ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

# ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

## Θεωρία και Εφαρμογές για Πολιτικούς Μηχανικούς

Εξάμηνο: **4ο** Κωδικός: **ΤΜΒ111** Μάθημα: **Κορμού**

Διάλεξη **Δ.3. Υδροστατική**

Διδάσκων υπεύθυνος μαθήματος:

**Χρήστος Β. Μακρής**

**Επίκουρος Καθηγητής (επί θητεία) ΔΠΘ**

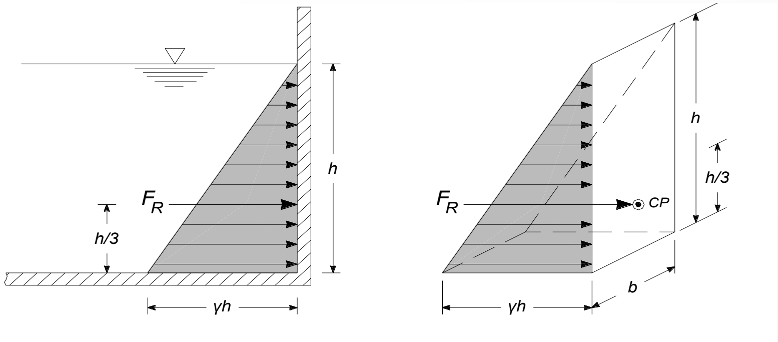
Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ — Ειδίκευση: Υδραυλική & Περιβαλλοντική Τεχνική
ΜΔΕ Τεχνολογία Υδατικών Πόρων ΕΜΠ — Ειδίκευση: Διαχείριση Παράκτιας Ζώνης
Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ — Ειδίκευση: Υπολογιστική Ρευστοδυναμική – Κυματομηχανική

Αίθουσα ΑΜΘ 3Β – Ισόγειο Κτιρίου Α' Πολ. Μηχ. ΔΠΘ - Ξάνθη, Φεβρουάριος 2025

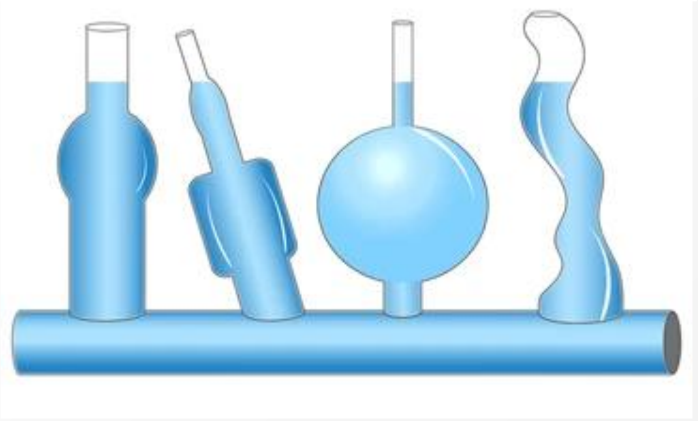
# Δ.3. Διάρθρωση Παρουσίασης



1. **Πίεση σε ένα σημείο**
2. **Βασική εξίσωση για πεδίο πίεσης**
3. **Μεταβολή πίεσης σε ακίνητο ρευστό**
   - Ασυμπίεστο ρευστό
   - Συμπιεστό ρευστό
4. **Ατμοσφαιρική πίεση**
5. **Μέτρηση πίεσης**
6. **Μανόμετρα**
   - Πιεζομετρικός σωλήνας
   - Μανόμετρο τύπου U
   - Κεκλιμένο μανόμετρο
7. **Μηχανικά και ηλεκτρονικά όργανα μέτρησης πίεσης**
8. **Υδροστατική δύναμη σε επίπεδη επιφάνεια**
9. **Πρίσμα πίεσης**
10. **Υδροστατική δύναμη σε καμπύλη επιφάνεια**
11. **Υδροστατική δύναμη σε στρωματωμένα ρευστά**




(a)    (b)



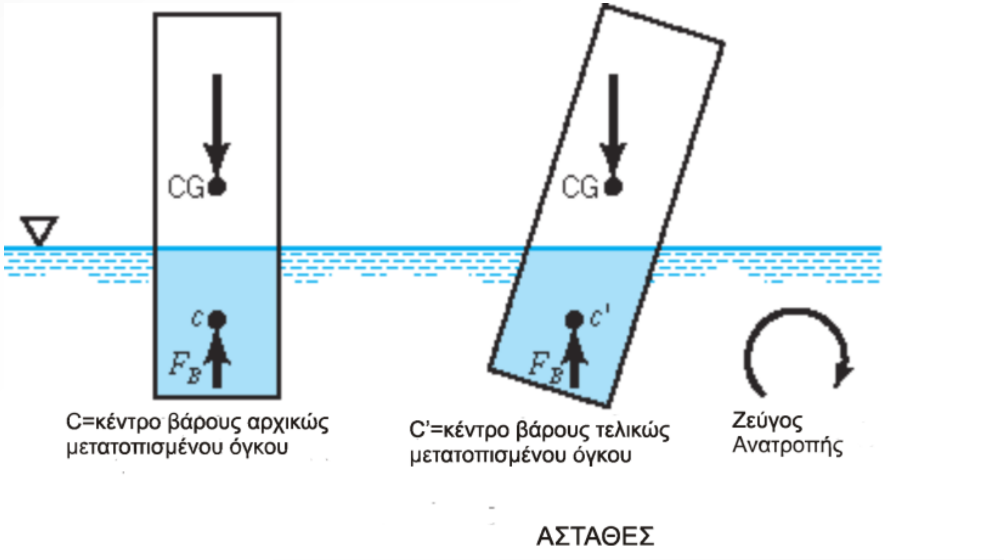
# Δ.3. Διάρθρωση Παρουσίασης

## 12. Άνωση – επίπλευση – ευστάθεια

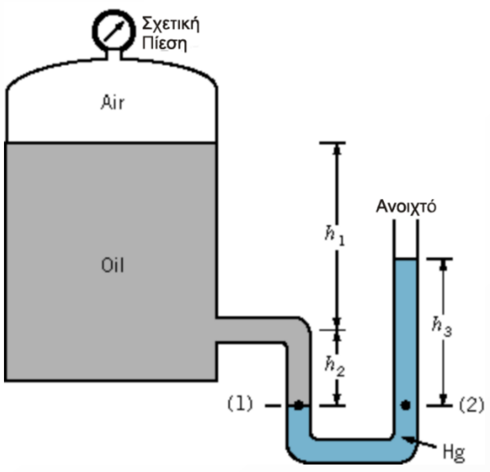
- Αρχή του Αρχιμήδη
- Ευστάθεια

## 13. Μεταβολή πίεσης σε ρευστό με κίνηση στερεού σώματος

- Γραμμική κίνηση
- Περιστροφή στερεού σώματος




## 12. Ασκήσεις

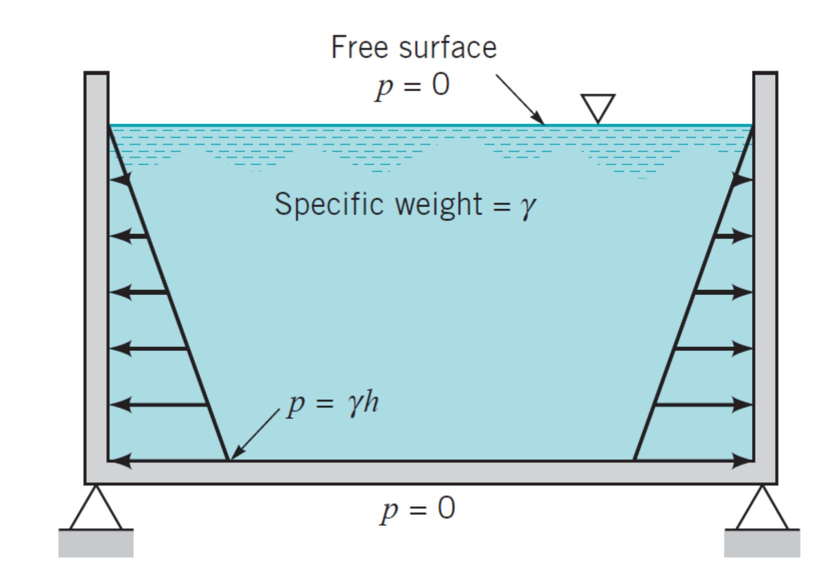



# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

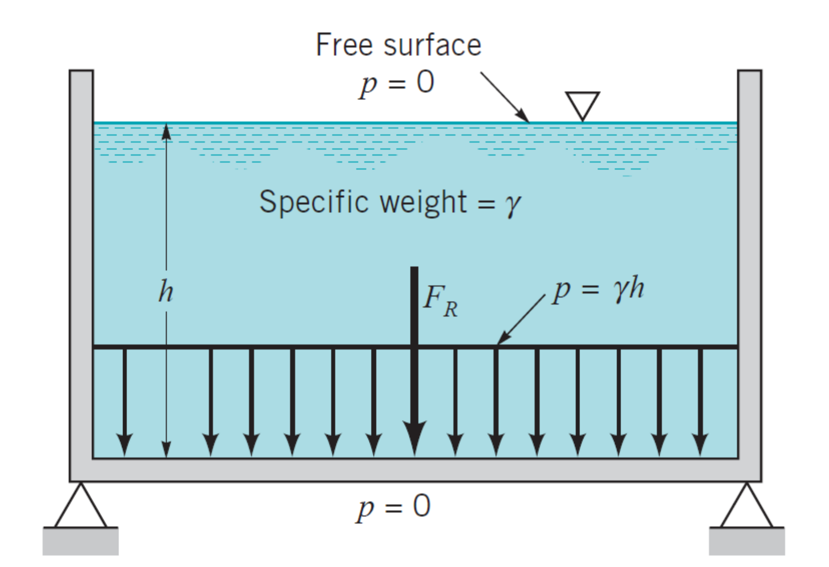
- ***Επιφάνεια βυθισμένη*** **ή** ***σε επαφή*** **σε (με) ένα** ***ακίνητο ρευστό*** **⇨** ***Ανάπτυξη υδροστατικής δύναμης*** **επάνω στην επιφάνεια από το ρευστό λόγω υδροστατικών πιέσεων**
- ***Ρευστό ακίνητο*****: Η δύναμη κάθετη στην επιφάνεια (ακίνητο ρευστό ⇨ όχι διατμητικές τάσεις)**

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

- ***Ασυμπίεστο ρευστό*** **(γ σταθερό) ⇨ *Γραμμική μεταβολή πίεσης με την κατακόρυφη απόσταση***




***Πίεση στα τοιχώματα δεξαμενής***



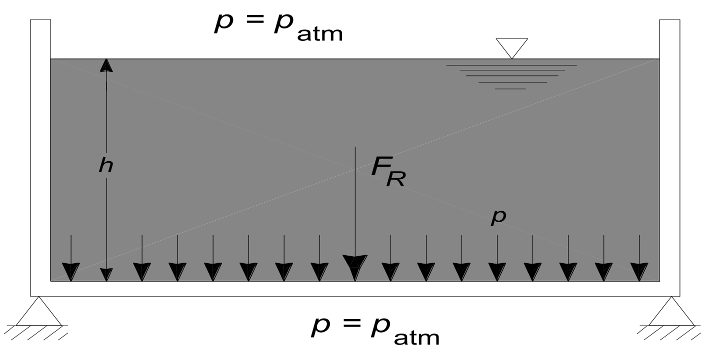

***Πίεση στον πυθμένα δεξαμενής***

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

**και συνεπώς:** $p = p(z) = \rho g z + p_{atm}$

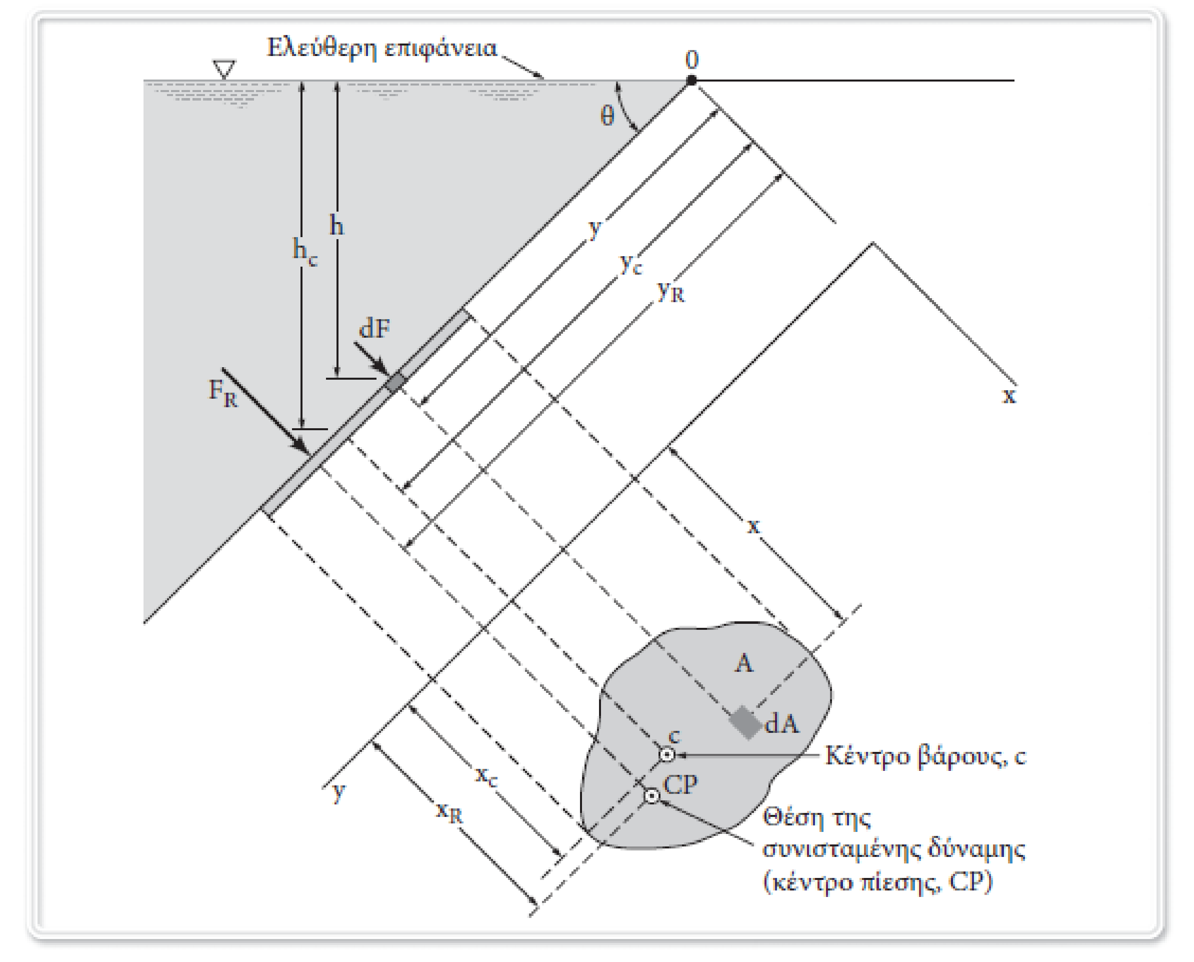
**Από την σχέση που συνδέει τον τανυστή τάσεων με τον τανυστή ταχυτήτων παραμόρφωσης, είναι φανερό ότι για υγρό σε ακινησία (μηδενισμός όλων των ταχυτήτων) , οι διατμητικές τάσεις μηδενίζονται, οπότε υπάρχουν μόνο ορθές τάσεις, οι οποίες ταυτίζονται με τις πιέσεις. Συνεπώς η πίεση p πρέπει να είναι κάθετη προς την επιφάνεια σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας που την περικλείει.**




