολή της ορμής ($=mu$) στον χρόνο. Συνεπώς,

$$F = \frac{d(mu)}{dt}$$

Εξισώσεις Navier-Stokes

Εξισώσεις Euler

x-ορμή,

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = \rho X - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = \rho X + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$$

Ανάλογη είναι και η κατάσταση των εξισώσεων με τη y-ορμή και τη z-ορμή. Έτσι,

y-ορμή,

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = \rho Y - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$$

y-ορμή,

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = \rho Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$$

z-ορμή,

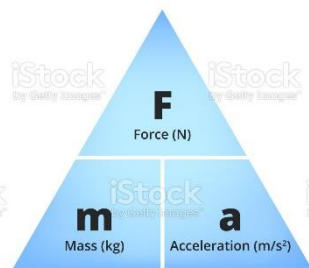
$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = \rho Z - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

z-ορμή,

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = \rho Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

Εξισώσεις Navier-Stokes

NEWTON'S SECOND LAW TRIANGLE



$$F = m \cdot a$$

$$m = F : a$$

$$a = F : m$$

F=ma

N kg m/s²

A large blue equation $F=ma$ with three yellow arrows pointing upwards to the letters 'F', 'm', and 'a'. Below the arrows are the units 'N', 'kg', and 'm/s²' respectively. A green arrow points from the equation towards the Navier-Stokes equations below.

x-ορμή,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

y-ορμή,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

z-ορμή,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Δ.2.2. Εισαγωγή στη Ρευστοδυναμική

Εξισώσεις Navier-Stokes

Newton's second law

$$\Sigma F = ma$$

ΣF : represents the net force acting on an object.

m : represents the mass of an object, which is a numerical measure of its inertia.

a : represents the acceleration of the object.

The Navier-Stokes Equations

$$\underbrace{\rho}_{\text{Density of the Fluid}} \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{Change in Velocity over Time}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}_{\text{Speed and Direction of Fluid}} \right) = \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{External Forces such as Gravity}} - \underbrace{\nabla p}_{\text{Pressure Gradient}} + \underbrace{\mu \cdot \nabla^2 \vec{v}}_{\text{Internal Stress Forces (viscous effects)}}$$

Newton's 2nd Law of Motion



Navier-Stokes Equations 3 - dimensional - unsteady

Glenn
 Research
 Center

Coordinates: (x,y,z) Time: t Pressure: p Heat Flux: q
 Velocity Components: (u,v,w) Density: ρ Stress: τ Reynolds Number: Re
 Total Energy: Et Prandtl Number: Pr

Continuity:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

X - Momentum:
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re_r} \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right]$$

Y - Momentum:
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re_r} \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right]$$

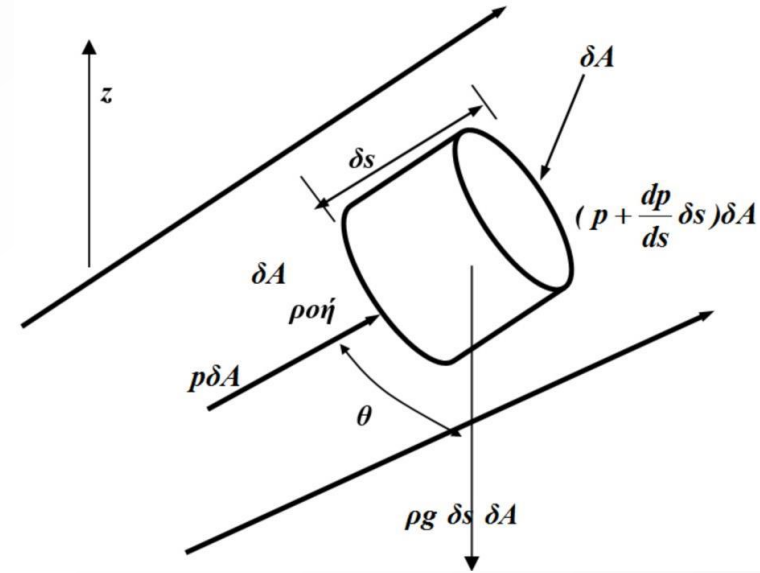
Z - Momentum:
$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re_r} \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right]$$

Energy:
$$\frac{\partial(E_T)}{\partial t} + \frac{\partial(uE_T)}{\partial x} + \frac{\partial(vE_T)}{\partial y} + \frac{\partial(wE_T)}{\partial z} = -\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} - \frac{\partial(wp)}{\partial z} - \frac{1}{Re_r Pr_r} \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] + \frac{1}{Re_r} \left[\frac{\partial}{\partial x}(u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(u \tau_{xz} + v \tau_{yz} + w \tau_{zz}) \right]$$

Δ.2.2. Εισαγωγή στη Ρευστοδυναμική

Διατήρηση της ενέργειας

Ενέργεια στη μονοδιάστατη ροή. Στο Σχήμα απεικονίζεται ένα κυλινδρικό στοιχείο του ροϊκού σωλήνα κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής.



$$-\rho g \delta s \delta A \sin\theta + p \delta A - \left(p + \frac{dp}{ds} \delta s \right) \delta A = \frac{\rho g \delta s \delta A}{g} \frac{dU}{dt}$$

$$-\rho g \sin\theta - \frac{dp}{ds} = \rho \frac{dU}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U dU}{g} \right) = 0$$

$$\sin\theta = \frac{dz}{ds}$$

Με ολοκλήρωση κατά μήκος της ροϊκής γραμμής είναι:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \text{σταθερό} = H$$

Εξίσωση Bernoulli

$$U = \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = U \frac{dU}{ds}$$

Δ.2.2. Εισαγωγή στη Ρευστοδυναμική

Διατήρηση της ενέργειας

Διαφορική μορφή της εξίσωσης της ενέργειας. Με σκεπτικό ανάλογο του τρόπου απόδειξης της διαφορικής εξίσωσης της γραμμικής ορμής, μπορεί να καταστρωθεί η διαφορική μορφή της ενεργειακής εξίσωσης (Hoffmann & Chiang, 1993). Μια από τις μορφές της είναι:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left[\rho \left(e + q^2 / 2 \right) \right]}{\partial t} + \\ & \frac{\partial \left[\rho u \left(e + q^2 / 2 \right) \right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\rho v \left(e + q^2 / 2 \right) \right]}{\partial y} + \frac{\partial \left[\rho w \left(e + q^2 / 2 \right) \right]}{\partial z} = \\ & - \frac{\partial (p u)}{\partial x} - \frac{\partial (p v)}{\partial y} - \frac{\partial (p w)}{\partial z} + \frac{\partial \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right)}{\partial z} + \\ & \frac{\partial \left(\eta \tau_{xx} + \nu \tau_{yy} + \omega \tau_{zz} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\eta \tau_{yx} + \nu \tau_{xy} + \omega \tau_{zy} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\eta \tau_{zx} + \nu \tau_{xz} + \omega \tau_{yz} \right)}{\partial z} \end{aligned}$$

Στην ανωτέρω εξίσωση, $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$, K είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, T η θερμοκρασία, ενώ η εσωτερική ενέργεια δίνεται ως $e = c_v T$, με c_v τον συντελεστή θερμοχωρητικότητας με σταθερό όγκο.

Υπολογιστική υδραυλική και ρευστομηχανική

Γενικά θέματα μαθηματικής προσομοίωσης

Η μαθηματική (υπολογιστική/αριθμητική) προσομοίωση έχει αναδειχτεί, ιδίως κατά τα τελευταία έτη, ως ένα αυτοδύναμο γνωστικό αντικείμενο, γεγονός που αποδεικνύεται από τον εκπληκτικά μεγάλο αριθμό ειδικευμένων επιστημονικών περιοδικών που εκδίδονται κάθε έτος και τον αριθμό των σχετικών επιστημονικών συνεδρίων. Η Υπολογιστική Δυναμική των Ρευστών (Computational Fluid Dynamics, CFD) καλύπτει τόσο ασυμπίεστες ροές όσο και συμπιεστές ροές και έχει φτάσει σε τόσο υψηλό επίπεδο, ώστε να αποτελεί ένα βασικό εργαλείο ανάλυσης και σχεδιασμού σε θέματα:

- Αεροναυτικής
- Μηχανολογίας
- Επιστήμης Χημικού Μηχανικού
- Περιβαλλοντικής Μηχανικής
- Επιστήμης Πολιτικού Μηχανικού (Υδραυλικής)
- Πυρηνικής Μηχανικής
- Αστροφυσικής
- Εμβιομηχανικής
- Μετεωρολογίας, Γεωλογίας, Ωκεανογραφίας

Υπολογιστική υδραυλική και ρευστομηχανική

Γενικά θέματα μαθηματικής προσομοίωσης

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις των προβλημάτων Υδραυλικής Μηχανικής που περιγράφουν ή διέπουν τη ροή είναι μη γραμμικές, τρισδιάστατες, ασταθείς, και τυρβώδεις και απαιτούν διαθεματικές προσεγγίσεις για την επίλυσή τους, κατατάσσονται δε ως ελλειπτικές, παραβολικές και υπερβολικές.

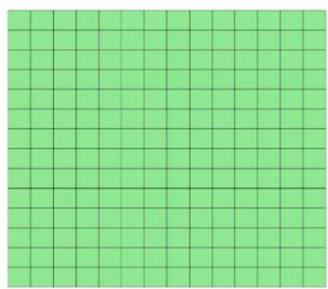
Τα περισσότερα από τα 2D και 3D εφαρμοσμένα προβλήματα της Υδραυλικής Μηχανικής δεν έχουν αναλυτική λύση, γιατί συνήθως αποτελούνται από μη ομαλές γεωμετρικές επιφάνειες, στις οποίες είναι δύσκολο να εφαρμοστούν οι οριακές συνθήκες. Σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί αριθμητική μέθοδος για την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν ή διέπουν τη ροή.

Με την ανάπτυξη του ηλεκτρονικού υπολογιστή οι αριθμητικές λύσεις αναπτύχθηκαν και επεκτάθηκαν έτσι, ώστε να μπορούν να δώσουν λύση σχεδόν σε κάθε παρουσιαζόμενο πρόβλημα, άσχετα με τον βαθμό δυσκολίας του.

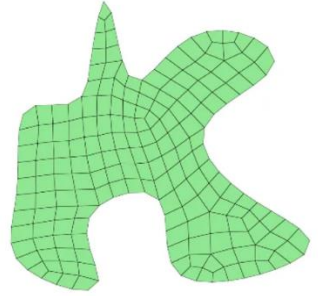
Αν και οι λύσεις με τις αριθμητικές μεθόδους δίνουν απάντηση σε δεδομένο αριθμό διακριτών σημείων και μόνο σε διακριτά χρονικά διαστήματα, προκειμένου για ασταθείς ροές, αυτό καθαυτό το γεγονός δεν αποτελεί σοβαρό μειονέκτημα, διότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν και διάφορες συναρτήσεις παρεμβολής αλλά και μεγάλος αριθμός υπολογιστικών κόμβων, ώστε η επίτευξη της λύσης να είναι ικανοποιητική.

Δ.2.3. Εισαγωγή - Υπολογιστική υδραυλική

Υπολογιστικά πλέγματα και κάνναβι

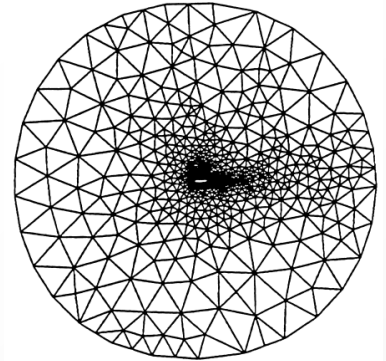
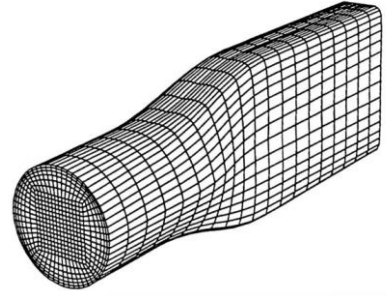


Structured Mesh

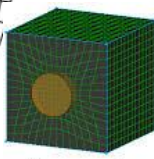
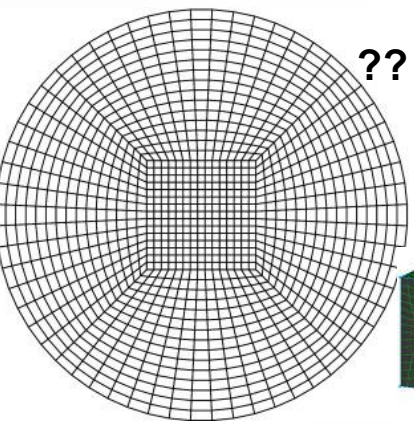
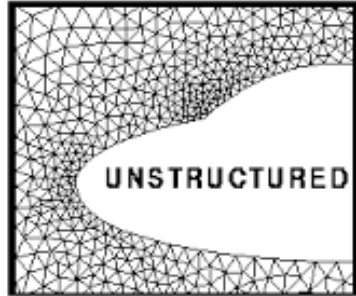
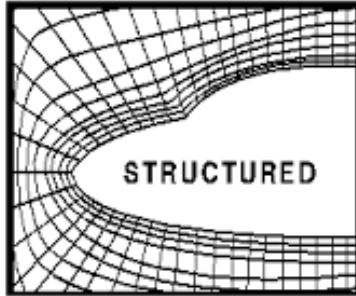