**Για μια οριζόντια επιφάνεια, όπως ο πυθμένας δεξαμενής γεμάτης με κάποιο υγρό, το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης είναι απλά $F_R = pA$, όπου p είναι η ομοιόμορφη πίεση στον πυθμένα και Α είναι το εμβαδόν του πυθμένα. Για την ανοικτή δεξαμενή του σχήματος, $p = \rho g h$.**

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

- ***Υπολογισμός δύναμης*** **(μέγεθος, διεύθυνση, σημείο εφαρμογής) λόγω υδροστατικής πίεσης επάνω σε *επίπεδη επιφάνεια* (οποιαδήποτε κλίσης, οποιουδήποτε σχήματος)**




***$F_R$=???***

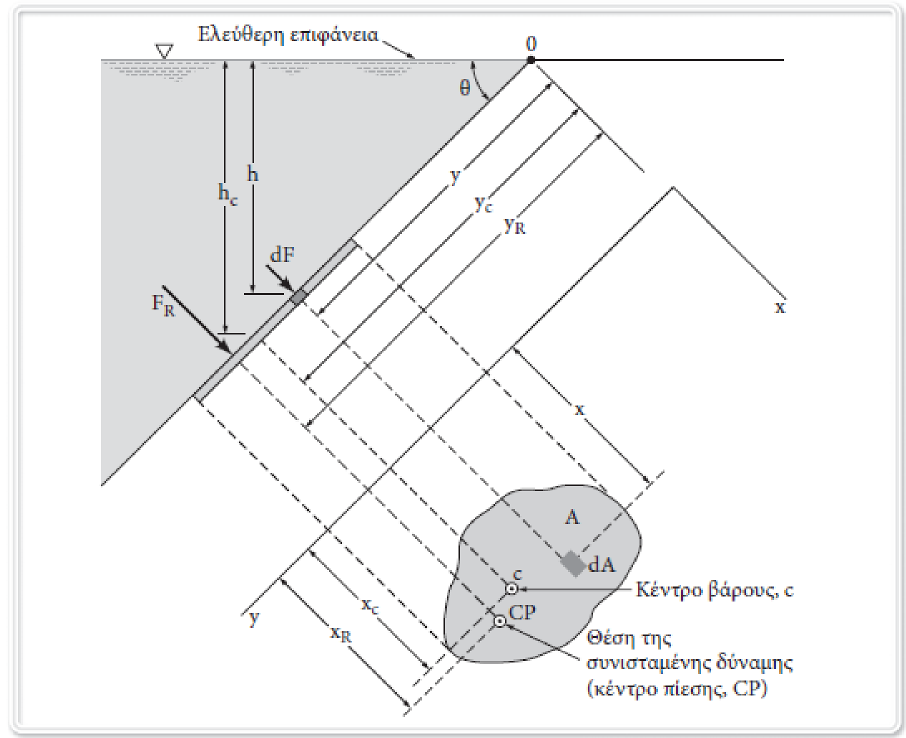
# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια



**Αφού η πίεση είναι σταθερή και ομοιόμορφα κατανεμημένη σ' όλο τον πυθμένα, η συνισταμένη δύναμη στον οριζόντιο πυθμένα ασκείται στο κέντρο βάρους του εμβαδού (όπως θα δούμε αυτό δεν ισχύει όταν η επιφάνεια είναι κεκλιμένη).**

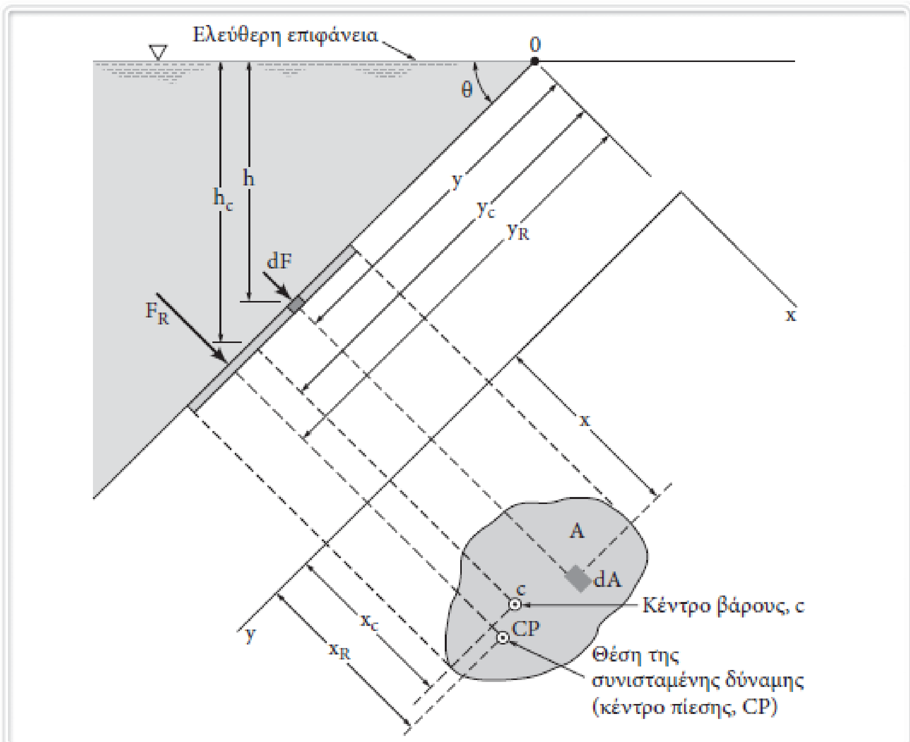
**Ας υποθέσουμε ότι το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται η επιφάνεια τέμνει την ελεύθερη επιφάνεια στο 0 και σχηματίζει γωνία θ μ' αυτήν όπως στο σχήμα.**

**Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη διεύθυνση, τη θέση και το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στην μία πλευρά αυτής της επιφάνειας εξαιτίας του υγρού που έρχεται σε επαφή με αυτή.**



# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

- Για ***δεδομένο h*** η δύναμη που ασκείται σε dA είναι **dF=γhdA**
- Η ***συνολική δύναμη*** $F_R$ που ασκείται ***στην επιφάνεια A*** είναι:




$$F_R = \int_A \gamma h dA = \int_A \gamma y \sin\theta dA = \gamma \sin\theta \int_A y dA \quad (1)$$

Το ολοκλήρωμα $B_x = \int_A y dA$

Πρώτη ροπή της επιφάνειας ως προς x .

Η συντεταγμένη του Κ.Β. C κατά y :

$$y_c = \frac{B_x}{A}$$

Επομένως :

$$\int_A y dA = y_c A$$

✓ **Μέγεθος $F_R$ ανεξάρτητο από θ**

Η (1) γράφεται : $F_R = \gamma A y_c \sin\theta \Rightarrow$

$$\boxed{F_R = \gamma A h_c}$$

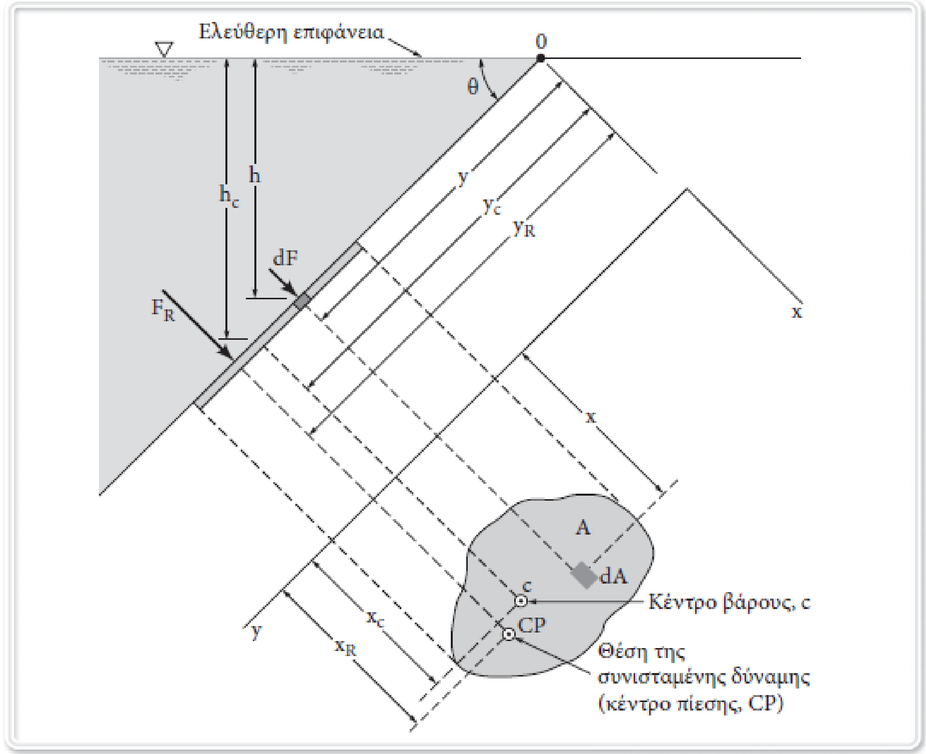
Εξάρτηση από γ, A hc. Το μέγεθος της συνολικής δύναμης ισούται με την υδροστατική πίεση που ασκείται στο κ.β. της επιφάνειας επί την επιφάνεια!!!

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

Άρα η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως:

$$F_R = \rho g\, A\, y_c \sin\theta \quad \text{ή}$$
$$F_R = \rho g\, h_c\, A$$

όπου $h_c$ είναι η κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια του ρευστού ως το κέντρο βάρους του εμβαδού.




**Παρατηρούμε, ότι το μέγεθος της συνισταμένης των πιέσεων δύναμης είναι ανεξάρτητο από τη γωνία θ και εξαρτάται μόνο από το ειδικό βάρος γ του ρευστού (γ = ρg), το συνολικό εμβαδόν και το βάθος του κέντρου βάρους του εμβαδού κάτω από την επιφάνεια.**

**Ουσιαστικά, η εξίσωση δείχνει ότι το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης είναι ίσο με την πίεση στο κέντρο βάρος του εμβαδού πολλαπλασιασμένη με το συνολικό εμβαδό.**

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια



## *Προσδιορισμός του σημείου εφαρμογής της $F_R$ (κέντρο πίεσης)*

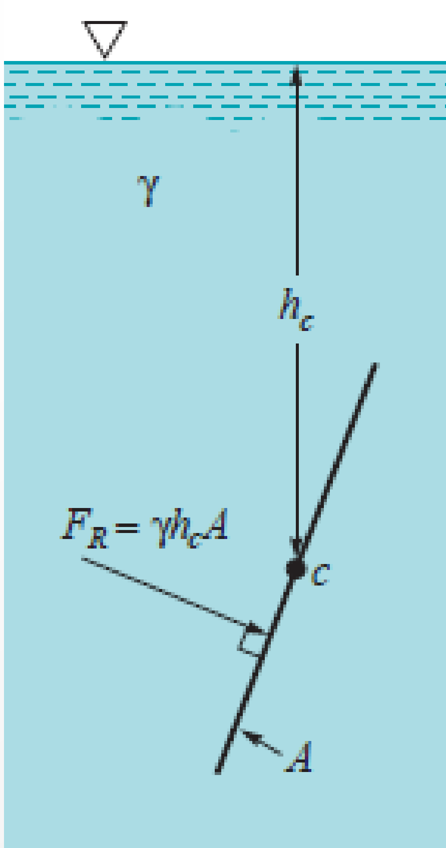
- Η *ροπή της συνισταμένης δύναμης* γύρω από ένα άξονα είναι ίση με το *άθροισμα των αντίστοιχων ροπών* των *επιμέρους δυνάμεων*
- Η *συντεταγμένη $y_R$* μπορεί να προσδιοριστεί από το *άθροισμα των επιμέρους ροπών* γύρω προς τον άξονα x.

$$F_R y_R = \sum_i y_i F_i = \int_A y\,dF = \int_A \gamma \sin\theta\; y^2 dA$$

- Όμως: $F_R=\gamma*h_c*A=\gamma*y_c*\sin\theta*A$. Επομένως:

$$y_R = \frac{\int_A y^2\, dA}{y_c\, A} = \frac{I_x}{y_c\, A}$$

Όπου $I_x$ δεύτερη ροπή επιφάνειας ως προς x



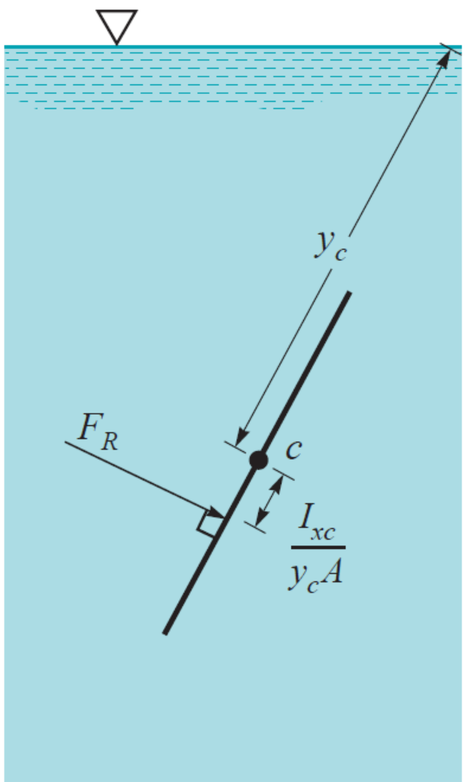
# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

## *Προσδιορισμός του σημείου εφαρμογής της $F_R$ (κέντρο πίεσης)*

- ***Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των παράλληλων αξόνων***

$$I_x = I_{xc} + A{y_c}^2$$

**Όπου $I_{xc}$: δεύτερη ροπή της επιφάνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο βάρους και είναι παράλληλος στον άξονα x**




- ***Τελικά* καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:**

$$\boxed{y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c}$$

ΓΙΑΤΙ χρησιμοποιούμε $I_{xc}$??? ΓΙΑΤΙ το $I_{xc}$ προσδιορίζεται εύκολα!!! Το ξέρουμε, μας δίνονται τύποι έτοιμοι!! Το $y_c$ ως προς σύστημα αξόνων x.

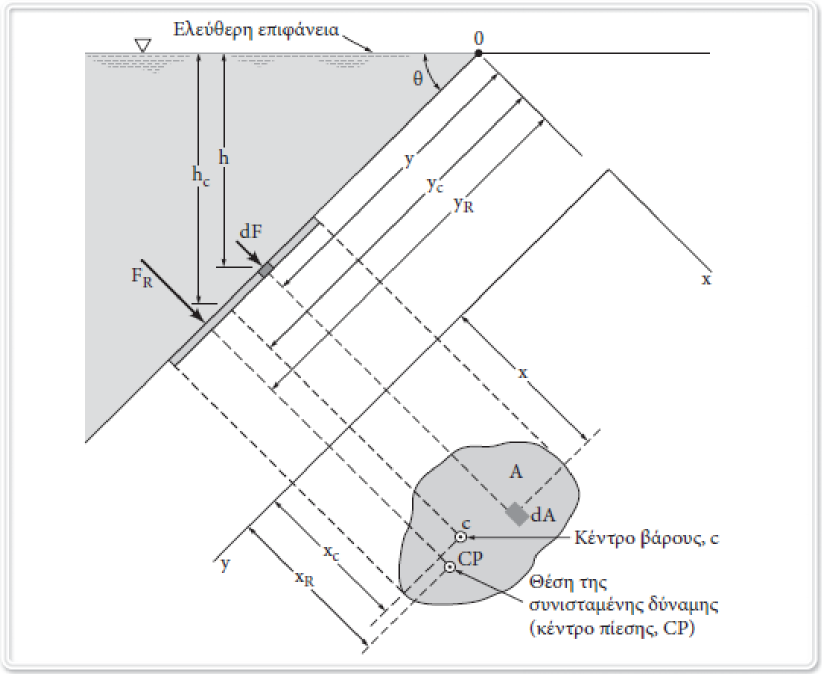
- ***Επειδή $I_{xc}/y_cA>0$* το σημείο πίεσης *ΠΙΟ ΚΑΤΩ* από κέντρο βάρους**

https://www.youtube.com/watch?v=0oHzBurIlpw

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια



Η **συντεταγμένη $x_R$,** για τη συνισταμένη δύναμη μπορεί να προσδιοριστεί κατά παρόμοιο τρόπο αθροίζοντας τις ροπές γύρω από τον άξονα y. Έτσι:




$$F_R x_R = \int_A \rho g \sin\theta \, xy \, dA$$

$$x_R = \frac{\int_A xy \, dA}{y_c A} = \frac{I_{xy}}{y_c A}$$

όπου $I_{xy}$ είναι το γινόμενο αδράνειας ως προς τους άξονες x και y. Πάλι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων μπορούμε να γράψουμε:

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c$$

όπου $I_{xyc}$ είναι το γινόμενο της αδράνειας ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που περνά από το κέντρο βάρους του εμβαδού και σχηματίζεται από μία παράλληλη μετατόπιση του συστήματος συντεταγμένων x, y.

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια



## *Προσδιορισμός του σημείου εφαρμογής της $F_R$ (κέντρο πίεσης)*

- **Η *συντεταγμένη $x_R$* μπορεί να προσδιοριστεί από το *άθροισμα των επιμέρους ροπών* γύρω προς τον άξονα y**

$$F_R\, x_R = \int_A \gamma \sin\theta\, y x\, dA$$

- **Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία η *συντεταγμένη $x_R$* προσδιορίζεται από την εξίσωση:**

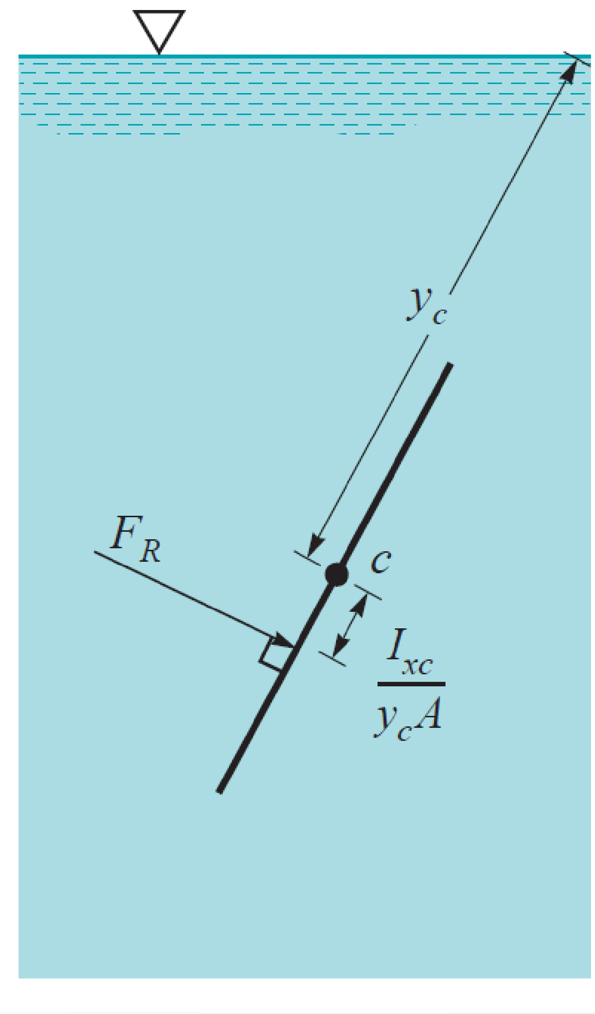
$$\boxed{x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c}$$

**Όπου $I_{xyc}$: γινόμενο αδράνειας ως προς ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που διέρχεται από το κέντρο βάρους (άξονες παράλληλοι με τους x και y)**

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

## *Προσδιορισμός του σημείου εφαρμογής της $F_R$ (κέντρο πίεσης)*

$$\boxed{y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c}$$




- ***Αύξηση $y_c$***: **Το κέντρο βάρους πλησιάζει το κέντρο πίεσης**
- ***Πώς μπορεί να αυξηθεί το $y_c$???***

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια



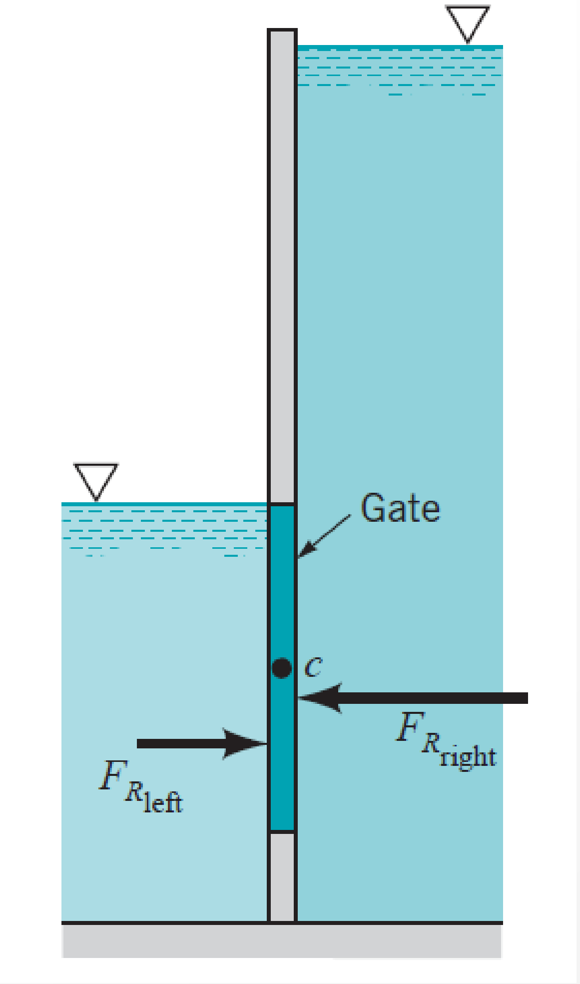
## *Προσδιορισμός του σημείου εφαρμογής της $F_R$ (κέντρο πίεσης)*

- ***Αύξηση $y_c$***: Το κέντρο βάρους πλησιάζει το κέντρο πίεσης
- Πώς μπορεί να αυξηθεί το $y_c$?

- $y_c = h_c / \sin\theta$

**Αύξηση $y_c$**

- *Αύξηση του βάθους βύθισης της επιφάνειας (αύξηση $h_c$)*
- *Μείωση γωνίας θ για δεδομένο βάθος βύθισης (μείωση sinθ)*



# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

**Εάν το βυθισμένο εμβαδόν είναι συμμετρικό ως προς ένα άξονα που περνά από το κέντρο βάρους και παράλληλο με έναν από τους άξονες x ή y, η συνιστάμενη δύναμη πρέπει να βρίσκεται κατά μήκος της γραμμής $x=x_c$, αφού το $I_{xyc}$ είναι μηδέν σ' αυτή την περίπτωση.**

**Το σημείο στο οποίο εφαρμόζεται η συνισταμένη δύναμη ονομάζεται κέντρο πίεσης.**

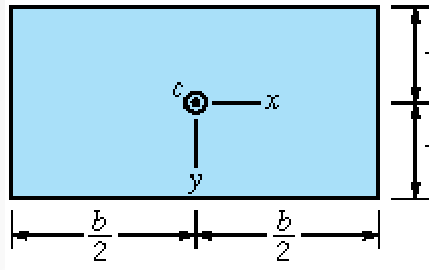
**Πρέπει να σημειωθεί από τις εξισώσεις**

$$y_R = \frac{l_{xc}}{y_c A} + y_c \qquad\qquad x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c$$

**ότι καθώς το $y_c$ αυξάνει, το κέντρο πίεσης μετατοπίζεται πιο κοντά στο κέντρο βάρους του εμβαδού.**
**Αφού $y_c = h_c / \sin\theta$, η απόσταση $y_c$ αυξάνεται εάν το βάθος της βύθισης, $h_c$, αυξάνεται ή αν για ένα δεδομένο βάθος, η επιφάνεια περιστρέφεται έτσι ώστε η γωνία θ να μειώνεται.**

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια





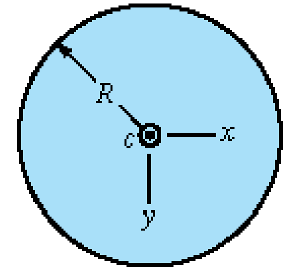

$A = ba$

$I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$

$I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$

$I_{xyc} = 0$

(a)

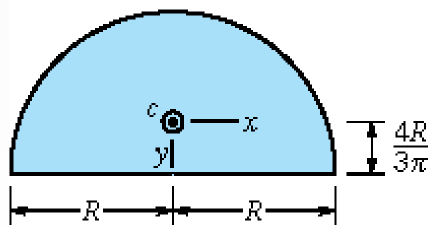



$A = \pi R^2$

$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$

$I_{xyc} = 0$

(b)



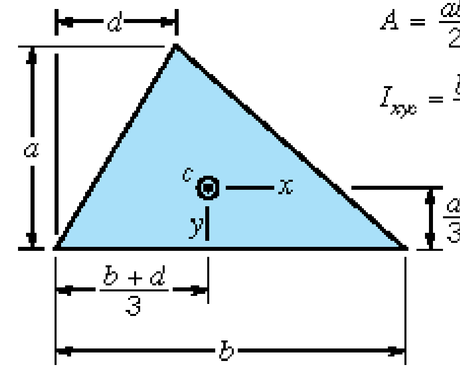

$A = \frac{\pi R^2}{2}$

$I_{xc} = 0.1098 R^4$

$I_{yc} = 0.3927 R^4$

$I_{xyc} = 0$

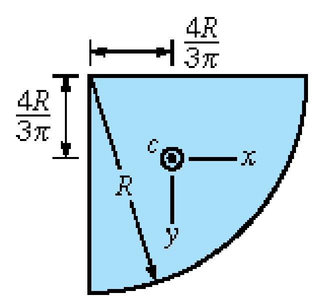
(c)




$A = \frac{ab}{2}$ $\quad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$

$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$

(d)




$A = \frac{\pi R^2}{4}$

$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488 R^4$

$I_{xyc} = -0.01647 R^4$

(e)