Unstructured Mesh

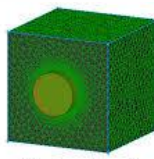
δομημένα (structured) πλέγματα



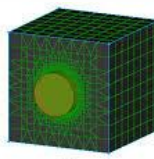
μη δομημένα (unstructured) πλέγματα



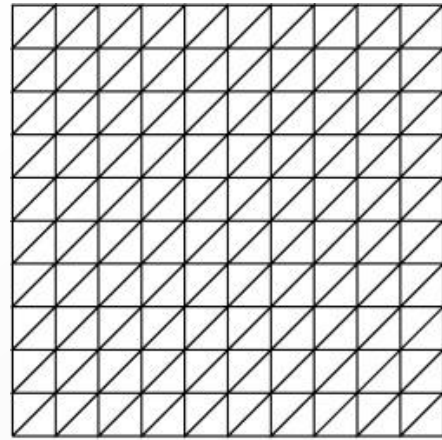
Structured



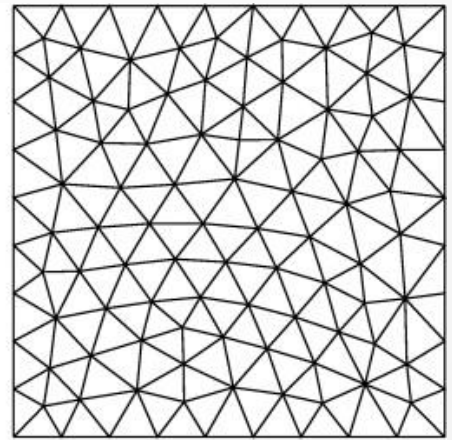
Unstructured



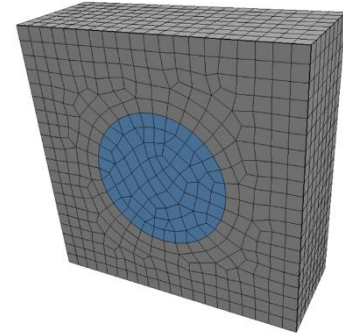
Voxel



(a) Structured mesh

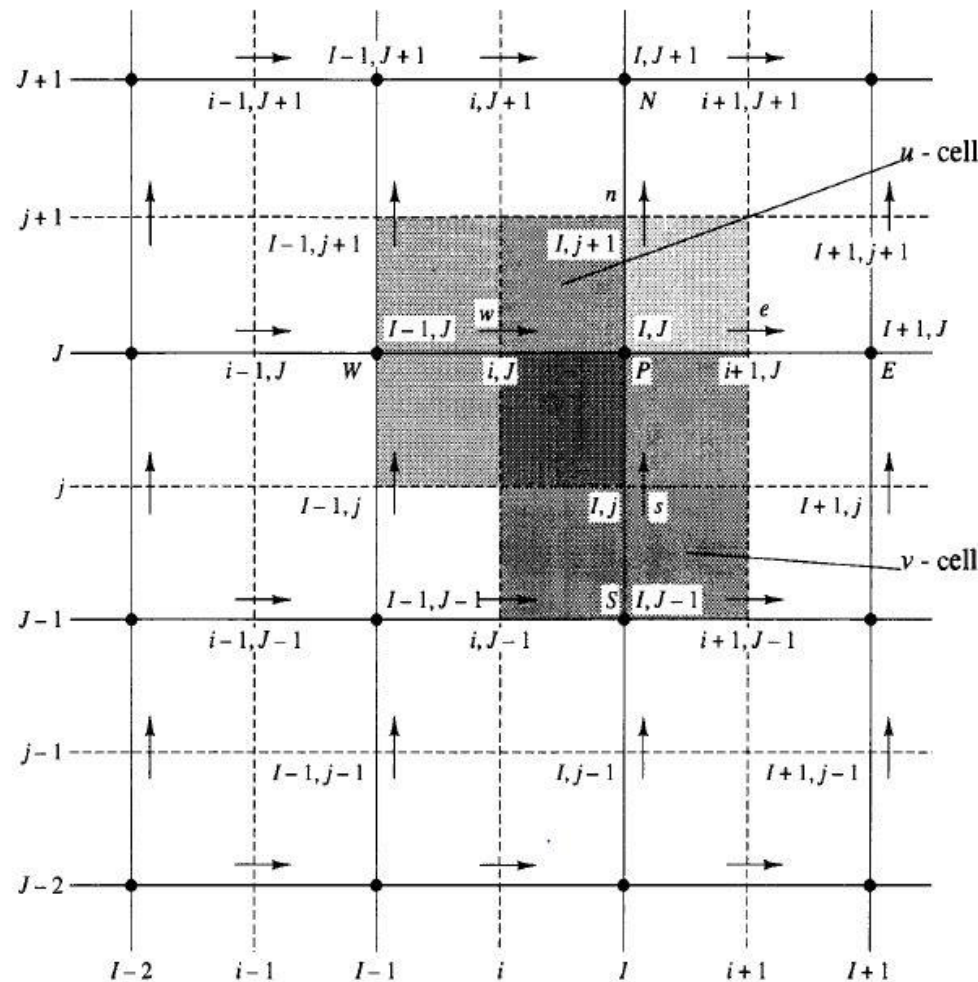


(b) Unstructured mesh

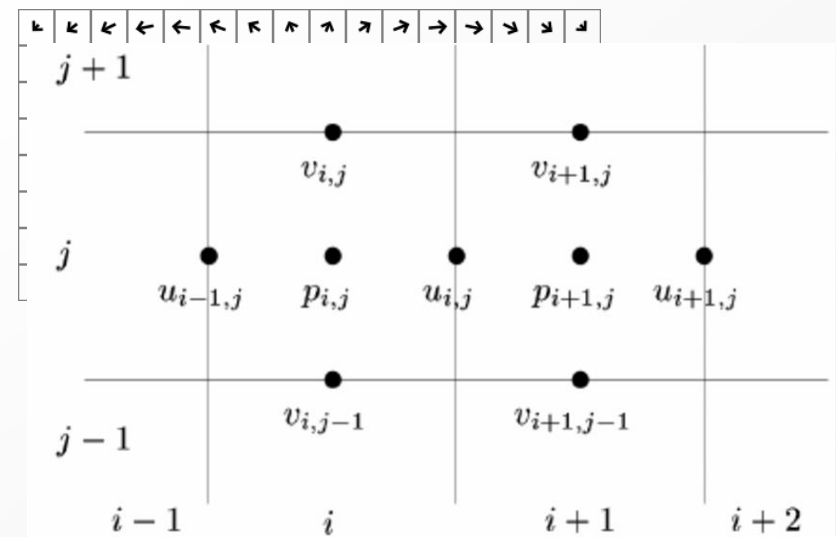
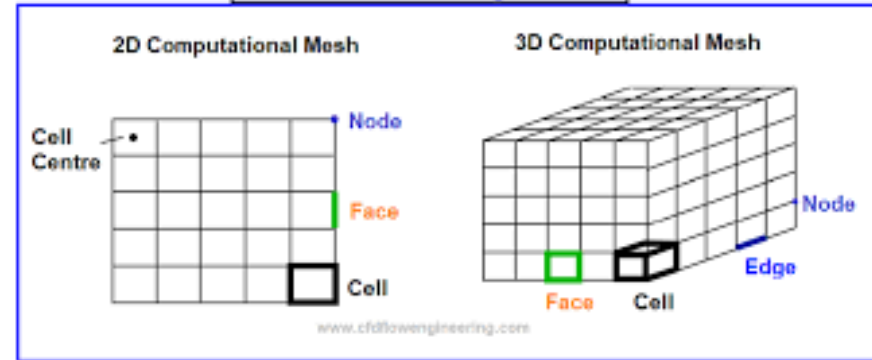


Διακριτοποίηση Υπολογιστικών πλεγμάτων και καννάβων

Σταυροειδές(ής) ή Έκκεντρο(ς) πλέγμα (κάνναβος)



Elements of Meshing or Grid



Βασικές θεωρήσεις και απαιτούμενα βήματα

Κατωτέρω αναφέρονται σύντομα οι βασικές θεωρήσεις αλλά και τα απαιτούμενα βήματα για ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικής προσομοίωσης προβλημάτων Υδραυλικής Μηχανικής (Abbot, 1979).

α) Αναγνώριση του προβλήματος

Αναγνώριση του προβλήματος και κατανόησή του, καθορισμός των επιμέρους αντικειμενικών σκοπών και αναμενόμενα από την έρευνα αποτελέσματα, πλεονεκτήματα και οικονομική θεώρηση ανάπτυξης και χρήσης αριθμητικών προσομοιώσεων, λήψη δεδομένων και έλεγχος της αξιοπιστίας του αριθμητικού προσομοίωση.

β) Προσομοίωση του προβλήματος

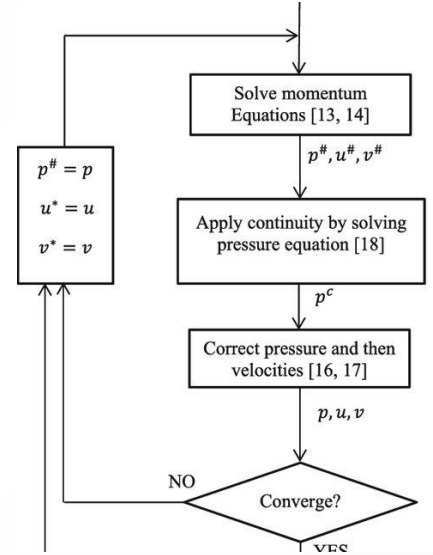
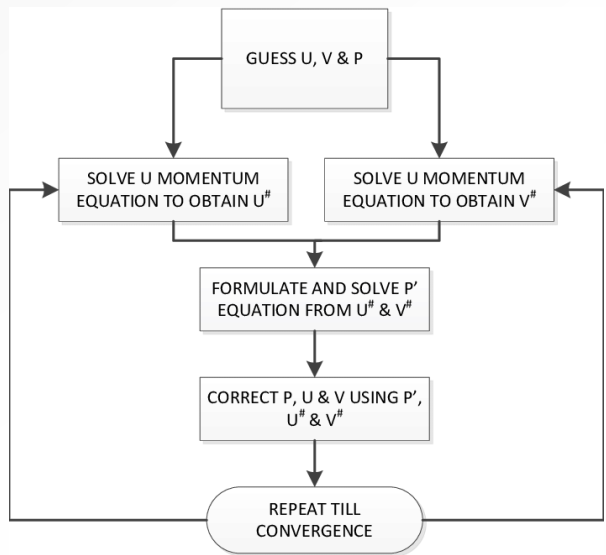
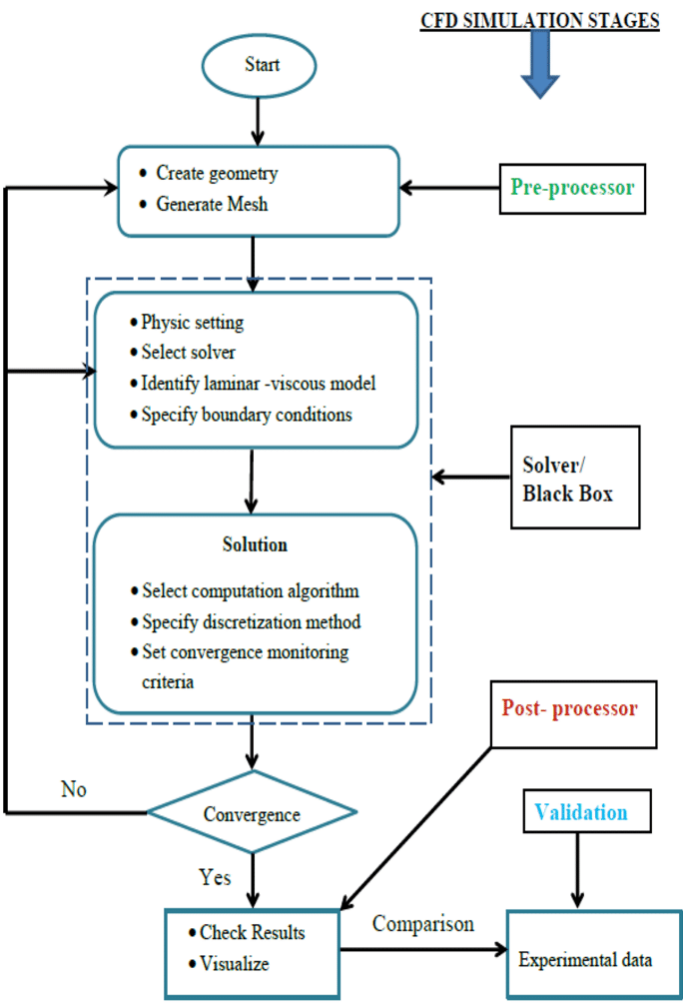
Επιλογή των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών του προβλήματος, επιλογή του είδους της προσομοίωσης και των σχετικών αριθμητικών προσεγγίσεων, καθορισμός των βασικών εξισώσεων, των αρχικών συνθηκών ροής, για ασταθή ροή, και των οριακών συνθηκών, παραδοχές του προβλήματος, ανάπτυξη των επιμέρους προγραμμάτων για την ολοκλήρωση του προβλήματος.