***Γεωμετρικές ιδιότητες χαρακτηριστικών επιφανειών***

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια



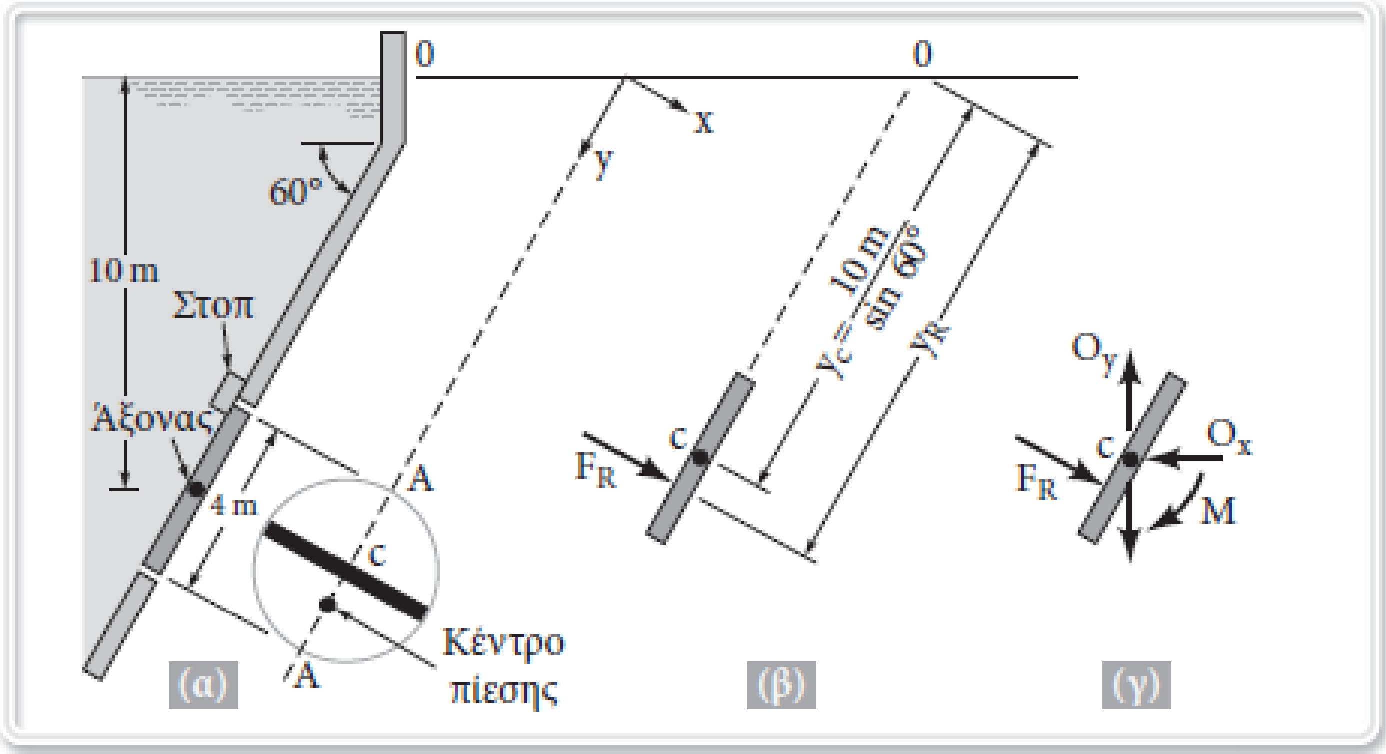
**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.6 σελ. 71 – Δύναμη σε επίπεδη επιφάνεια**

Μία θυρίδα διαμέτρου 4 m είναι τοποθετημένη στο τοίχωμα της δεξαμενής του σχήματος που περιέχει νερό.

Η θυρίδα περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα. Για βάθος 10 m πάνω από τον άξονα να υπολογισθεί

(α) το μέγεθος και το σημείο εφαρμογής της δύναμης που ασκεί το νερό στην θυρίδα

(β) η ροπή που θα πρέπει να εφαρμοσθεί στον άξονα για το άνοιγμα της θυρίδας

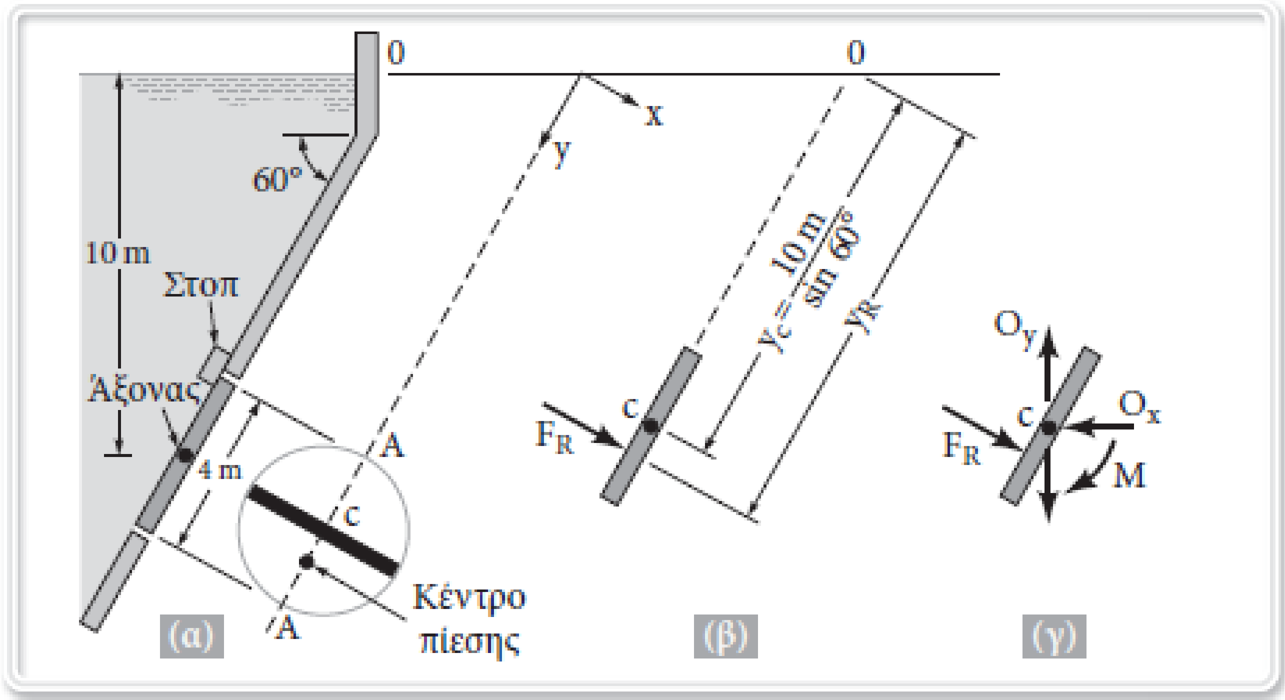


# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια



**_Λύση_**

**(α)** Το ***μέγεθος της δύναμης*** υπολογίζεται από την σχέση:




$$F_R = \gamma * h_c * A = (\rho g) * h_c * (\pi R^2) =$$

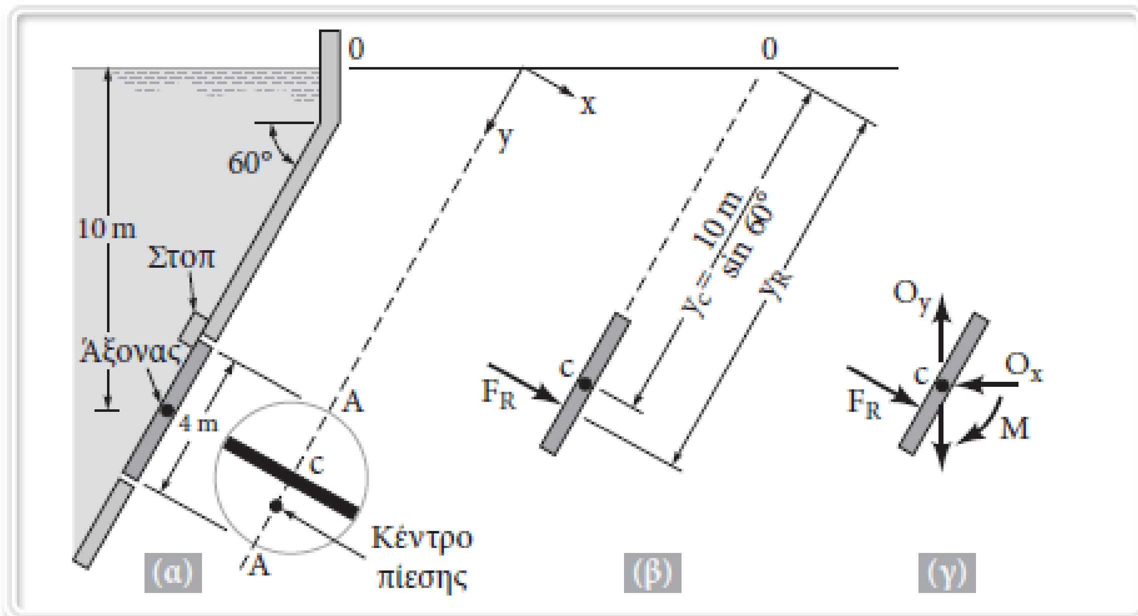
$$9.81 * 1000 * 10 * 4\pi \Rightarrow$$

$$F_R = 1230 * 10^3\ N = 1.23\ MN$$

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

## *Λύση*

**(α)**




**Για το *κέντρο πίεσης* χρησιμοποιούνται οι σχέσεις:**

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c, \qquad y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c$$

Και ο άξονας συμμετρίας παράλληλος ως προς χ και y

Αφού η επιφάνεια είναι συμμετρική (ως προς y και ως προς x) $x_R = x_c$. Για το δεδομένο σύστημα συντεταγμένων ***$x_c = x_R = 0$***

# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

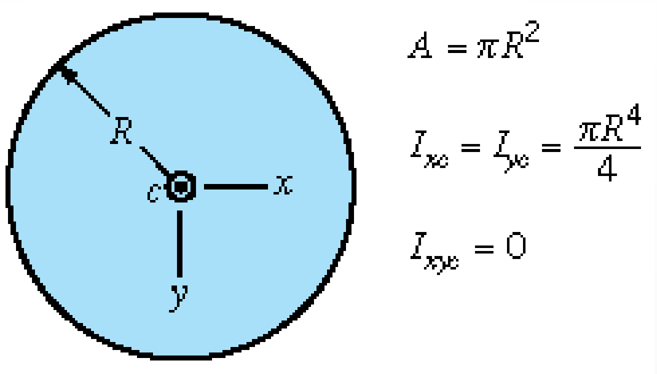


## *Λύση*

$$I_{xc} = \frac{\pi R^4}{4} \text{ και επομένως}$$

$$y_R = \frac{(\pi/4)2^4}{(10/\sin 60^o)(2^2\pi)} + \frac{10}{\sin 60^o} \Rightarrow$$

$$y_R = 0.0866 + 11.55 = 11.6 \text{ m}$$



# Δ.3.8. Υδροστατική F – επίπεδη επιφάνεια

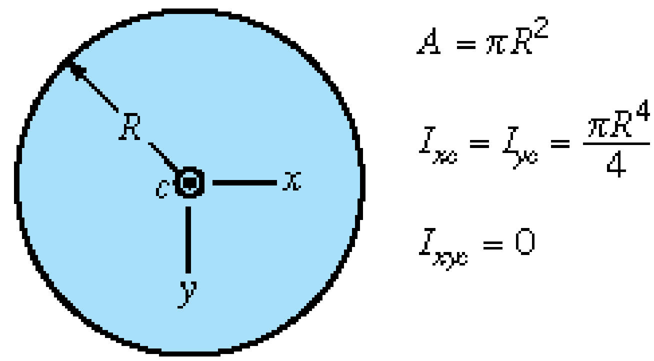


***Λύση***

$$I_{xc} = \frac{\pi R^4}{4} \text{ και επομένως}$$

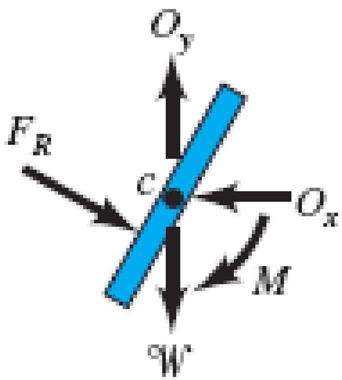
$$y_R = \frac{(\pi/4)2^4}{(10/\sin 60^o)(4\pi)} + \frac{10}{\sin 60^o} \Rightarrow$$

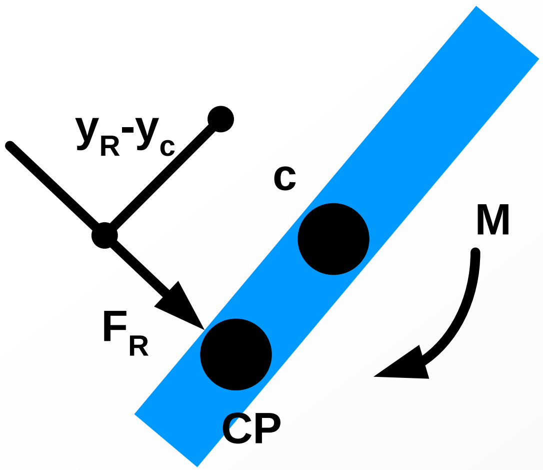
$$y_R = 0.0866 + 11.55 = 11.6 \text{ m}$$




## (β) Από *διάγραμμα ελεύθερου σώματος*:

Oy and Ox αντιδράσεις από τον άξονα επάνω στη θυρίδα.
Ο άξονας ασκεί δυνάμεις και οι αντιδράσεις τους είναι οι Oy και Ox




$$\sum M_c = 0 \text{ και επομένως}$$

$$M = F_R(y_R - y_c) =$$

$$1230 * 10^3 * 0.0866 \Rightarrow$$

$$M = 1.07 * 10^5 \text{Nm}$$

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης

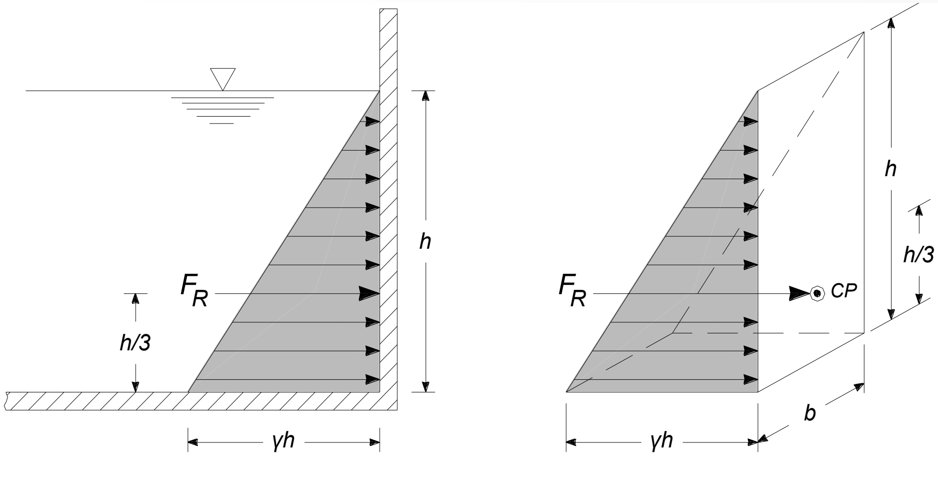


**Μια χρήσιμη γραφική απεικόνιση της υδροστατικής κατανομής των πιέσεων και υπολογισμού των δυνάμεων μπορεί να γίνει με το λεγόμενο πρίσμα των πιέσεων.**

**Θεωρείστε την κατανομή πίεσης κατά μήκος ενός κατακόρυφου τοιχώματος μιας δεξαμενής πλάτους b, η οποία περιέχει ένα υγρό που έχει ειδικό βάρος γ (γ=ρg ). Αφού η πίεση μεταβάλλεται γραμμικά με το βάθος, μπορούμε να παραστήσουμε τη μεταβολή της πίεσης όπως φαίνεται στο σχήμα, όπου η πίεση είναι ίση με το μηδέν στην άνω επιφάνεια και ίση με γh στον πυθμένα.**

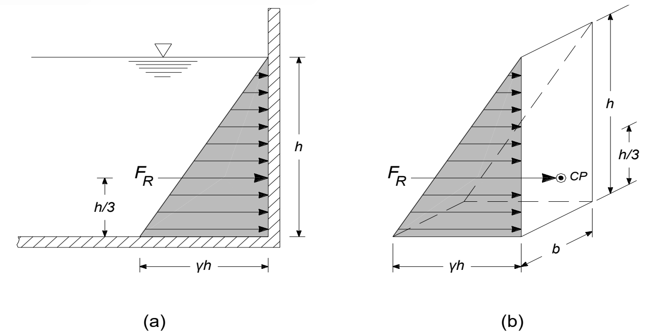
**Είναι φανερό από αυτό το διάγραμμα, ότι η μέση πίεση $p_{av}$ συναντάται σε βάθος h/2 και επομένως η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο ορθογώνιο τοίχωμα με εμβαδόν A = bh είναι:**

$$F_R = p_{av} A = \rho g(h/2)\, A$$




(a) (b)

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης




Αυτός ο "όγκος" ονομάζεται πρίσμα πίεσης και είναι ξεκάθαρο ότι το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης που ασκείται πάνω στην επιφάνεια του κατακόρυφου τοιχώματος ισούται με τον όγκο του πρίσματος πίεσης.