γ) Επίλυση του προβλήματος

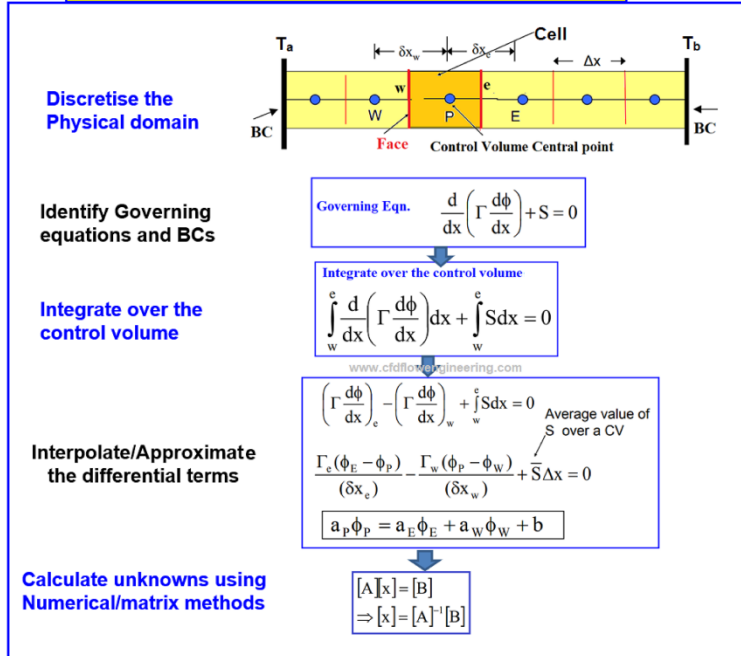
Επιλογή κατάλληλης τεχνικής επίλυσης ή/και κατάλληλου έτοιμου διαθέσιμου λογισμικού, χρήση κατάλληλων υπολογιστικών συστημάτων, desktop, workstation, κεντρική υπολογιστική μονάδα, επαλήθευση των αποτελεσμάτων των υπολογισμών με ακριβείς αναλυτικές λύσεις, εφόσον αυτές υπάρχουν, ή άλλες αριθμητικές τεχνικές ή πειραματικά ή οπτικά αποτελέσματα, παρουσίαση των αποτελεσμάτων, ερμηνεία αυτών και προτάσεις για περαιτέρω μελέτη, χρήση του αναπτυχθέντος λογισμικού για ανάλυση, σχεδιασμό και λήψη απόφασης για περαιτέρω επιστημονική δράση.

Δ.2.3. Εισαγωγή - Υπολογιστική υδραυλική

Ανάπτυξη αριθμητικού αλγόριθμου



Major Steps in Finite Volume Method (FVM)



Δ.2.4. Εισαγωγή – Αριθμητικά Μοντέλα

Πλαίσιο αριθμητικής μοντελοποίησης

Καλά δομημένα μαθηματικά μοντέλα και αριθμητικές προσεγγίσεις

Ένα μαθηματικό μοντέλο ενός συστήματος θεωρείται ότι είναι καλά δομημένο εάν έχει τα ακόλουθα:

- Ο αλγόριθμος επίλυσης να παράγει μια λύση για όλα τα σύνολα δεδομένων εισόδου κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες και περιορισμούς.
- Η παραγόμενη λύση είναι μοναδική, δηλαδή αντιστοιχεί μόνο ένα αποτέλεσμα λύσης σε κάθε ένα σύνολο δεδομένων εισόδου.
- Το αποτέλεσμα πρέπει να σχετίζεται με τα δεδομένα εισόδου, μέσω μιας συνθήκης Lipschitz, δηλαδή κάθε απειροελάχιστη αλλαγή των τιμών εισόδου (δx) να καταλήγει σε πεπερασμένη μεταβολή των αποτελεσμάτων εξόδου (δy).

Επίσης, για να είναι σωστά δομημένο ένα μαθηματικό μοντέλο, είναι απαραίτητο οι δέουσες PDEs, τα έξτρα δεδομένα εισόδου εξόδου – οριακών και αρχικών συνθηκών – και ο αριθμητικός αλγόριθμος να είναι όλα ορθά τεθειμένα.

Δ.2.4. Εισαγωγή – Αριθμητικά Μοντέλα

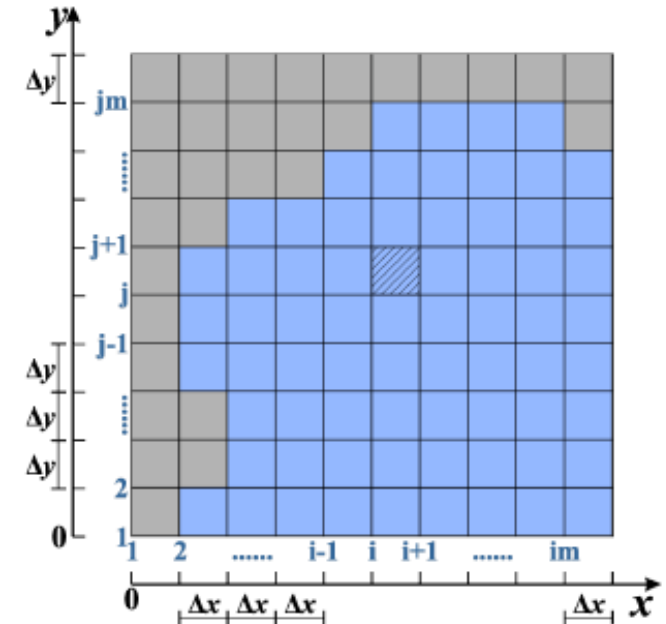
Διακριτοποίηση και αριθμητική επίλυση μαθηματικών/αριθμητικών μοντέλων

Στα αριθμητικά μοντέλα οι εξισώσεις που ισχύουν αναδιατυπώνονται κατά προσέγγιση, ήτοι οι διαφορικές εξισώσεις γράφονται ως εξισώσεις διαφοράς, μέσω κάποιας αριθμητικής μεθόδου.

Η περιοχή λύσεων διακριτοποιείται επίσης κατάλληλα σε 1D, 2D ή 3D κελιά και η λύση προσεγγίζεται στους (γωνιακούς/τεμνόμενους) **κόμβους** (nodes), στις **πλευρές** (faces/sides) ή στο **εσωτερικό** (interior/center) των **κελιών**.

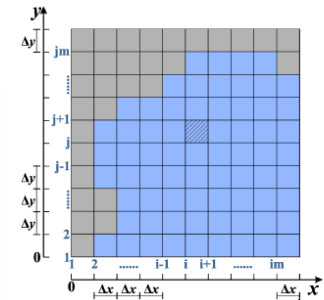
Η διακριτοποίηση των συνεχών ανεξάρτητων μεταβλητών x , y , z και t σε μικρά βήματα Δx , Δy , Δz και Δt σε συνδυασμό με την προσέγγιση των εξισώσεων που διέπουν οδηγεί σε σφάλματα περικοπής.

Θεωρητικά, το σφάλμα περικοπής εξαλείφεται όταν τα Δx , Δy , Δz και $\Delta t \rightarrow 0$ (τείνουν στο μηδέν).



Διακριτοποίηση και αριθμητική επίλυση μαθηματικών/αριθμητικών μοντέλων

Ωστόσο, μειώνοντας το μέγεθος των βημάτων διακριτοποίησης, ο αριθμός των υπολογιστικών βημάτων αυξάνεται → αυξάνει τον αριθμό ή τις αριθμητικές πράξεις προς εκτέλεση, αλλά και το σφάλμα στρογγυλοποίησης γίνεται σημαντικό.



Η ισορροπία μεταξύ του σφάλματος περικοπής και του σφάλματος στρογγυλοποίησης συνήθως οδηγεί σε μια βέλτιστη αριθμητική λύση που προσεγγίζει αλλά δεν συμπίπτει με την αναλυτική λύση (Fig. 1.1).

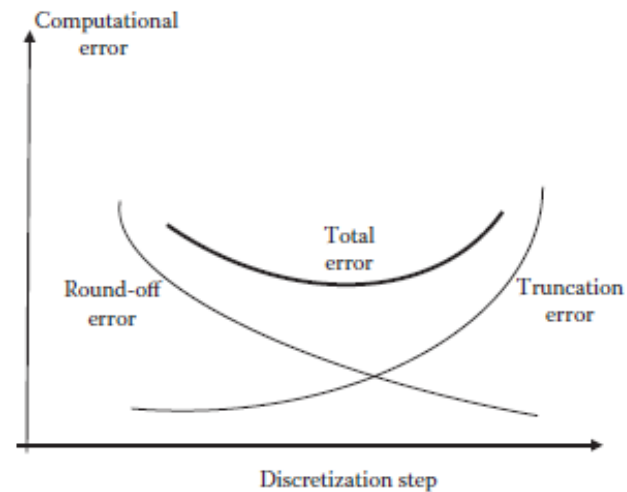


Figure 1.1 Numerical induced error versus the discretization step.

Διακριτοποίηση και αριθμητική επίλυση μαθηματικών/αριθμητικών μοντέλων

Οποιαδήποτε μέθοδος αριθμητικής λύσης πρέπει να πληροί τρεις προϋποθέσεις:

1. Πρέπει να είναι **συνεπής (consistent)**, δηλαδή, η προσέγγιση που χρησιμοποιείται για τις παραγώγους πρέπει να είναι σωστή, σύμφωνα με την αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιείται.
2. Πρέπει να είναι **συγκλίνουσα (convergent)**, δηλαδή να τείνει η αριθμητική λύση ασυμπτωτικά προς την αναλυτική λύση, καθώς η χωρική και χρονική διακριτοποίηση (Δx , Δy , Δz , Δt) τείνουν στο μηδέν. Μια μη συγκλίνουσα μέθοδος δεν είναι πρακτική.
3. Πρέπει να είναι αριθμητικά **ευσταθές (stable)**. Για ευσταθείς μεθόδους, τα αναπόφευκτα εισαγόμενα σφάλματα κατά τη διαδικασία επίλυσης δεν αυξάνονται επ' αόριστον, αλλά απομειώνονται και γίνονται αμελητέα μετά από ορισμένα βήματα επίλυσης.

Δ.2.4. Εισαγωγή – Αριθμητικά Μοντέλα

Αξιοπιστία μοντέλων προσομοίωσης

Η χρήση μιας αριθμητικής μεθόδου και η παραγωγή απλώς μιας λύσης για ένα μαθηματικό μοντέλο δεν είναι ο απώτερος στόχος. Η πλήρης εφαρμογή ενός μαθηματικού μοντέλου απαιτεί τη συμμετοχή τριών διαδοχικών φάσεων:

(1) Βαθμονόμησης (calibration)

(2) επαλήθευσης (verification)

(3) επικύρωσης (validation)

Η βαθμονόμηση μοντέλου είναι ο ποσοτικός προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου. Οι παράμετροι του μοντέλου είναι ορισμένες άγνωστες μεταβλητές και φυσικές υποδιεργασίες που πρέπει να προσδιοριστούν εκ των προτέρων για να είναι λειτουργικό το μοντέλο. Οι μεταβλητές εκφράζονται ως επί το πλείστον ως συγκεντρωτικές σταθερές ή γνωστές μαθηματικές εκφράσεις. Σχετικά με τις υποδιεργασίες που δεν περιγράφονται λεπτομερώς από το μοντέλο για να αποφευχθεί η περιττή υπολογιστική πολυπλοκότητα, προσεγγίζονται με παραμέτρους ή σχέσεις, λαμβάνοντας συγκεκριμένες τιμές κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Ο προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου βασίζεται σε διαθέσιμα σύνολα δεδομένων τιμών εισόδου-εξόδου που λαμβάνονται από σχετικά φυσικά μοντέλα, μετρήσεις πεδίου ή οποιεσδήποτε διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις του μοντέλου.

Αξιοπιστία μοντέλων προσομοίωσης

Χαρακτηριστικό παράδειγμα παραμετροποίησης στις ροές ρευστού είναι ο προσδιορισμός του συντελεστή τριβής τοιχώματος. Αυτός ο συντελεστής ποσοτικοποιεί τα αποτελέσματα του οριακού στρώματος του προφίλ ταχύτητας. Έτσι, εξαιρώντας αυτό το στρώμα από το μοντέλο, το μοντέλο επιλύει την ταχύτητα ροής όγκου έξω από το οριακό στρώμα, ενώ τα φαινόμενα οριακής στρώσης εκφράζονται με έναν συντελεστή τριβής τοίχου (π.χ. συντελεστής τριβής Darcy-Weisbach).

Η επαλήθευση μοντέλου είναι η απόδειξη της ρεαλιστικότητας και αληθοφάνειας του μοντέλου. Η επαλήθευση πραγματοποιείται με τη χρήση συνόλων γνωστών δεδομένων εισόδου-εξόδου, διαφορετικών από αυτά που χρησιμοποιούνται για τη βαθμονόμηση, τα οποία θα πρέπει επίσης να αναπαραχθούν από το βαθμονομημένο μοντέλο.

Τέλος, η επικύρωση μοντέλου είναι η ρητή αναγνώριση και οριοθέτηση του σχετικά με τη δυνατότητα εφαρμογής του μοντέλου, έτσι ώστε οι χρήστες να μη χρησιμοποιούν το μοντέλο εκτός αυτών των ορίων, επειδή ενδέχεται να έχουν μη ρεαλιστικά αποτελέσματα. Οι παραδοχές επιβάλλουν (σιωπηρά) τα όρια της δυνατότητας εφαρμογής του μοντέλου, πέραν των οποίων η διαμόρφωση του μοντέλου δεν ισχύει πλέον. Π.χ. μη γραμμικοί όροι σημαντικοί ή όχι?