Επομένως για το πρίσμα του σχήματος η δύναμη που εξασκεί το ρευστό είναι:

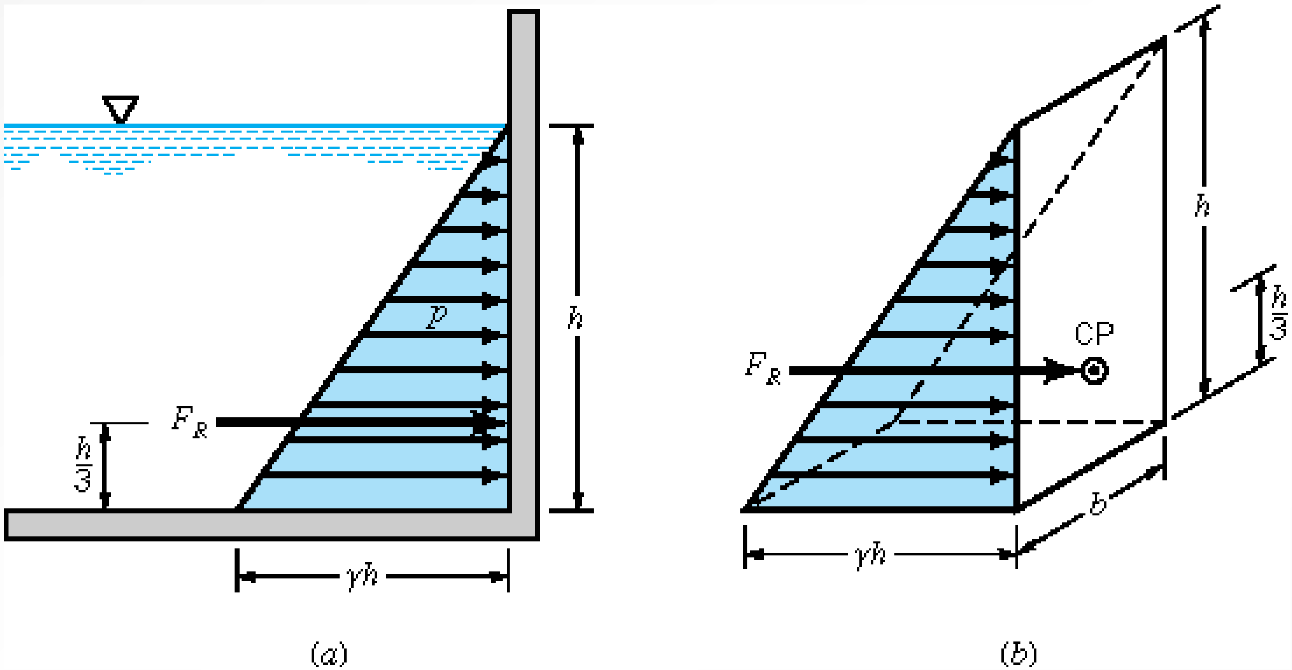
$$F_R = \text{όγκος} = (1/2)(\gamma h)(bh) = \gamma(h/2)A, \qquad \text{όπου } A = bh$$

Η συνισταμένη δύναμη πρέπει να περνάει από το κέντρο βάρους του πρίσματος πίεσης. Για τον υπό συζήτηση όγκο το κέντρο βάρους βρίσκεται κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα συμμετρίας της επιφάνειας και σε απόσταση h/3 πάνω από τη βάση (αφού το κέντρο βάρους ενός τριγώνου βρίσκεται σε απόσταση h/3 πάνω από τη βάση του).

Αυτό το αποτέλεσμα είναι σύμφωνο με αυτό που προκύπτει από τις εξισώσεις.

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης

- ***Πρίσμα Πίεσης***: **Χρήσιμη γραφική απεικόνιση κατανομής πίεσης στην περίπτωση που ένα ακίνητο ρευστό βρίσκεται σε επαφή με (ασκεί πίεση σε) *ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΕΠΙΠΕΔΗ επιφάνεια***




$F_R$ δύναμη ασκείται από ρευστό σε επίπεδη ορθογωνική ή τετραγωνική επιφάνεια -> γραφική απεικόνιση.
Γραμμική κατανομή πιέσεων (ασυμπίεστο ρευστό) **p=γy** στα τοιχώματα (min στην επιφάνεια ίση με 0 και max στον πυθμένα ίση με γh)
hc: κατακόρυφη απόσταση Κ.Β. διατομής. Εδώ διατομή ορθογωνική και κατακόρυφος άξονας ταυτίζεται με y (θ=90°)

$$F_R = \gamma h_c A = \gamma \frac{h}{2} A$$

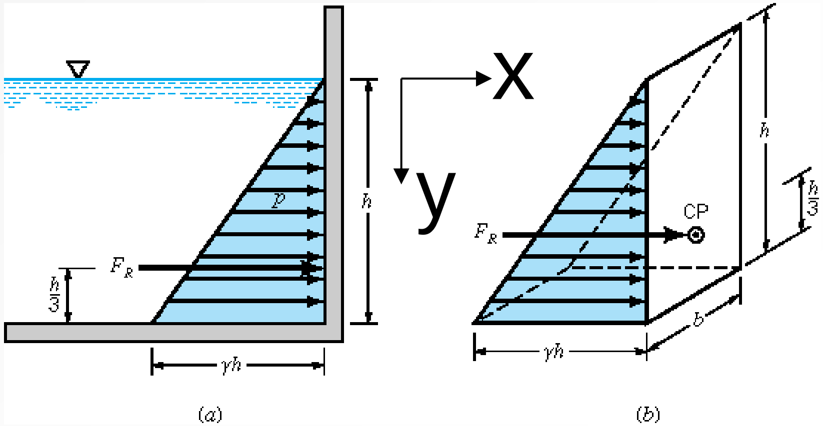
$$V_{prism} = \left(\frac{1}{2}(\gamma * h) * h\right) * b = \gamma \frac{h}{2}(bh) = \gamma \frac{h}{2} A$$

$$\boxed{F_R = V_{prism}}$$

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης



## *Σημείο εφαρμογής της $F_R$ (κέντρο πίεσης)*




$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c$$

$$I_{xc} = \frac{1}{12} b h^3$$

***Ορθογωνική διατομή***

$$\boxed{y_R = \frac{2}{3} h}$$

***Από την επιφάνεια (ή 1/3 από πυθμένα) (κέντρο βάρους τριγώνου)***

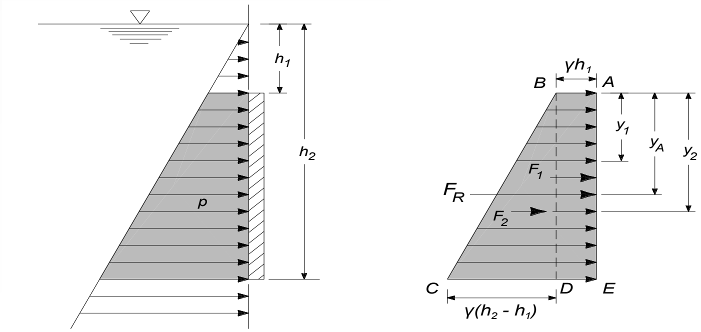
Κρατάμε: Η συνολική δύναμη ίση με τον όγκο του πρίσματος και περνάει από το κέντρο βάρους του πρίσματος!!!

$$\boxed{x_R = x_c}$$

***$I_{xyc}$=0 (συμμετρική διατομή)***

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης






Αυτή η ίδια γραφική προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για επίπεδες επιφάνειες οι οποίες δεν εκτείνονται μέχρι την επιφάνεια του ρευστού.

Σ' αυτή την περίπτωση, η διατομή του πρίσματος πίεσης είναι τραπεζοειδής. Παρόλα αυτά, η συνισταμένη δύναμη εξακολουθεί να είναι ίση σε μέγεθος με τον όγκο του πρίσματος πίεσης και περνάει από το κέντρο βάρους του όγκου. Χωρίζοντας το πρίσμα σε δύο μέρη ABDE και BCD όπως φαίνεται στο σχήμα, έχουμε :

$$F_R = F_1 + F_2$$

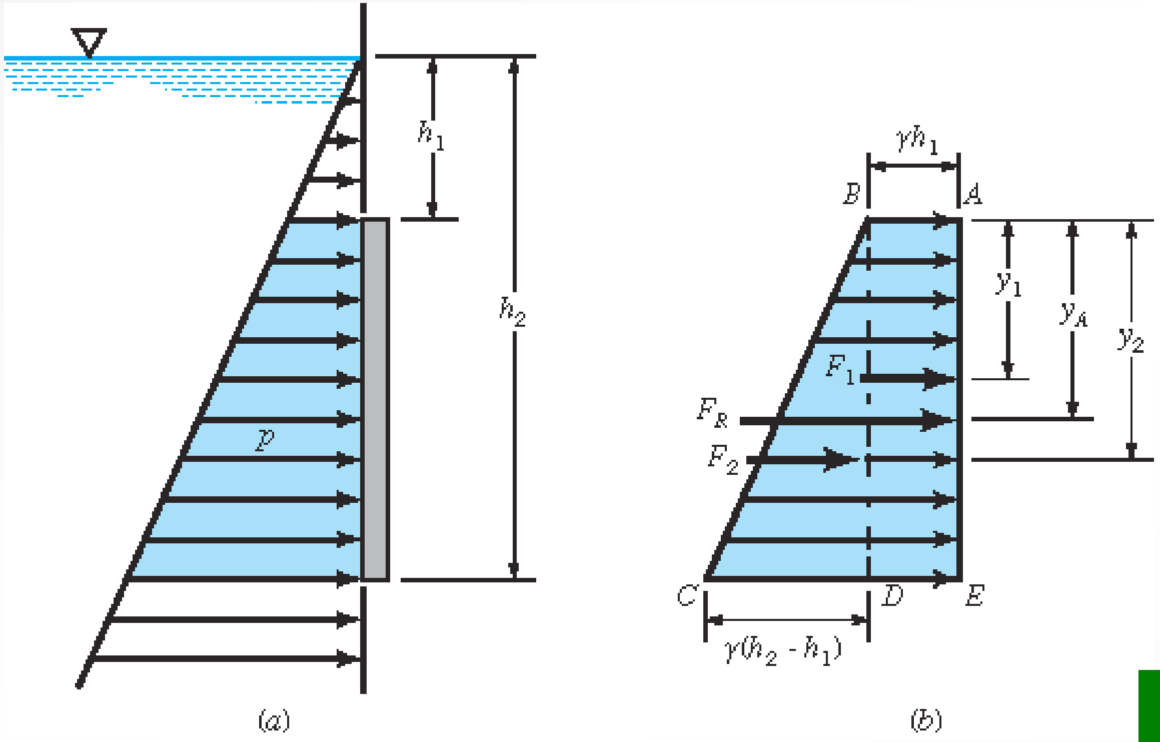
όπου οι συνιστώσες $F_1$ και $F_2$ μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν γεωμετρικά. Η θέση της $F_R$ μπορεί να προσδιοριστεί αθροίζοντας τις ροπές γύρω από κάποιο κατάλληλο άξονα όπως αυτόν που περνά από το A. Σ' αυτή την περίπτωση:

$$F_R\ y_A = F_1\ y_1 + F_2\ y_2$$

και $y_1$ και $y_2$ μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν.

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης

- ***Πρίσμα Πίεσης***: **Και σε *ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΕΠΙΠΕΔΗ επιφάνεια* που *δεν εκτείνεται μέχρι ή επάνω από* την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού**




Πάλι: Η συνολική δύναμη ίση με τον όγκο του πρίσματος και περνάει από το κέντρο βάρους του πρίσματος!!!!