Εισαγωγή στην ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικών μοντέλων

Η επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων της ροής είναι από τα πλέον ενδιαφέροντα, αλλά και πλέον προκλητικά, προβλήματα των Θετικών Επιστημών και της Μηχανικής. Οι εξισώσεις της ροής, στα περισσότερα προβλήματα, σχηματίζουν ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων, οι οποίες πρέπει να λυθούν με τις αρχικές και τις οριακές των συνθήκες.

Η Υδραυλική Μηχανική, η οποία επιλύει τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, αφού πρώτα τις μετατρέψει σε αριθμητικές, έτυχε αλματώδους ανάπτυξης τα τελευταία χρόνια. Η ανάπτυξη αυτή είναι και αποτέλεσμα της επίσης αλματώδους ανάπτυξης της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών, ιδίως των προσωπικών.

Πλην ελάχιστων εξαιρέσεων, οι οποίες αφορούν προβλήματα με απλή γεωμετρία, οπότε υπάρχουν διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις, τα αποτελέσματα πρέπει να ελεγχθούν για την ακρίβειά τους συγκρίνοντάς τα με ακριβείς πειραματικές μετρήσεις ή με μετρήσεις πεδίου ή με άλλες αριθμητικές τεχνικές. Κατωτέρω δίνεται συνοπτική εικόνα των τεχνικών και της μεθοδολογίας, η οποία ακολουθείται για την επίλυση προβλημάτων με τη χρήση της Υπολογιστικής Υδραυλικής Μηχανικής.

Δ.2.5. Ανάπτυξη και εφαρμογή μοντέλων

Εισαγωγή στην ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικών μοντέλων Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (Finite Differences Method, FDM)

Από το σύνολο των υπάρχουσών αριθμητικών μεθόδων, εκείνες οι οποίες χρησιμοποιούν προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών είναι οι πλέον απλές, χρησιμοποιούνται συχνότερα και είναι περισσότερο εύκολο να εφαρμοστούν από οποιαδήποτε άλλη μέθοδο (Mitchell & Griffiths, 1980; Farlow, 1982). Η τεχνική των πεπερασμένων διαφορών απαιτεί την αριθμητική προσέγγιση με κεντρικές ή προς τα εμπρός ή οπίσθιες διαφορές πρώτης, δεύτερης ή ανώτερης τάξης των μερικών παραγώγων των εξισώσεων της ροής. Το μεγαλύτερο μειονέκτημα της τεχνικής των πεπερασμένων διαφορών είναι η μη ικανοποιητική επίτευξη των λύσεων σε περιοχές με έντονη μεταβολή της γεωμετρίας σε σταθερή ή ασταθή ροή.

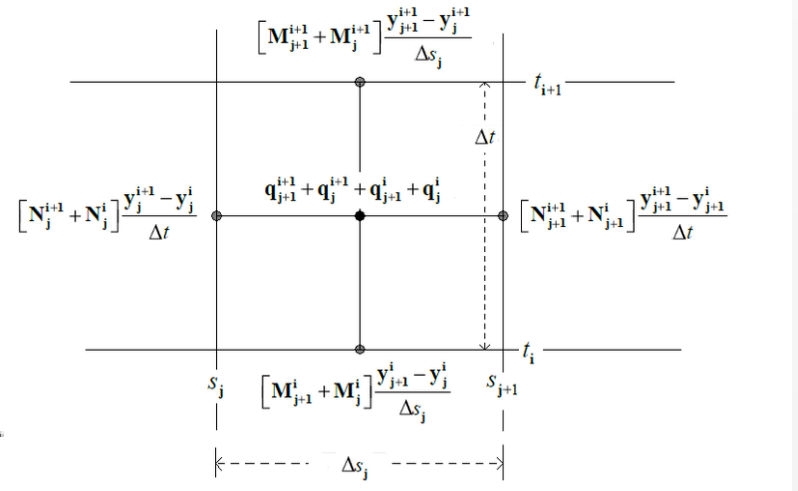
$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h}$$

$$f_y(x, y) \approx \frac{f(x, y + k) - f(x, y - k)}{2k}$$

$$f_{xx}(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - 2f(x, y) + f(x - h, y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x, y) \approx \frac{f(x, y + k) - 2f(x, y) + f(x, y - k)}{k^2}$$

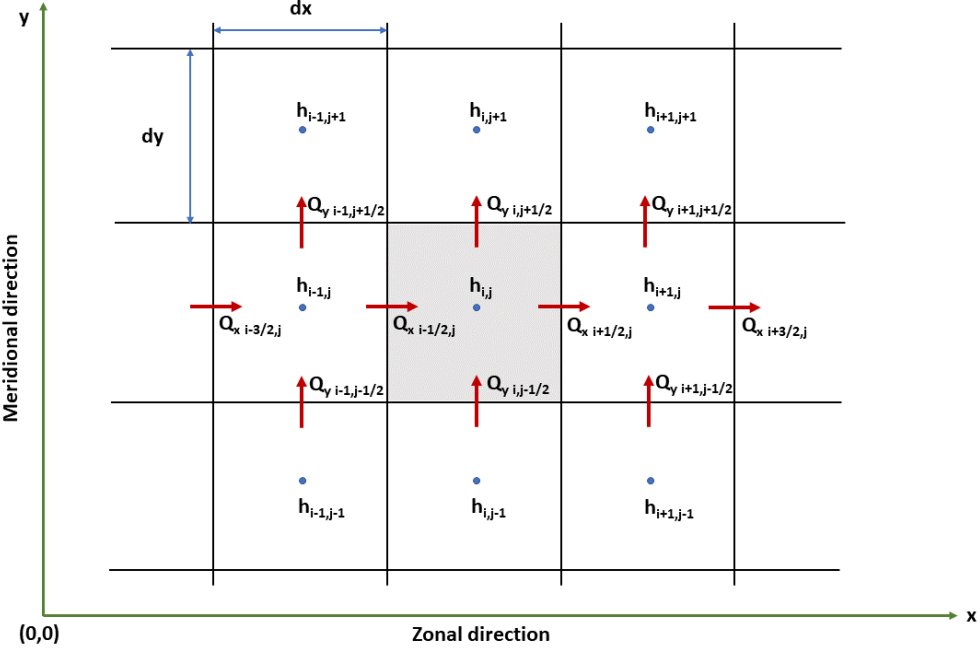
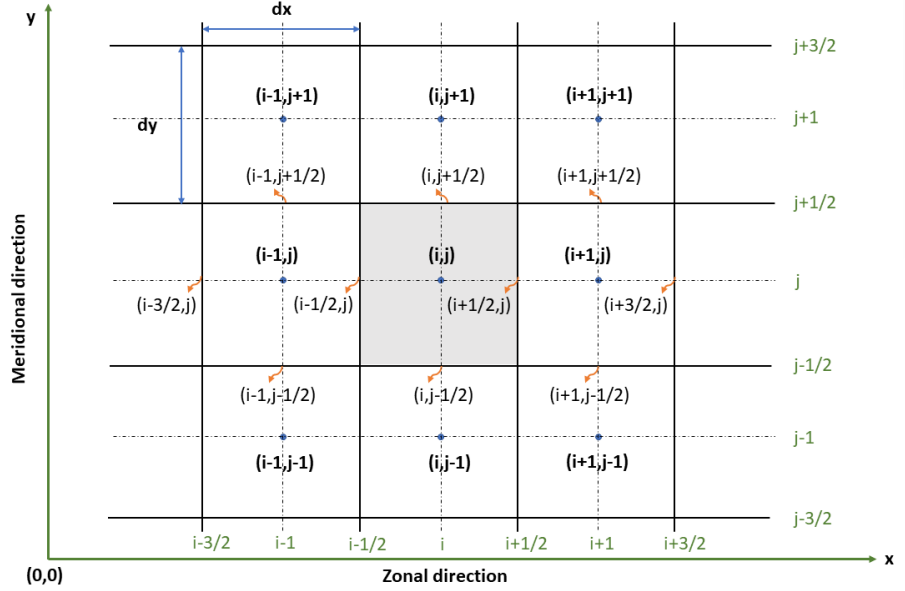
$$f_{xy}(x, y) \approx \frac{f(x + h, y + k) - f(x + h, y - k) - f(x - h, y + k) + f(x - h, y - k)}{4hk}$$



Δ.2.5. Ανάπτυξη και εφαρμογή μοντέλων

Εισαγωγή στην ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικών μοντέλων

Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (Finite Differences Method, FDM)

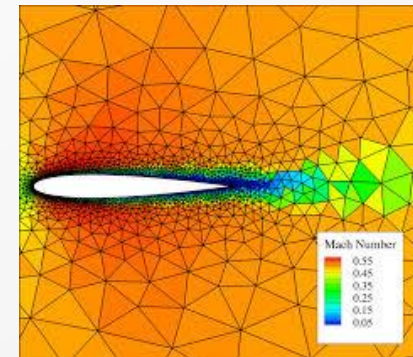
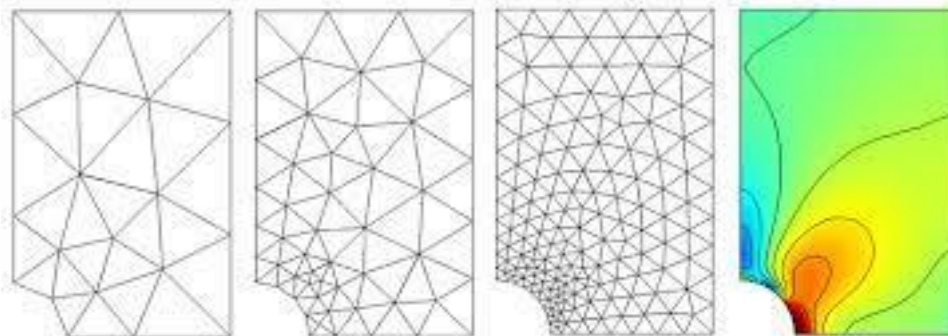


Δ.2.5. Ανάπτυξη και εφαρμογή μοντέλων

Εισαγωγή στην ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικών μοντέλων

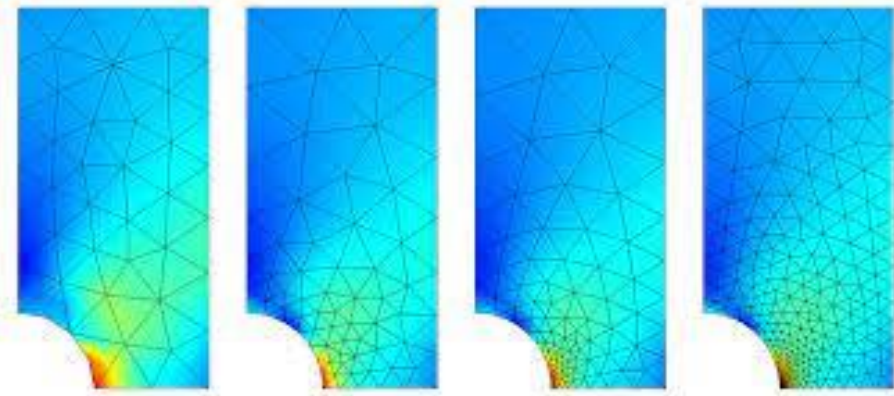
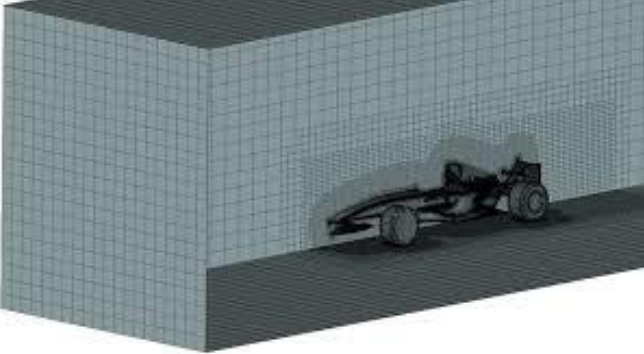
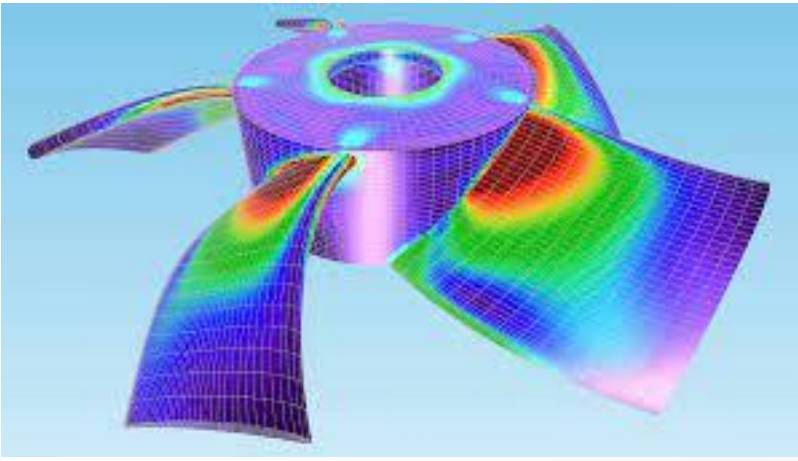
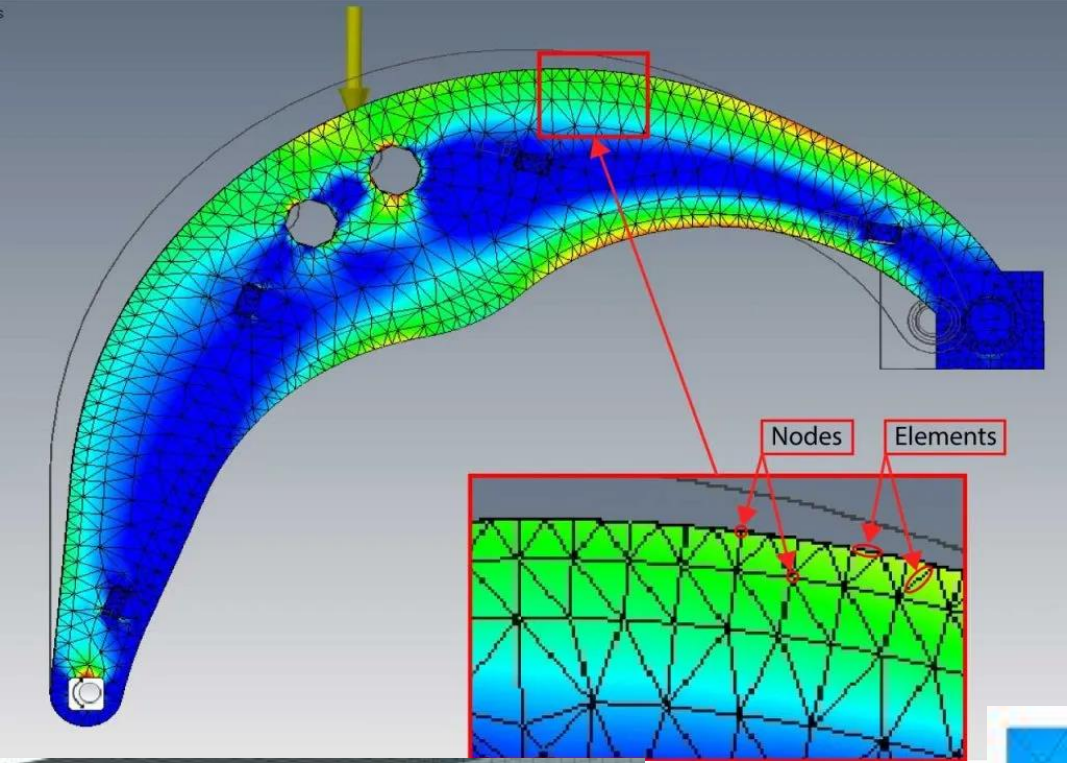
Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Finite Elements Method, FEM)

Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ο χώρος στον οποίο απαιτείται λύση, υποδιαιρείται σε πάρα πολλές μικρές, αλληλοσυνδεδεμένες περιοχές ή στοιχεία τριγωνικά ή τετράπλευρα ή άλλα για το επίπεδο και τετράεδρα ή κυβοειδή ή άλλα για τον χώρο (Chow, 1979). Έτσι, οι εξισώσεις της ροής μπορούν να εφαρμοστούν σε καθένα στοιχείο του υπολογιστικού πεδίου και, όταν γίνει η συνάθροιση, θα προκύψει η λύση σε όλο τον χώρο. Η ανωτέρω τεχνική είναι καταλληλότερη για την επίλυση προβλημάτων μη ομαλής γεωμετρίας. Η τεχνική των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί βασικά μια μέθοδο μεταβολών, δεδομένου ότι η λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων προκύπτει με την ελαχιστοποίηση μιας ολοκληρωματικής ποσότητας, η οποία θεωρείται σε όλο το υπολογιστικό πεδίο της ροής. Υπάρχουν και άλλες μεθοδολογίες, μεταξύ αυτών η μέθοδος των σταθμιστικών υπολοίπων, η οποία επίσης έτυχε ευρύτατης εφαρμογής (τεχνική Galerkin).



Δ.2.5. Ανάπτυξη και εφαρμογή μοντέλων

Εισαγωγή στην ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικών μοντέλων
Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Finite Elements Method, FEM)

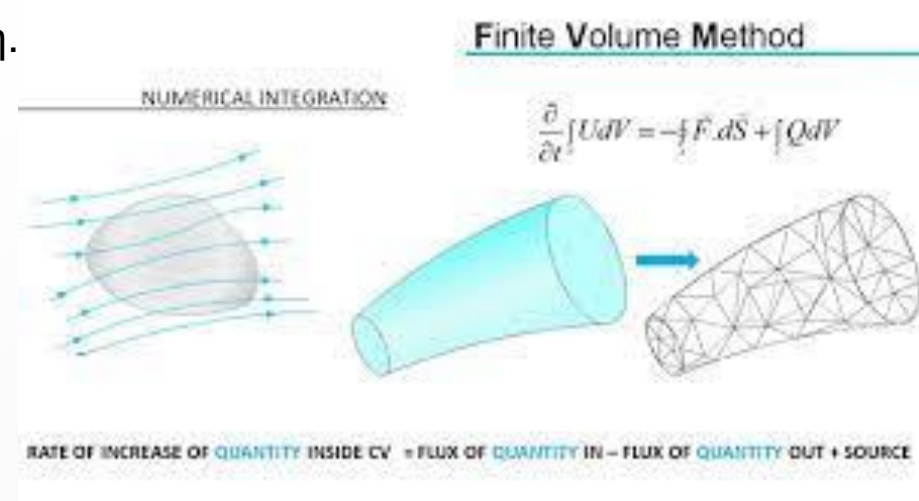


Δ.2.5. Ανάπτυξη και εφαρμογή μοντέλων

Εισαγωγή στην ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικών μοντέλων

Μέθοδος πεπερασμένων όγκων

Στενά συνδεδεμένη με τις τεχνικές των πεπερασμένων διαφορών είναι και η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων (Σούλης 1986). Η τεχνική αυτή, στη βασική της παραλλαγή, έχει τα πλεονεκτήματα των προηγούμενων δύο αναφερθεισών τεχνικών και αυτό γιατί, ενώ η τεχνική ξεκινά με τη χρήση της βασικής θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων, καταλήγει στο να χρησιμοποιεί πεπερασμένες διαφορές. Σ' άλλη παραλλαγή της, οι μερικές διαφορικές εξισώσεις θεωρούνται ως ολοκληρωματικές εξισώσεις (integral equations). Το άθροισμα των ροών μάζας, ορμής και ενέργειας στις πλευρές του κάθε πεπερασμένου όγκου πρέπει να ισούται, στην τελική λύση, με μηδέν. Αρχικά, γίνεται μία παραδοχή για τις τιμές των φυσικών ποσοτήτων ροής και με διαδοχικές επαναλήψεις υπολογίζεται τελικά η λύση.



Μέθοδος πεπερασμένων όγκων

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0$$

- V is the control volume
- A is the surface area of the control volume
- ρ is the fluid density
- \vec{u} is the velocity vector
- \vec{n} is the outward-pointing unit normal vector on the surface

a. Surface Integration

The integral over the surface area A is transformed into a sum of fluxes across each face of the control volume. This involves calculating the fluxes (mass, momentum, energy) entering and leaving the control volume through its faces.

b. Approximation of Fluxes

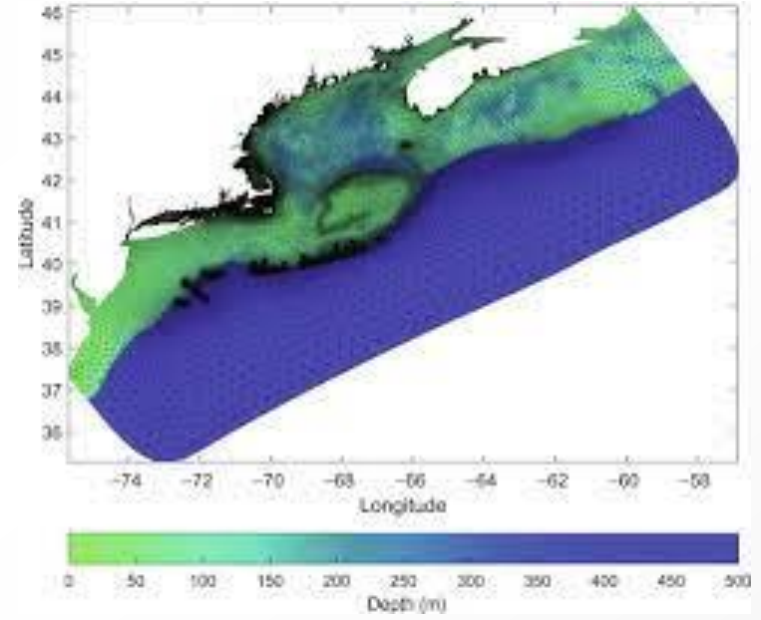
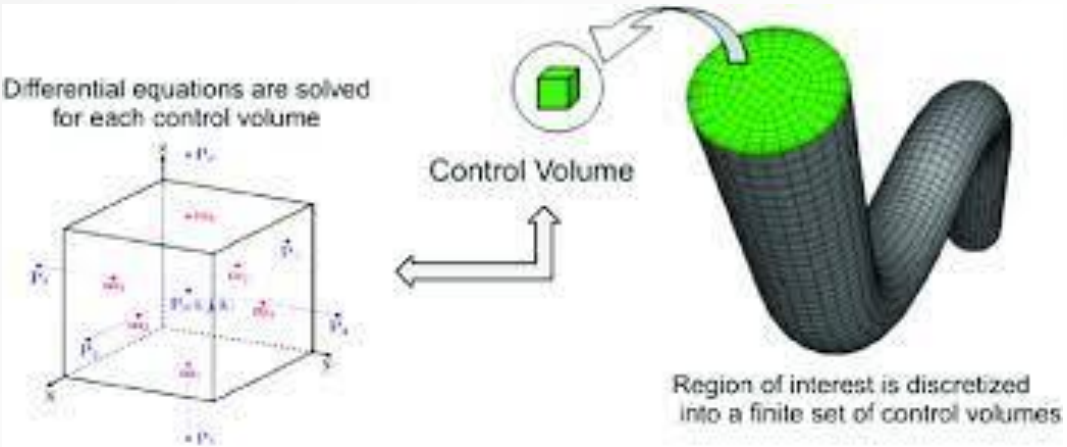
Fluxes are typically approximated using numerical schemes. Common approaches include:

- **Upwind Schemes:** These consider the direction of the flow to choose appropriate neighboring values, enhancing stability, especially for convective terms.
- **Central Differencing:** Uses average values from neighboring points, offering higher accuracy but potentially less stability.
- **Higher-Order Schemes:** Such as QUICK or MUSCL, which provide greater accuracy by considering more neighboring points.

Δ.2.5. Ανάπτυξη και εφαρμογή μοντέλων

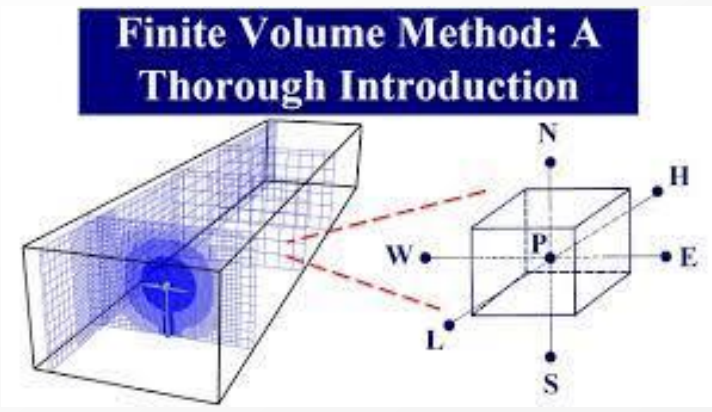
Εισαγωγή στην ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικών μοντέλων

Μέθοδος πεπερασμένων όγκων



10. Advantages of the Finite Volume Method

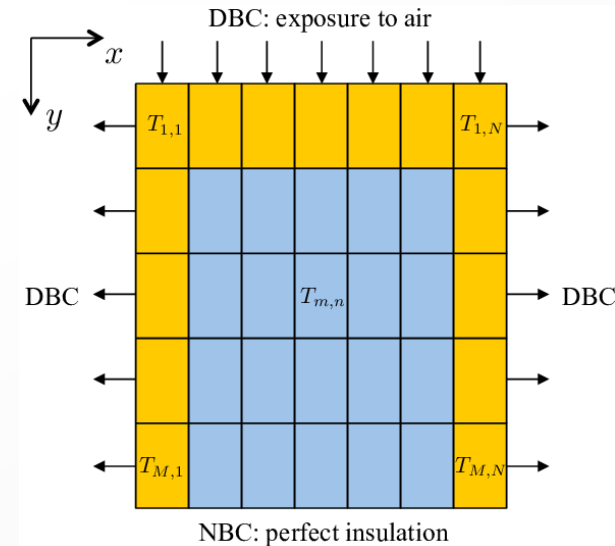
- Conservation: FVM inherently conserves mass, momentum, and energy within each control volume.
- Flexibility with Meshes: Easily accommodates complex geometries and unstructured meshes.
- Robustness: Suitable for handling discontinuities like shocks in compressible flows.
- Local Conservation: Ensures that fluxes leaving one control volume enter the adjacent one, maintaining global conservation.



Δ.2.5. Ανάπτυξη και εφαρμογή μοντέλων

Αρχικές και οριακές συνθήκες ροής

Για να προκύψει μία και μοναδική λύση στο σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων, πρέπει να καθοριστούν πλήρως οι οριακές συνθήκες του προβλήματος. Εάν, βεβαίως, η επίλυση αφορά σε ασταθή ροή, είναι αναγκαίο να καθοριστούν και οι συνθήκες ροής στη χρονική στιγμή έναρξης των υπολογισμών. Στην περίπτωση σταθερής ροής δεν απαιτούνται αρχικές συνθήκες. Οι οριακές συνθήκες απαιτούν καθορισμό των τιμών ή των παραγώγων των άγνωστων μεταβλητών στα όρια (Hoffmann & Chiang, 1993). Υπάρχουν διάφορες οριακές συνθήκες, οι οποίες κατηγοριοποιούνται ακόλουθα:



- καθορισμός αριθμητικών τιμών στα όρια του προβλήματος ή συνθήκες **Dirichlet**,
- καθορισμός της κλίσης της εξαρτημένης μεταβλητής κάθετα στα όρια του πεδίου ή συνθήκες **von Neumann**,
- συνδυασμός των ανωτέρω περιπτώσεων σ' ένα σημείο (**Robin**),
- τμήμα των ορίων να καλύπτεται από την περίπτωση συνθηκών Dirichlet και άλλο τμήμα από την περίπτωση συνθηκών Neumann.

Αρχικές και οριακές συνθήκες ροής

- καθορισμός αριθμητικών τιμών στα όρια του προβλήματος ή συνθήκες Dirichlet,

For velocity \mathbf{u} at an inlet:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_{\text{in}}$$

For temperature T at a wall:

$$T = T_{\text{wall}}$$

- καθορισμός της κλίσης της εξαρτημένης μεταβλητής κάθετα στα όρια του πεδίου ή συνθήκες von Neumann,

For pressure p at an outlet:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\text{Zero Gradient})$$

For heat flux q at a boundary:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_{\text{boundary}}$$

where k is thermal conductivity and n denotes the normal direction.

- συνδυασμός των ανωτέρω περιπτώσεων σ' ένα σημείο (Robin)

- Convective Heat Transfer: Combining fixed temperature and heat flux due to convection.

Representative Formula:

$$\alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial n} = \gamma$$

where α , β , and γ are constants determined by the physical situation.

- τμήμα των ορίων να καλύπτεται από την περίπτωση συνθηκών Dirichlet και άλλο τμήμα από την περίπτωση συνθηκών Neumann.

Επίλυση

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις για τη διατήρηση της μάζας, ορμής και ενέργειας αναφέρονται σ' ένα τυπικό πρόβλημα. Έστω ότι χρειάζεται η επίλυση με τεχνική βασισμένη στην ολοκληρωματική μορφή των εξισώσεων.

Η τεχνική συνίσταται σε:

- υποδιαίρεση του χώρου ροής,
- ολοκλήρωση, άθροιση δηλαδή, των εξισώσεων και δημιουργία αριθμητικών εξισώσεων για τις
- άγνωστες μεταβλητές, όπως ταχύτητες, πιέσεις, και άλλες φυσικές ποσότητες ροής,
- επίλυση των εξισώσεων που διακριτοποιήθηκαν.

Η επίλυση του συστήματος γίνεται με την τεχνική των συνεχών επαναλήψεων (Leon, 1977; Holt, 2006). Επειδή οι εξισώσεις των αγνώστων συνδέονται μεταξύ τους, μια αρχική εκτίμηση της λύσης πρέπει να επαναληφθεί πολλές φορές μέχρι την τελική σύγκλιση. Κάθε επανάληψη ή ανακύκλωση αποτελείται από τα κάτωθι βήματα:

- οι εξισώσεις των ορμών με την εύρεση των u, v, w ταχυτήτων επιλύονται διαδοχικά
- χρησιμοποιώντας τις ήδη διαθέσιμες τιμές της πίεσης p για να επανεκτιμηθεί το πεδίο των ταχυτήτων,
- η εξίσωση της συνέχειας της μάζας χρησιμοποιείται με τη διόρθωση της πίεσης,
- επιλύεται η ενεργειακή εξίσωση χρησιμοποιώντας τις ανωτέρω τιμές,
- υπολογίζονται οι φυσικές ιδιότητες ροής,
- ελέγχεται η σύγκλιση των τιμών των αγνώστων. Διαφορές εξαγόμενων αποτελεσμάτων $\Delta p \ll 10^{-6}$

Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Αριθμητική προσέγγιση και παρεμβολή

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Σειρά Taylor

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x) \dots$$

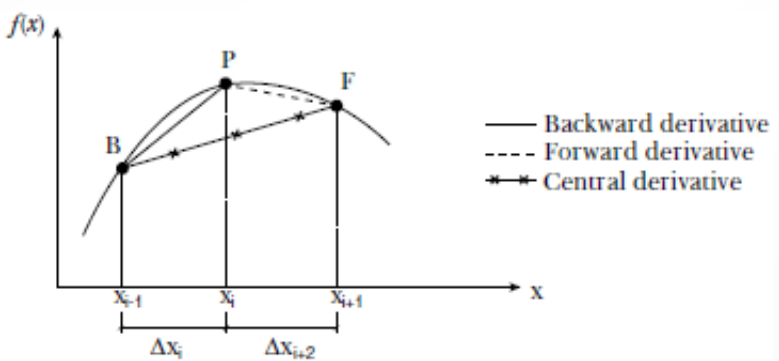
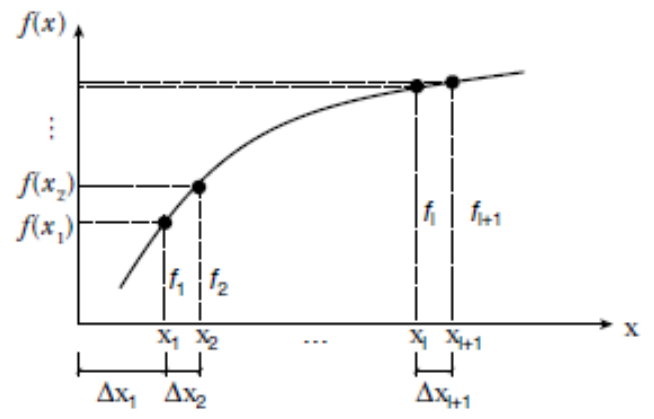
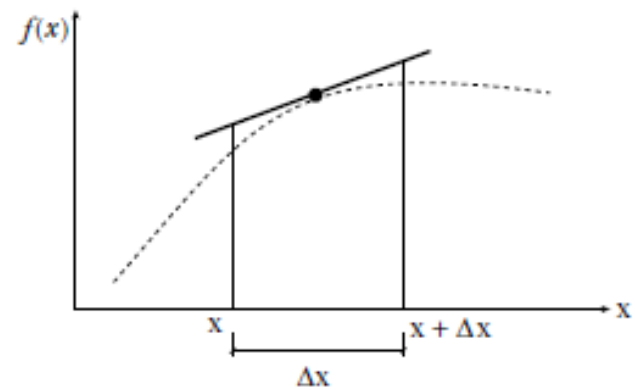
$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x) \dots$$

Με αναμόρφωση, προκύπτει:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x) + \dots \right] = f'(x) + O(\Delta x)$$

Με αφαίρεση των 2 εξισώσεων:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} \left[2\Delta x f'(x) + 2 \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \right] = f'(x) + O(\Delta x^2)$$



If Δx is small then it can be considered that:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \text{ or}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Αριθμητική προσέγγιση και παρεμβολή

2.2

Αριθμητική προσέγγιση και παρεμβολή

Έστω ότι για μία συνάρτηση $f(x)$ διαθέτονται μία σειρά τιμών $x_i, f_i \quad i = 1 \dots n$. Καλείται παρεμβολή ή άνευρεση για τυχόν $x \neq x_i$ της προσεγγιστικής τιμής του f . Τέτοιες σειρές τιμών μπορούν να προκύψουν από πειραματικές μετρήσεις στο εργαστήριο ή να δίνονται σε πίνακες περιγραφής λειτουργίας και χρήσεως ενός όργανου. Όταν στις τιμές f_i περιέχονται σφάλματα (όπως π.χ. στην περίπτωση πειραματικών μετρήσεων) τότε η καμπύλη που περνά από όλα τα σημεία στο επίπεδο $f - x$ δεν είναι ομαλή και το "νέφος" των σημείων συνήθως προσεγγίζεται με καμπύλη που περνά ανάμεσα τους κατά ένα "σταθμισμένο" τρόπο. Αυτό κατορθώνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και γίνεται η ελαχιστοποίηση της μέσης τετραγωνικής απόκλισης μεταξύ της καμπύλης και των σημείων.

Η διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου της αριθμητικής προσεγγίσεως υπενθυμίζεται με τη βοήθεια του ακόλουθου παραδείγματος.

Π Α Ρ Α Δ Ε Ι Γ Μ Α 2.1

Δίνονται μία σειρά μετρήσεων τιμών ταχύτητας σε διάφορα βάθη άνοιχτου άγωγου και σε ήμισυλογαριθμική κλίμακα. Αν z είναι η απόσταση από τον πυθμένα σε m και u η ταχύτητα του νερού σε cm/sec δίνονται:

Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Αριθμητική προσέγγιση και παρεμβολή

$x = \ln z$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$f = u$	20	30	40	50	50	60	70	80	90	95	100

Υπενθυμίζεται ότι στην μόνιμη τυρβώδη ροή σε άνοιχτό άγωγό ισχύει με ικανοποιητική ακρίβεια η έξης κατανομή ταχύτητας:

$$u = \frac{u_*}{K} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (2.3)$$

όπου K ή σταθερά Von Karman ($K = 0,4$) z_0 τό ύψος τραχύτητας (μέση τιμή άνωμαλιών πυθμένα) και u_* ή ταχύτητα τριβής πού δίνεται συναρτήσεϊ τής διατμητικής τάσεως πυθμένα τ_0

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (2.4)$$

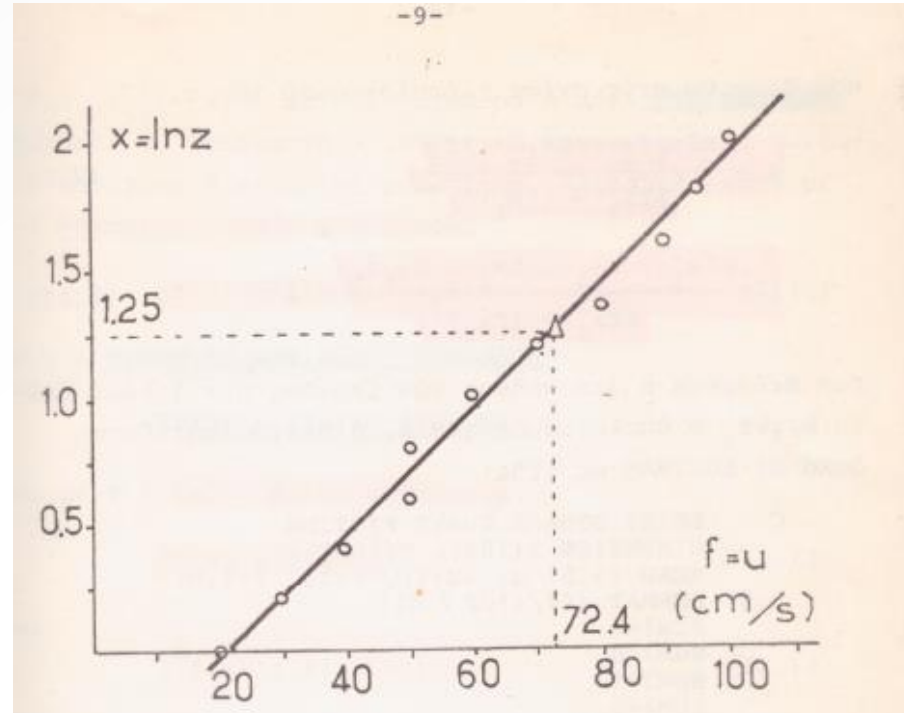
Νά υπολογιστῆ ἡ ταχύτητα σέ βάθος 3,5m.