***Διατομή πρίσματος: Τραπεζοειδής (ΌΧΙ τριγωνική)***

***Εύρεση τιμής $F_R$:***

$$F_R = V_{o\lambda} \Rightarrow F_R = F_1 + F_2 = V_1 + V_2 \Rightarrow$$

$$F_R = \frac{1}{2}\gamma\left(h_2 - h_1\right)^2 b + \gamma h_1\left(h_2 - h_1\right)b$$

***Εύρεση $y_A$: Ροπές ως προς ένα σημείο (π.χ. Α)***

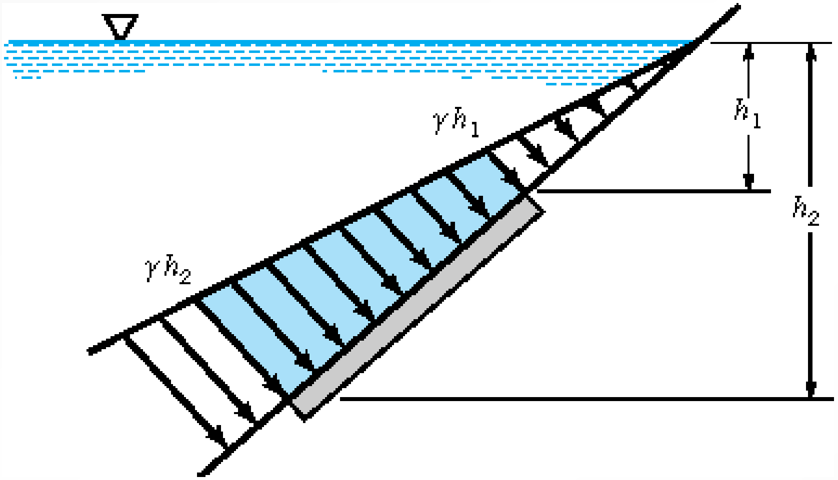
$$F_R y_A = F_1 y_1 + F_2 y_2 \Rightarrow$$

$$y_A = \ldots$$

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης



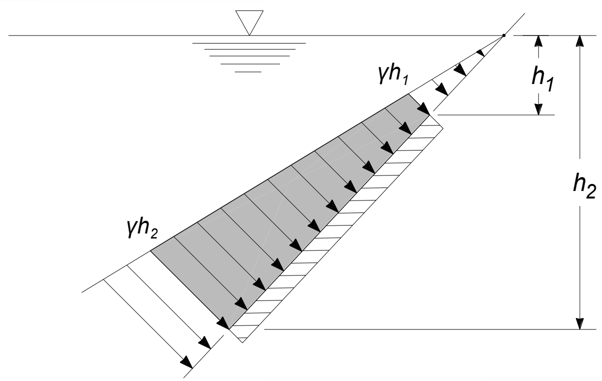
- ***Πρίσμα Πίεσης***: **Και σε *ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΕΠΙΠΕΔΗ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗ επιφάνεια***




***Διατομή πρίσματος: Τραπεζοειδής***

***Εξάρτηση από κατακόρυφες αποστάσεις***

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης




Για κεκλιμένες επίπεδες επιφάνειες το πρίσμα πίεσης μπορεί επίσης να σχεδιασθεί και η διατομή του πρίσματος θα είναι γενικά τραπεζοειδής.

Αν και συνήθως είναι βολικό να μετρούμε αποστάσεις κατά μήκος της κεκλιμένης επιφάνειας, οι πιέσεις που αναπτύσσονται εξαρτώνται από τις κατακόρυφες αποστάσεις h.

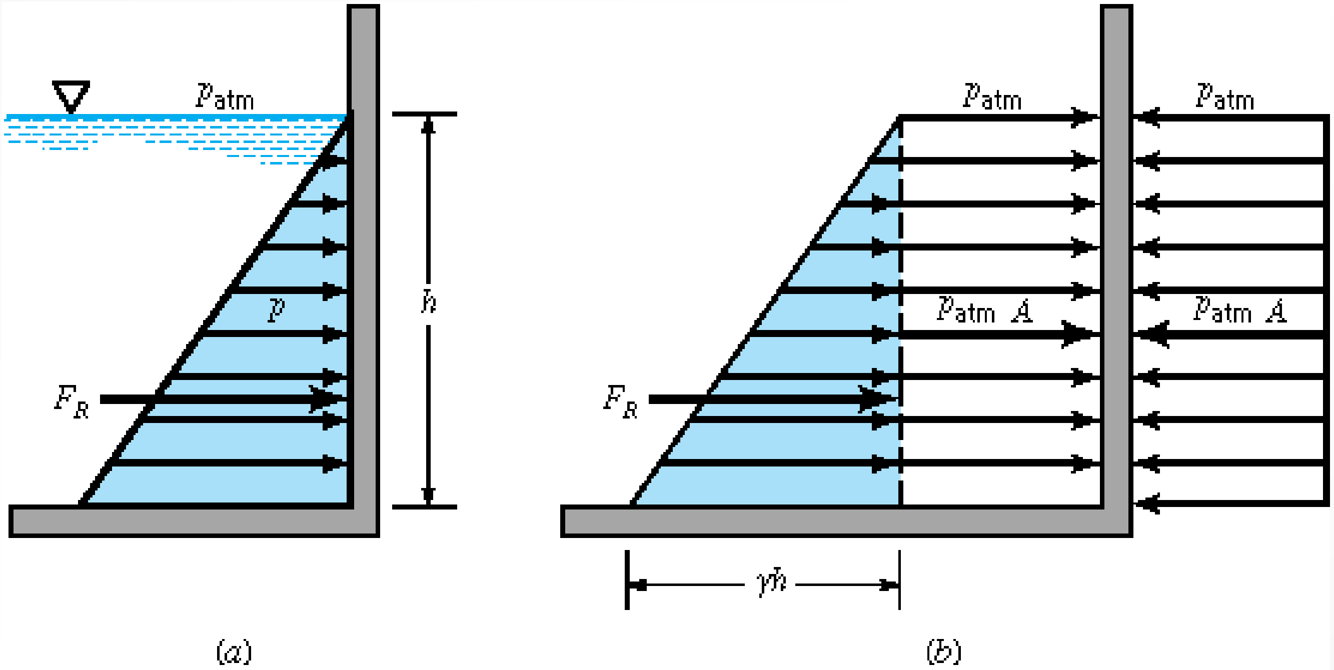
Η χρήση πρισμάτων πίεσης για τον προσδιορισμό της δύναμης σε βυθισμένα επίπεδα εμβαδά είναι βολική εάν το εμβαδόν είναι ορθογώνιο οπότε ο όγκος και το κέντρο βάρους μπορούν εύκολα να προσδιορισθούν.

Για άλλα μη ορθογώνια σχήματα, θα χρειαζόταν γενικώς ολοκλήρωση για να προσδιορισθεί ο όγκος και το κέντρο βάρους. Σ’ αυτές τις περιπτώσεις είναι πιο βολικό να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν, στις οποίες έχουν γίνει οι απαραίτητες ολοκληρώσεις και τα αποτελέσματα έχουν παρουσιαστεί με ένα εύχρηστο τύπο που μπορεί να εφαρμοστεί σε βυθισμένες επίπεδες επιφάνειες κάθε σχήματος.

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης



**Επίδραση Ατμοσφαιρικής Πίεσης**




***Η ατμοσφαιρική πίεση δεν επιδράει στον υπολογισμό της $F_R$ για την περίπτωση του σχήματος (ατμόσφαιρα στην εξωτερική κατακόρυφη πλευρά)***

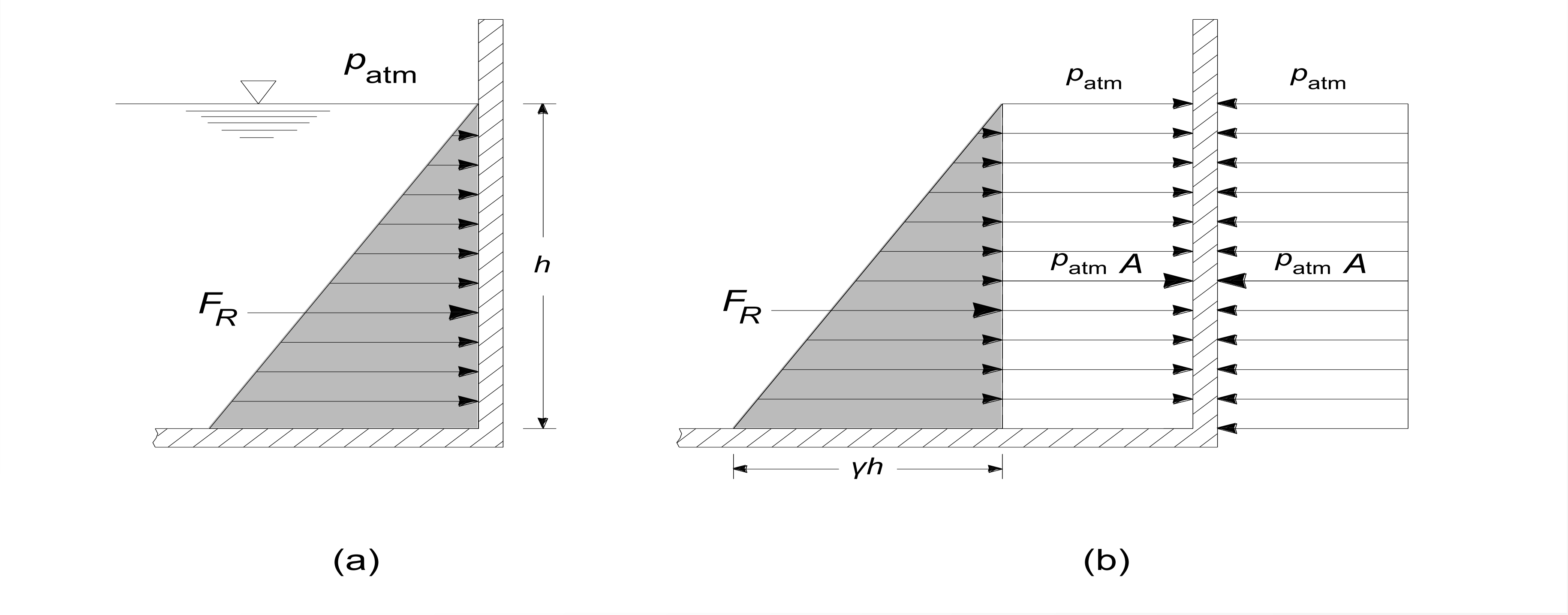
Εάν όμως το ρευστό έχει μία πίεση ps στην επιφάνεια (κλειστό δοχείο) θα πρέπει απλά στην πίεση να προσθέσουμε το ps. Στη δύναμη δηλαδή θα προστεθεί το Ps*A

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης

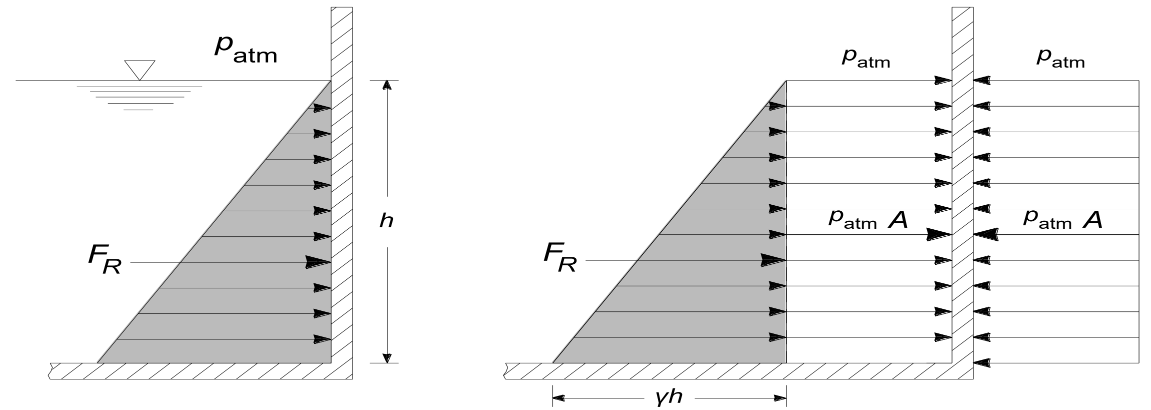


**Η επίδραση της ατμοσφαιρικής πίεσης δεν έχει ακόμη ληφθεί υπ' όψιν και τίθεται το ζήτημα πως αυτή η πίεση θα επηρεάσει τη συνισταμένη δύναμη.**

**Ας θεωρήσουμε ξανά την κατανομή πίεσης σε ένα επίπεδο κατακόρυφο τοίχωμα, όπου η πίεση μεταβάλλεται από μηδέν στην επιφάνεια έως γh στον πυθμένα. Αφού ορίζουμε την πίεση επιφανείας ίση με μηδέν, χρησιμοποιούμε την ατμοσφαιρική πίεση σαν αφετηρία και έτσι η πίεση που χρησιμοποιείται είναι σχετική πίεση.**



# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης

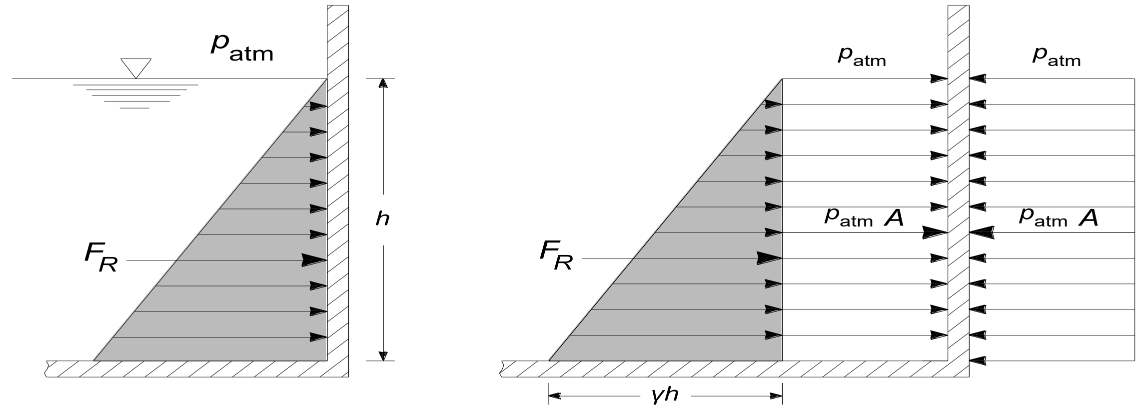



(a) (b)

**Εάν θέλουμε να συμπεριλάβουμε την ατμοσφαιρική πίεση, η κατανομή πίεσης θα είναι όπως στο σχήμα. Σημειώνουμε ότι σ' αυτή την περίπτωση η δύναμη στη μια πλευρά του τοιχώματος τώρα αποτελείται από την $F_R$ σαν αποτέλεσμα της κατανομής της υδροστατικής πίεσης συν τη συνεισφορά της ατμοσφαιρικής πίεσης $p_{atm}$ A, όπου A είναι το εμβαδόν της επιφάνειας.**

**Παρόλα αυτά, εάν πρόκειται να συμπεριλάβουμε την επίδραση της ατμοσφαιρικής πίεσης σε μια πλευρά του τοιχώματος πρέπει να αντιληφθούμε ότι αυτή η ίδια πίεση ασκείται στην εξωτερική επιφάνεια, έτσι ώστε μια ίση και αντίθετη δύναμη να αναπτύσσεται.**

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης




(a) (b)

**Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η συνισταμένη δύναμη του ρευστού πάνω στην επιφάνεια είναι αυτή που οφείλεται μόνο στη συνεισφορά της υδροστατικής πίεσης του υγρού που έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια του τοιχώματος. Η ατμοσφαιρική πίεση δεν συνεισφέρει σ' αυτή τη συνισταμένη.**

**Βεβαίως, εάν η πίεση επιφάνειας του υγρού είναι διαφορετική από την ατμοσφαιρική πίεση (όπως μπορεί να συμβεί σε μία αεροστεγώς κλειστή δεξαμενή), η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο τοίχωμα θα είναι διαφορετική σε μέγεθος από αυτή που προκαλείται απλώς από την υδροστατική πίεση κατά ποσό $p_s A$, όπου $p_s$ είναι η σχετική πίεση στην επιφάνεια του υγρού (η εξωτερική επιφάνεια θεωρείται ότι είναι εκτεθειμένη στην ατμοσφαιρική πίεση) και A το εμβαδόν της επιφάνειας.**

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης - ΑΣΚΗΣΗ



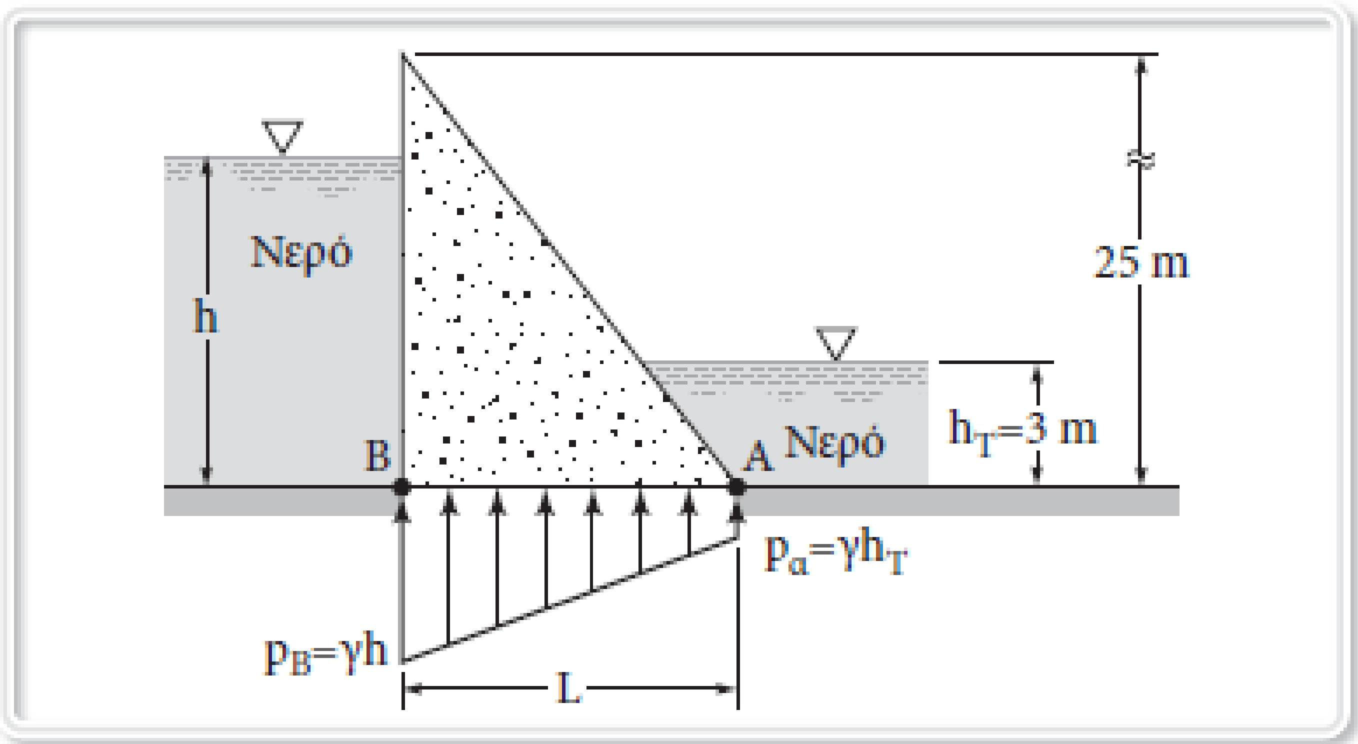
**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.8 σελ. 77-79**

Ανάντη ενός τσιμεντένιου φράγματος (ειδικό βάρος 23565 N/m$^3$) πλάτους l = 15 m το ύψος του νερού είναι h .

Μια διαρροή στη βάση του φράγματος έχει σαν αποτέλεσμα να αναπτυχθεί μια πίεση κάτω από το φράγμα με κατανομή που φαίνεται στο σχήμα.

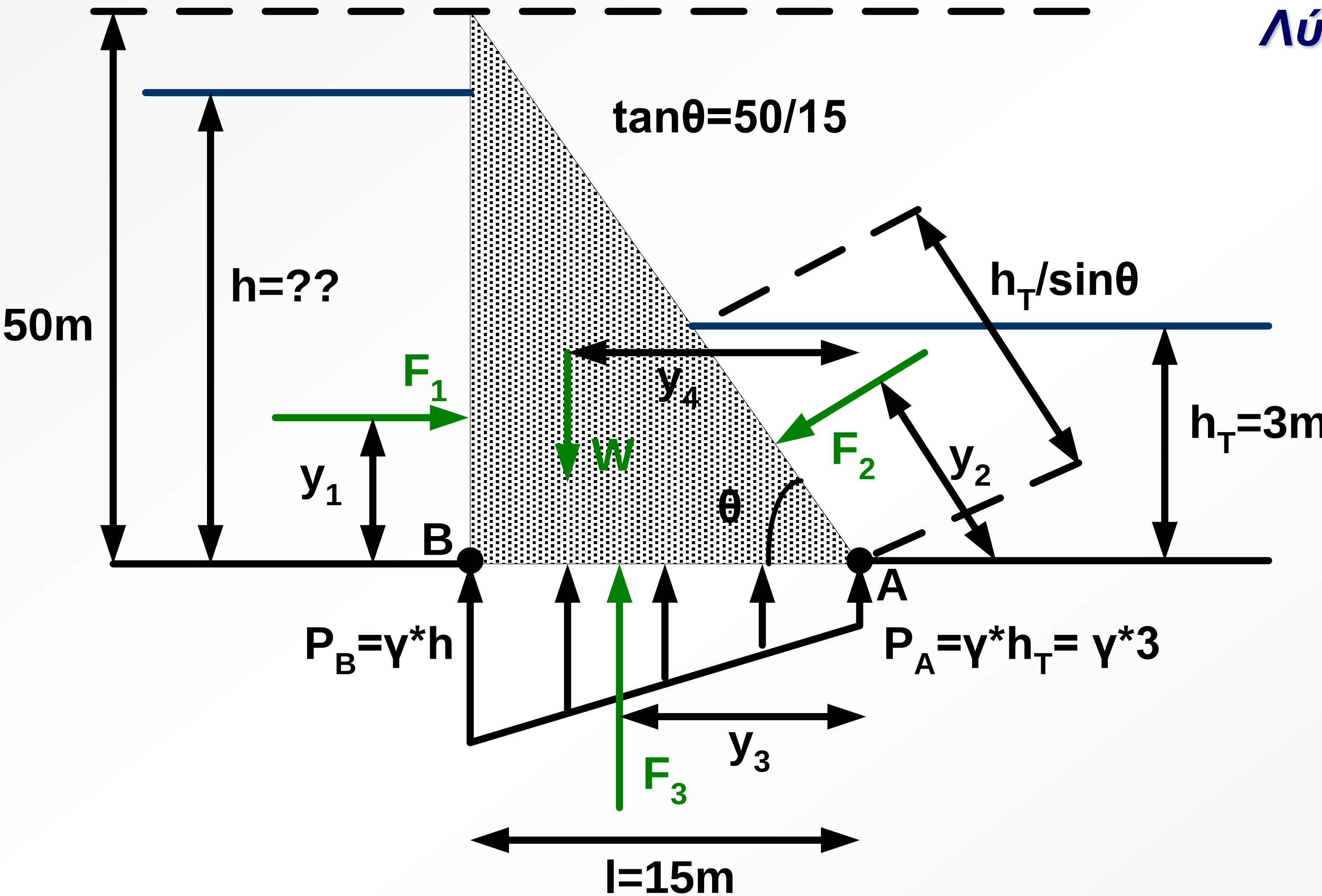
Υπολογίστε το μέγιστο επιτρεπόμενο ύψος h έτσι ώστε να μην ανατραπεί το φράγμα ως προς το σημείο Α.

Το μήκος του φράγματος (κάθετα στο χαρτί) θεωρείται μοναδιαίο.



# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης - ΑΣΚΗΣΗ

*Λύση*




**Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο φράγμα καθώς και οι αποστάσεις τους (που μας ενδιαφέρουν για τον υπολογισμό των ροπών) από το Α**

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης - ΑΣΚΗΣΗ

*Λύση*

## Υπολογισμός δυνάμεων

Για μοναδιαίο μήκος :

$$F_1 = \frac{\gamma h^2}{2}$$

$$F_2 = \gamma\left(\frac{h_T}{2}\right)\left(\frac{h_T}{\sin\theta} * 1\right) = \frac{\gamma h_T^{\ 2}}{2\sin\theta}$$

$$W = \gamma_{\varphi\rho}\left(\frac{1}{2}\right)(l)(50) = 25\gamma_{\varphi\rho} l$$

$$F_3 = \left(\frac{\gamma h + \gamma h_T}{2}\right) l$$

## Υπολογισμός σημείων εφαρμογής ($F_1$, $F_2$ και W)

$$F_1 : y_1 = \frac{h}{3}$$

$$F_2 : \ y_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{h_T}{\sin\theta}\right)$$

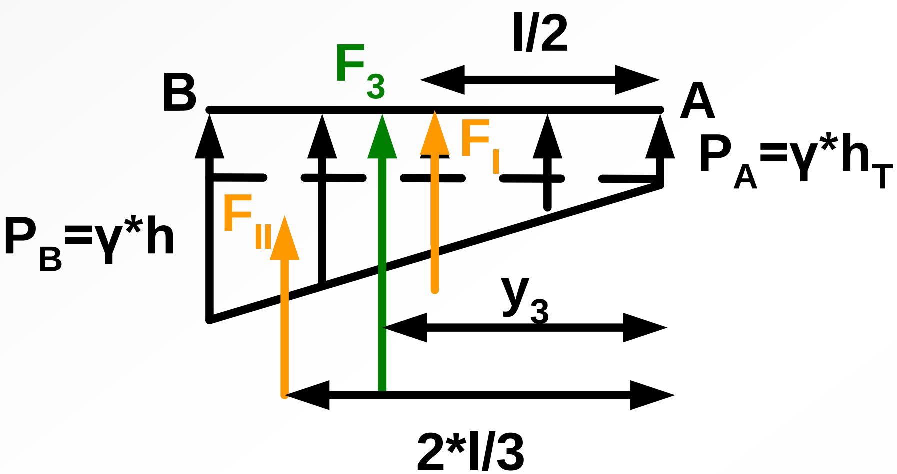
$$W : y_4 = \frac{2l}{3}$$

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης - ΑΣΚΗΣΗ

## *Λύση*

### Υπολογισμός σημείου εφαρμογής ($F_3$)

**Για τον προσδιορισμό του $y_3$ εξετάζουμε την κατανομή πίεσης στη βάση του φράγματος και από ροπές ως προς το Α παίρνουμε:**




$$F_3 y_3 = F_I\left(\frac{\ell}{2}\right) + F_{II}\left(\frac{2}{3}\ell\right) \quad \Rightarrow$$

$$y_3 = \frac{F_I\left(\frac{\ell}{2}\right) + F_{II}\left(\frac{2}{3}\ell\right)}{F_3}$$

$F_I = \gamma \cdot h_T \cdot L$ (όγκος ορθογωνίου)

$F_{II} = (\gamma/2) \cdot (h - h_T) \cdot L$ (όγκος τριγώνου)

**όπου $F_3$=$F_I$+$F_{II}$. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις για τα $F_I$ και $F_{II}$ παίρνουμε:**

$$y_3 = \frac{\ell\left(\frac{h_T}{3} + \frac{2}{3}h\right)}{h + h_T}$$

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης - ΑΣΚΗΣΗ



**Λύση**

**Υπολογισμός ροπών ως προς Α**

**Για την ισορροπία του φράγματος ως προς Α πρέπει:**

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow$$

$$F_1 y_1 - W y_4 - F_2 y_2 + F_3 y_3 = 0 \qquad (1)$$

$$F_1 y_1 = \frac{\gamma h^2}{2} * \frac{h}{3} = \frac{\gamma h^3}{6} \qquad W y_4 = 25\gamma_{\varphi\rho} l * \frac{2l}{3} = \frac{50}{3}\gamma_{\varphi\rho} l^2$$

$$F_2 y_2 = \frac{\gamma h_T{}^2}{2\sin\theta} * \frac{1}{3}\left(\frac{h_T}{\sin\theta}\right) = \frac{1}{6}\frac{\gamma h_T{}^3}{\sin^2\theta}$$

$$F_3 y_3 = \gamma\left(\frac{h+h_T}{2}\right) l * \frac{l\left(\frac{h_T}{3}+\frac{2}{3}h\right)}{h+h_T} = \frac{1}{6}\gamma l^2\left(\frac{h_T}{3}+\frac{2}{3}h\right)$$

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης - ΑΣΚΗΣΗ



***Λύση***

**Αντικαθιστώντας και κάνοντας απλές πράξεις:**

$$h^3 + 2l^2h = 100\frac{\gamma_{\varphi\rho}}{\gamma}l^2 + \frac{h_\tau^{\ 3}}{\sin^2\theta} - l^2h_\tau$$