1.- Από τή γραφική παράσταση τοῦ νέφους τῶν δεδομένων σημείων (Σχ. 2.1) και σύμφωνα μέ τή σχέση (2.3) ἐκλέγεται σάν πιό πλησιέστερη καμπύλη μεταξύ τῶν σημείων ἡ εὐθεΐα γραμμῆ. Ἡ μαθηματική ἔκφρασή της εἶναι:

$$f = ax + b \quad (2.5)$$

Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Αριθμητική προσέγγιση και παρεμβολή



Σχ. 2.1

2.- Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων για τον υπολογισμό των α, β επιβάλλει την ελαχιστοποίηση του άθροισματος των τετραγώνων των αποχών $f - f_i$

$$R = \sum_{i=1}^n (f - f_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta - f_i)^2 = \min \quad (2.6)$$

Η ελαχιστοποίηση στην (2.6) πετυχαίνεται με τον μηδενισμό των παραγώγων

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta} = 0 \quad (2.8)$$

Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Αριθμητική προσέγγιση και παρεμβολή

-10-

πού οδηγούν στις σχέσεις υπολογισμού των α , β

$$\alpha = \frac{n \sum x_i f_i - \sum x_i \cdot \sum f_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (2.9)$$

$$\beta = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum f_i - \sum x_i \cdot \sum x_i f_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (2.10)$$

Για δεδομένα n (τό πλήθος των ζευγών, $n = 11$) και ζεύγη x_i , f_i ο υπολογισμός των α , β προγραμματίζεται απλά σε FORTRAN ως εξής:

```

C   LEAST SQUARE CURVE FITTING
DIMENSION X(100), F(100)
READ (5,5) N, (X(I), F(I), I=1,N)
5  FORMAT (I4/(10F 7.0))
SUM1=0.
SUM2=0.
SUM3=0.
SUM4=0.
DO 7 I=1,N
SUM1=SUM1+X(I)
SUM2=SUM2+F(I)
SUM3=SUM3+X(I)**2
7  SUM4=SUM4+X(I)*F(I)
A=(SUM4*N-SUM1*SUM2)/(N*SUM3-SUM1**2)
B=(SUM3*SUM2-SUM1*SUM4)/(N*SUM3-SUM1**2)
WRITE (6,8) A, B
8  FORMAT (2F 10.4)
STOP
END

```

Για τις δεδομένες τιμές των x_i , f_i υπολογίστηκαν $\alpha = 40,45$, $\beta = 21,28$ και για $u = \ln 3,5 = 1,25 = x$, βρίσκεται $f = u = 72,40$ cm/sec. Η αριθμητική παρεμβολή εφαρμόζεται στην περίπτωση που δεν υπάρχουν σφάλματα στις τιμές των f_i και αναζητάται τό f για δεδομένο x . Γίνεται με δύο τρόπους ανάλογα με τό αν τά σημεία x_i ισαπέχουν

Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Αριθμητική ολοκλήρωση

$$h(\alpha + \alpha^2 \frac{\Delta}{2}) f_0 \Big|_0^1 = f(f_0 + (\frac{f_1 - f_0}{2}) \cdot 1) = \frac{f_1 + f_0}{2} \cdot h \quad (2.22)$$

πού είναι ο γνωστός τύπος του τραπεζιού.
 Η πιο γενική μέθοδος συνθέσεως σχημάτων αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών. Όλοι σχεδόν οι κλασσικοί τύποι ολοκληρώσεως προκύπτουν σαν ειδικές μορφές της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών. Κατά τη μέθοδο αυτή το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται με το άθροισμα

$$I = \sum_{k=0}^n H_k \cdot f(x_k) \quad (2.23)$$

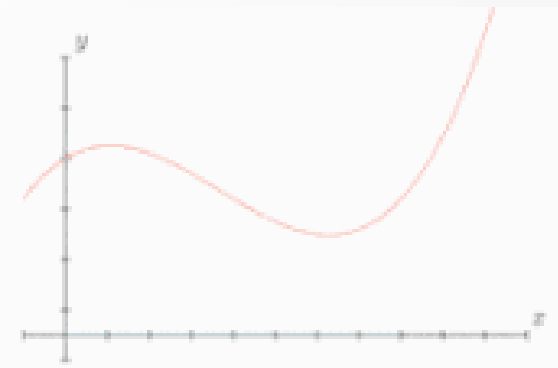
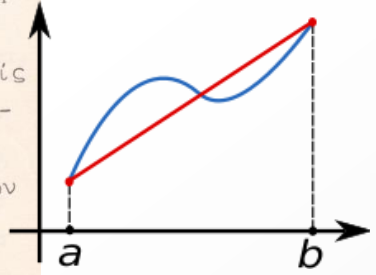
Αν στα x_k περιέχονται τα άκρα του διαστήματος ο τύπος καλεῖται κλειστός. Αλλιώς ανοιχτός. Τό πλήθος n των προσδιοριστέων συντελεστών H_k καθορίζει και τόν μέγιστο βαθμό των πολυωνύμων που ολοκληρώνονται χωρίς σφάλμα με τόν τύπο (2.23). Αυτό αποτελεί και τή διαδικασία υπολογισμού των H_k , ή αποκατάσταση δηλαδή ίσοτήτων μεταξύ του δεξιού μέλους της (2.23) και των ολοκληρωμάτων των πολυωνύμων βαθμού 0, 1, ..., n-1.

Για τόν υπολογισμό των H_0, H_1 στον τύπο

$$I = \int_0^1 f dx = H_0 f_0 + H_1 f_1 \quad (2.24)$$

Διαθέτουμε τα πολυώνυμα $f = 1, f = x$

$$\int_0^1 1 dx = 1 = H_0 \cdot 1 + H_1 \cdot 1 \quad (2.25)$$



2.3 Αριθμητική ολοκλήρωση

Η αριθμητική ολοκλήρωση ορίζεται σαν ο αριθμητικός - προσεγγιστικός υπολογισμός της ποσότητας

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f dx \quad (2.20)$$

Υπάρχουν διάφορα υπολογιστικά σχήματα αριθμητικής ολοκλήρωσης που μπορούν να προκύψουν από τούς τύπους του Νεύτωνος. Η μορφή τους εξαρτάται από τό πλήθος των όρων που χρησιμοποιούνται. Έστω ότι η $f(x)$ προσεγγίζεται με τήν $\Phi(\alpha)$ όπου

$$\Phi(\alpha) = (1 + \alpha\Delta) f_0 \quad \alpha = \frac{x - x_0}{h} \quad (2.21)$$

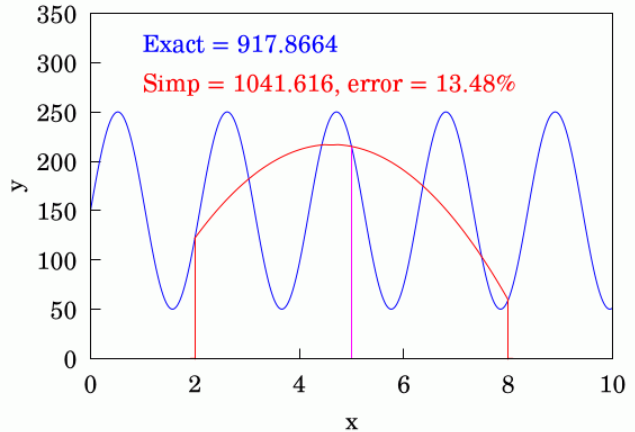
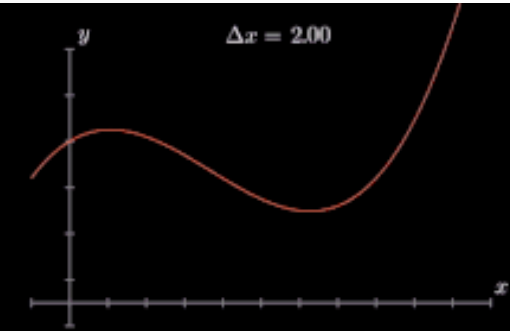
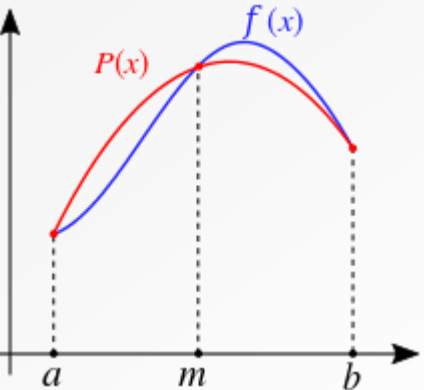
$$h = x_1 - x_0$$

και τό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f dx = h \int_0^1 \Phi(\alpha) d\alpha = h \int_0^1 (1 + \alpha\Delta) f_0 d\alpha =$$

Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Αριθμητική ολοκλήρωση



$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = H_0 \cdot 0 + H_1 \cdot 1 \quad (2.26)$$

πού δίνει $H_0 = H_1 = \frac{1}{2}$ (τύπος τραπεζίου). 'Ο γνωστός τύπος Simpson προκύπτει από τόν υπολογισμό τών H_0, H_1, H_2 στή μορφή

$$I = H_0 f_0 + H_1 f_{1/2} + H_2 f_1 = \int_0^1 f dx \quad (2.27)$$

Γιά $f = 1, x, x^2$ βρίσκεται (γιά ίσοδιάσταση h)

$$I = \frac{h}{6} (f_0 + 4 f_{1/2} + f_1) \quad (2.28)$$

Τό σφάλμα λόγω περικοπής όρων υπολογίζεται από τήν ολοκλήρωση πολυωνύμων βαθμού n.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4

Νά υπολογιστή μέ τή μέθοδο τραπεζίου ό όγκος νερού πού συσσωρεύεται σέ ένα έτος άνάντη φράγμα-τος πού κατασκευάζεται σέ ποταμό μέ τίσ έξής παροχές μετρημένες τήν 1η ήμέρα κάθε μήνα.

Μήνας	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Παροχή $\times 10^6 \text{ m}^3/\eta\mu$	8	6	5	5	4	1	1	1	5	6	7	7

Ποιά πρέπει νά είναι ή άποθηκευτικότητα τής άνάντη δεξαμενής ώστε νά ικανοποιεί συνεχή παροχή άρδεύσεως $42 \text{ m}^3/\text{sec}$. Γιά τόν υπολογισμό τής άποθηκευτικότητας του είναι άπαραίτητη ή καμπύλη συλλεγόμενου όγκου -

Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Αριθμητική ολοκλήρωση

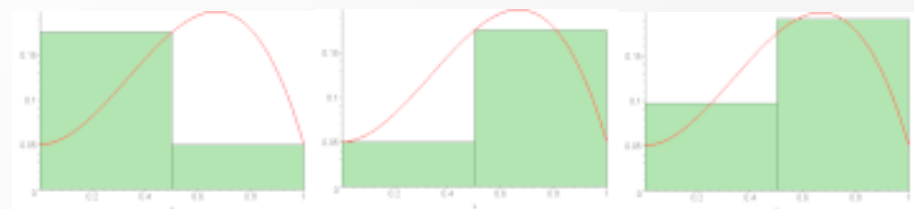
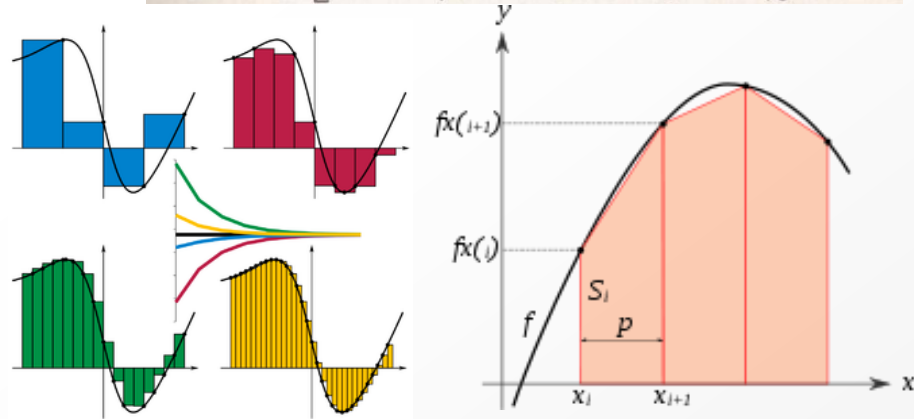
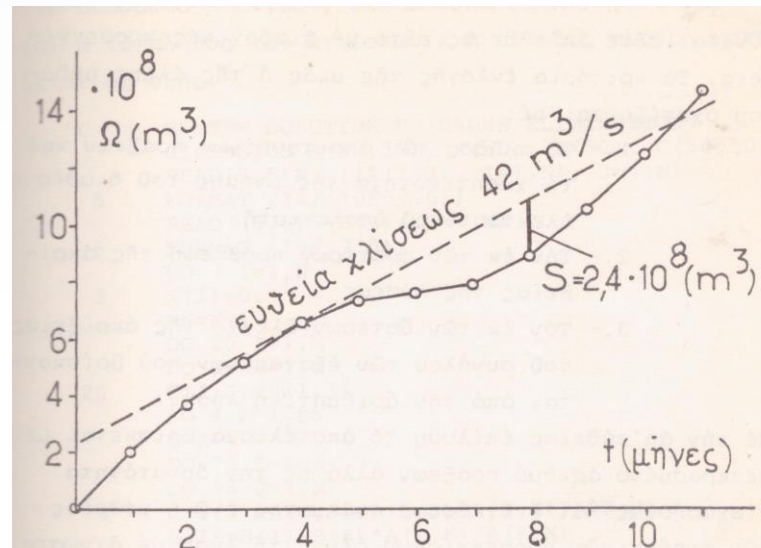
-18-

- χρόνου. Έτσι η αριθμητική ολοκλήρωση με ισοδιάσταση $h = 30$ ημ. θα γίνει για όλα τα διαστήματα (1, 2..... 12 μήνες) ολοκλήρωσης και τα αποτελέσματα θα έκτυπώνονται συνεχώς. Καταστρώνεται τό ακόλουθο πρόγραμμα.

```

C  NUMERICAL INTEGRATION
   DIMENSION F(100)
   READ (5,5)N, H, (F(I), I=1,N)
5  FORMAT (I4,F 7.0/(10F 7.0))
   SUM=0.
   NN=N-1
   DO 10 I=1,NN
   SUM=SUM+(F(I)+F(I+1))/2.*H
   WRITE (6,15) SUM
15  FORMAT (E14.6)
10  CONTINUE
   STOP
   END
    
```

Από τις τιμές του ολοκληρώματος SUM για τό τέλος κάθε μήνα χαράζεται η καμπύλη ογκο - χρόνου και βρίσκεται η απόσταση μεταξύ της καμπύλης και ευθείας με κλίση $42 \text{ m}^3/\text{sec}$ που έφάπτεται στο ψηλό σημείο Α. Η απόσταση αυτή, ίση προς $240 \times 10^6 \text{ m}^3$ είναι η απαραίτητη αποχετευτικότητα της δεξαμενής Σχ. 2.3.

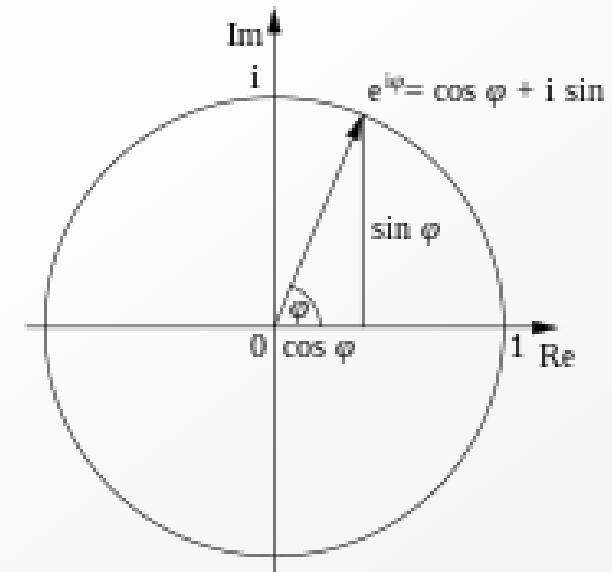


Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Σειρές Fourier

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$$

To find the energy at a particular frequency, spin your signal around a circle at that frequency, and average a bunch of points along that path.



Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

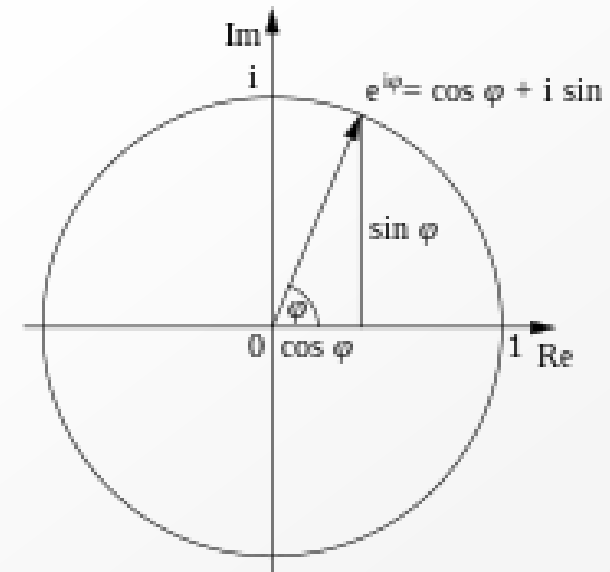
Σειρές Fourier

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$$

To find the energy at a particular frequency, spin your signal around a circle at that frequency, and average a bunch of points along that path.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

$$ix = \ln(\cos x + i \sin x).$$



Σειρές Fourier

2.5 Αριθμητική ανάλυση σε πεπερασμένες σειρές Fourier

Ἡ ἐπεξεργασία δεδομένων ὅπως οἱ μετρήσεις παροχῶν ὑδατορρευμάτων, μεταβολῶν στάθμης ἐπιφανείας στῆ θάλασσα ἢ τούς ποταμούς, ἢ ταχυτήτων τοῦ νεροῦ κοντά στίς ἀκτές (παράκτια ρεύματα) συμπεριλαμβάνει συχνά καί τή φασματική ἀνάλυσή τους δηλαδή τήν ἀνάλυσή τους σέ σειρές Fourier καί τόν ὑπολογισμό τοῦ πλάτους τῶν διαφόρων ἀρμονικῶν συνιστωσῶν. Ἡ ἀνάλυση σέ σειρές Fourier βασίζεται στήν ὀρθογωνικότητα τῶν συναρτήσεων $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$ καί $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$.

Καθώς οἱ συναρτήσεις παροχῆς, μεταβολῆς στάθμης, ταχύτητας δέν δίνονται ἀναλυτικά ἀλλά σάν σειρά μετρημένων τιμῶν ὁ ὑπολογισμός τῶν ἀρμονικῶν σύνιστωσῶν γίνεται ἀριθμητικά βασιζόμενος στό γεγονός ὅτι τά πῶ πάνω σύνολα συναρτήσεων \cos καί \sin εἶναι ὀρθογωνικά καί ὑπό ἀριθμητική ἔννοια. Σέ συνέχεια δίνεται συνοπτικά ἡ διαδικασία ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως

Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Σειρές Fourier

$$T_k = \frac{L}{k} \quad \omega_k = \frac{2\pi}{L} k \quad -30-$$

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{2N-1} f(x_p) \cos\left(\frac{2\pi k x_p}{L}\right) \quad k=0 \dots N \quad (2.63)$$

$$B_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{2N-1} f(x_p) \sin\left(\frac{2\pi k x_p}{L}\right) \quad k=1 \dots N-1 \quad (2.64)$$

Είναι φανερό ότι αν η καμπύλη περιέχει αρμονικές συνιστώσες με μήκος κύματος $< 2\Delta x$ αυτές δεν μπορούν να εμφανιστούν στην ανάλυση. Όπως αποδεικνύεται οι αντίστοιχοι συντελεστές α και β (της αναλυτικής ανάπτυξης) ενσωματώνονται σε A και B που ανήκουν σε αρμονικές μικρότερης τάξεως οδηγώντας σε σφάλματα (φαινόμενο aliasing). Χωρίς απόδειξη δίνεται ότι ισχύει η έξης σχέση μεταξύ των συντελεστών A (πεπερασμένης σειράς) και α (άπειρου σειράς).

$$A_k = \alpha_k + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{2Nm-k} + \alpha_{2Nm+k}) \quad (2.65)$$

Μόνον αν $\alpha_{2Nm \pm k}$ τείνουν στο μηδέν για m μεγάλο τότε $A_k \rightarrow \alpha_k$.

σε σειρές Fourier.

Έστω ότι δίνονται $2N$ τό πλήθος μετρήσεις f_i για ίσαπέχοντα σημεία x_i . Αν τό όλικό διάστημα στόν άξονα x είναι L ή τετμημένη x_i δίνεται από τη σχέση,

$$x_i = \frac{L \cdot i}{2N} \quad i = 0, \dots, 2N-1 \quad (2.58)$$

Η άρμονική συνιστώσα μέγιστης συχνότητας που μπορεί να εμφανιστή στην ανάλυση σε σειρές Fourier έχει μήκος κύματος $2\Delta x = 2L/(2N-1)$ (τό ελάχιστο δυνατό).

Η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται κατά προσέγγιση

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} (A_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi k x}{L}\right) + \frac{A_N}{2} \cos\left(\frac{2\pi N x}{L}\right) \quad (2.59)$$

Οι συντελεστές $A_0 \dots A_N, B_1 \dots B_{N-1}$ υπολογίζονται με βάση την ορθογωνικότητα των συναρτήσεων \cos, \sin υπό αριθμητική έννοια,

$$\sum_{p=0}^{2N-1} \cos\left(\frac{2\pi k L p}{L 2N}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi m L p}{L 2N}\right) = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ N & k=m \neq 0, N \\ 2N & k=m=0, N \end{cases} \quad (2.60)$$

$$\sum_{p=0}^{2N-1} \sin\left(\frac{2\pi k L p}{L 2N}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi m L p}{L 2N}\right) = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ N & k=m \neq 0, N \\ 0 & k=m=0, N \end{cases} \quad (2.61)$$

$$\sum_{p=0}^{2N-1} \cos\left(\frac{2\pi k L p}{L 2N}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi m L p}{L 2N}\right) \equiv 0 \quad (2.62)$$

Για τά A_k, B_k βρίσκεται

Δ.2.6. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Σειρές Fourier

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7

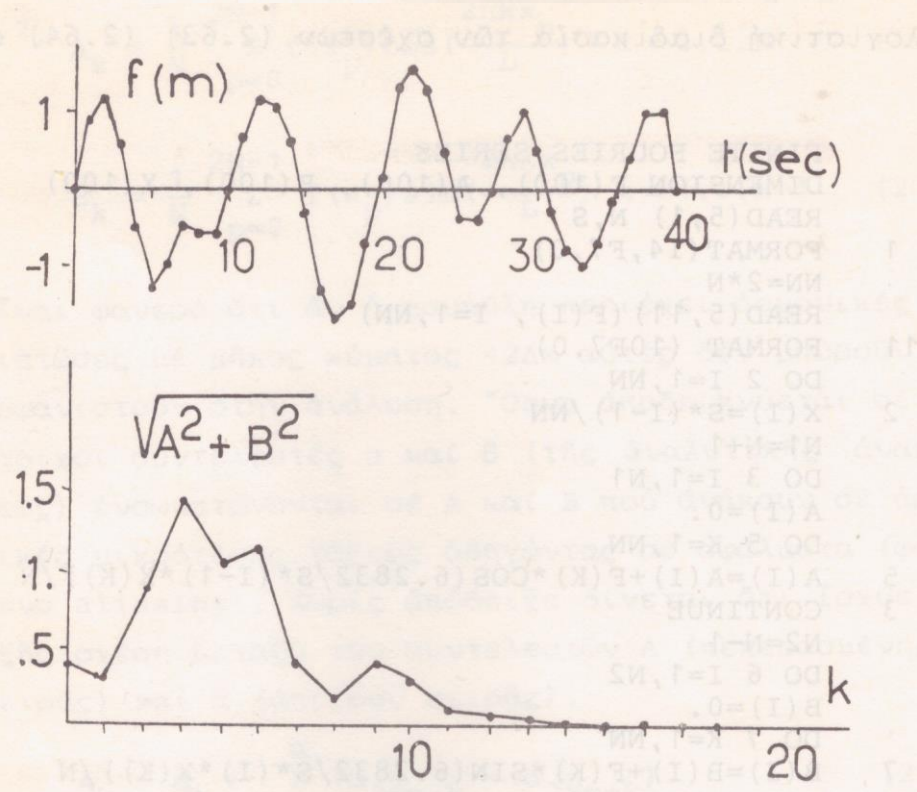
Σέ ένα σημείο της άκτης καταγράφηκαν ψηφιακά επί 39 sec με ρυθμό κάθε 1 sec οι τιμές ύψομέτρου στάθμης επιφανείας. Νά γίνει φασματική ανάλυση στο δείγμα των μετρήσεων

$f(m) = 0 \quad 1,7 \quad 2,3 \quad 1,3 \quad -1 \quad -2,5 \quad -2 \quad -1,1 \quad -1,2$
 $-1,3 \quad 0 \quad 1,5 \quad 2,4 \quad 2,4 \quad 1,2 \quad -0,6 \quad -2,5 \quad -3,5 \quad -3,1$
 $-1,6 \quad 0,5 \quad 2,6 \quad 3,3 \quad 2,5 \quad 1 \quad -0,7 \quad -0,8 \quad 0 \quad 1,5 \quad 2,0$
 $0,9 \quad -0,5 \quad -1,6 \quad -2 \quad -1,5 \quad -0,4 \quad 0,9 \quad 2,0 \quad 1,7 \quad 0.$

Γιά τόν ύπολογισμό τών A_k B_k προγραμματίζεται

ή ύπολογιστική διαδικασία τών σχέσεων (2.63) (2.64) ώς έξης:

```
C FINITE FOURIES SERIES
  DIMENSION F(100), A(100), B(100), X(100)
  READ(5,1) N,S
  1  FORMAT(I4,F7.0)
     NN=2*N
     READ(5,11) (F(I), I=1,NN)
  11  FORMAT(10F7.0)
     DO 2 I=1,NN
  2   X(I)=S*(I-1)/NN
     N1=N+1
     DO 3 I=1,N1
     A(I)=0.
     DO 5 K=1,NN
  5   A(I)=A(I)+F(K)*COS(6.2832/S*(I-1)*X(K))/N
  3   CONTINUE
     N2=N-1
     DO 6 I=1,N2
     B(I)=0.
     DO 7 K=1,NN
  7   B(I)=B(I)+F(K)*SIN(6.2832/S*(I)*X(K))/N
  6   CONTINUE
     WRITE(6,8) (A(I), I=1,N1)
     WRITE(6,8) (B(I), I=1,N2)
  8   FORMAT(10F10.4)
     STOP
     END
```



Στό σχήμα 2.4 δίνονται τό άρχικό σήμα καί τά διαγράμματα μεταβολής τών συντελεστών A , B όπως ύπολογίστηκαν από τά $N = 40$ σημεία στην χρονική έκταση $S = 39$ sec.

Κουτίτας ΧΓ (2005). Υπολογιστική Υδραυλική, Εκδ. Επίκεντρο, Σελ.: 199, ISBN:9789606645501

Κεφάλαιο 2

Κρεστενίτης Γ.Ν., Κομπιάδου Κ.Δ., Μακρής Χ.Β., Ανδρουλιδάκης Γ.Σ., Καραμπάς Θ.Β. (2015).

Παράκτια Μηχανική – Θαλάσσια Περιβαλλοντική Υδραυλική, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα, Κάλλιπος, Αθήνα. Link:

<https://repository.kallipos.gr/handle/11419/2789?locale=en>

Κεφάλαιο 8

Σούλης, Ι. (2015). Υπολογιστικές τεχνικές υδραυλικής μηχανικής. Kallipos, Open Academic Editions. <http://hdl.handle.net/11419/3997> Κεφάλαιο 1

Ύλη για επανάληψη

Αριθμητική Ανάλυση

Ρευστομηχανική

Υδραυλική

Διαφορικός Λογισμός

Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ πολύ για την προσοχή σας !!!