**Για:**

$\gamma_{\varphi\rho}$**= 23565 N/m**$^3$

**γ=9810 N/m**$^3$

**l=15 m**

$h_\tau$**=3 m**

$\theta = \tan^{-1}(50/15) \Rightarrow \theta = 73^o \Rightarrow \sin\theta = 0.96$

**έχουμε:**

# Δ.3.9. Πρίσμα πίεσης - ΑΣΚΗΣΗ



***Λύση***

$$h^3 + 2*15^2 h = 100*\frac{23565}{9810}*15^2 + \frac{3^3}{0.96^2}-15^2*3 \Rightarrow$$

$$h^3 + 450h = 54048.17 + 29.30 - 675 \Rightarrow$$

$$h^3 + 450h = 53402.46$$

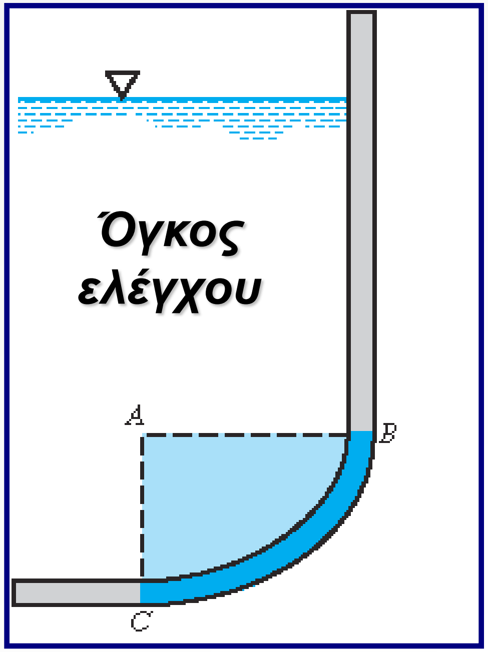
**Εξίσωση 3ου βαθμού: 1 πραγματική και 2 μιγαδικές λύσεις**

**Από αναλυτικές εξισώσεις υπολογισμού η πραγματική λύση και άρα το ζητούμενο h ισούται με:**

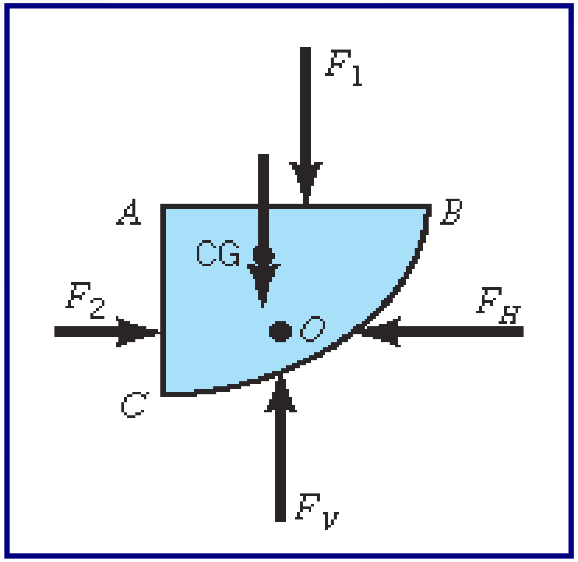
$$\boxed{h = 33.7m}$$

# Δ.3.10. Υδροστατική F καμπύλη επιφάνεια

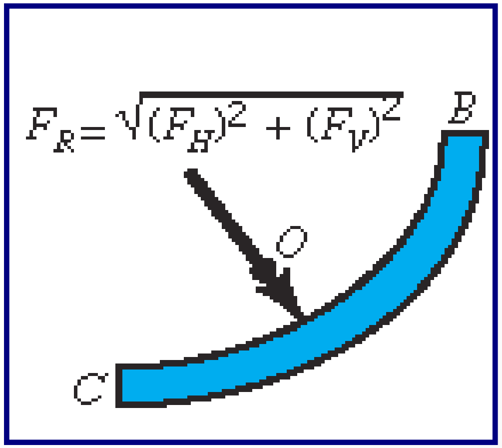





Διάγραμμα ελεύθερου σώματος




$F_R$

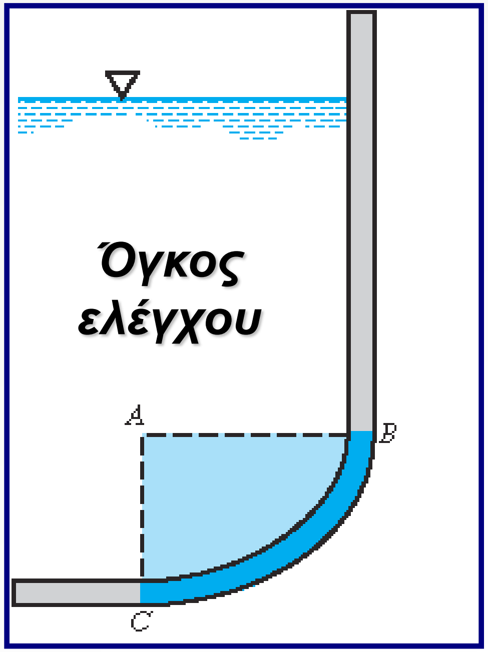



- ***Επιλογή όγκου ελέγχου*** **που περιλαμβάνει την επιφάνεια**
- ***Ισορροπία δυνάμεων*** **στον όγκο ελέγχου**
- ***Οριζόντια*** **διεύθυνση: $F_2=F_H$ $\alpha=\tan^{-1}(F_V/F_H)$ ως προς το οριζόντιο επίπεδο**
- ***Κατακόρυφη*** **διεύθυνση: $F_1+W=F_V$**

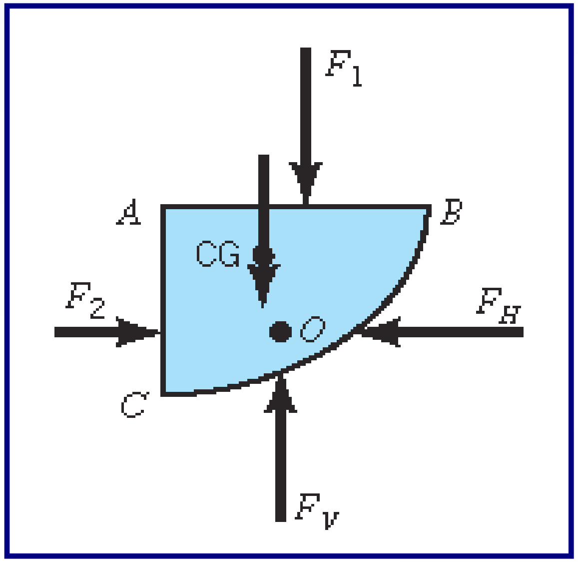
$$F_R=\sqrt{F_V^2+F_H^2}$$

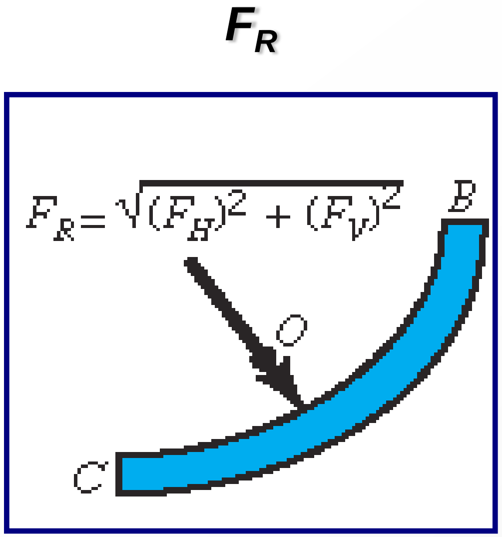
# Δ.3.10. Υδροστατική F καμπύλη επιφάνεια






**Διάγραμμα ελεύθερου σώματος**




Μπορεί ο υπολογισμός να γίνει όπως στις επίπεδες επιφάνειες αλλά γενικά η διαδικασία είναι δύσκολη και δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε έναν γενικό τύπο.

Για τον λόγο αυτό εφαρμόζουμε μία άλλη καλύτερη διαδικασία.

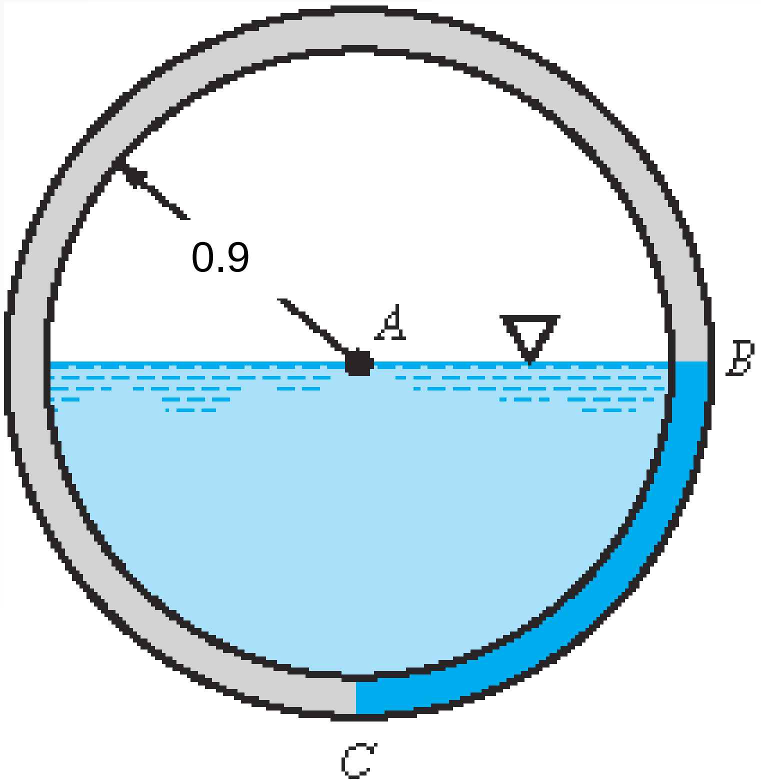
Στο σχήμα το πλάτος (η κάθετη στο χαρτί διάσταση) είναι 1m (θεώρηση)

$F_V$ και $F_H$ δυνάμεις από δεξαμενή στο ρευστό. Η φορά της $F_R$ αντίθετη από τη συνισταμένη των $F_H$ και $F_V$. 3$^o$ ΣΧΗΜΑ: Σημείο εφαρμογής Ο μπορεί να βρεθεί από ισορροπία ροπών ως προς κατάλληλο άξονα.

# Δ.3.10. Υδροστατική F καμπύλη επιφάνεια



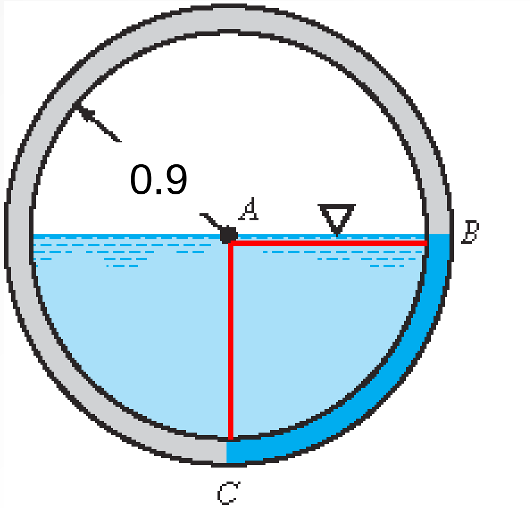
**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γενικό – Δύναμη σε καμπύλη επιφάνεια**
Ο αποχετευτικός σωλήνας του σχήματος έχει διάμετρο 1.8 m και είναι μισογεμάτος με νερό. Να υπολογισθεί το μέγεθος και η διεύθυνση της δύναμης που ασκεί το νερό στο τμήμα BC του σωλήνα, μήκους 0.3 m (κάθετα στη διατομή).



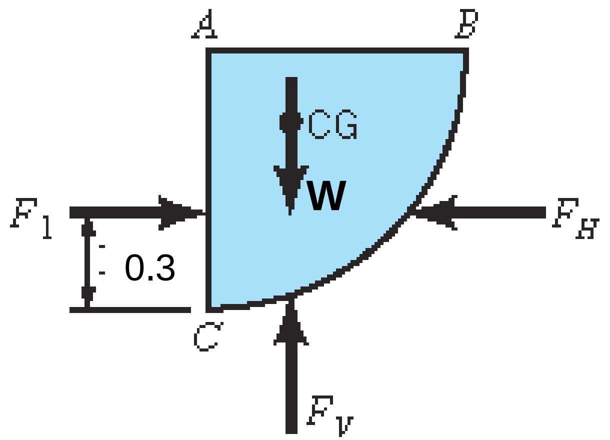

# Δ.3.10. Υδροστατική F καμπύλη επιφάνεια



**Επιλογή όγκου ελέγχου που περιλαμβάνει την επιφάνεια BC**




**Προσδιορισμός των δυνάμεων που δρουν στον όγκο ελέγχου**




**$F_1$: Η δύναμη που δρα στην επιφάνεια AC**
**W: Το βάρος του νερού στον όγκο ελέγχου**
**$F_2$: Δεν υπάρχει (επιφάνεια AB στην ελεύθερη επιφάνεια)**
**$F_H$, $F_V$: Οι αντιδράσεις από το τοίχωμα στο νερό**

# Δ.3.10. Υδροστατική F καμπύλη επιφάνεια



***Λύση***

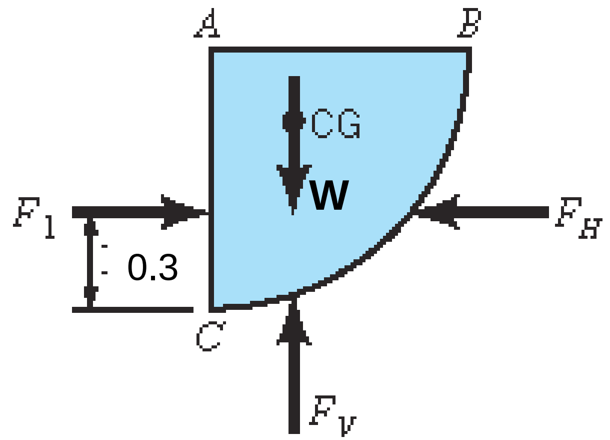
**Ισορροπία Δυνάμεων**

$$F_1 = F_H \Rightarrow \gamma h_c A = F_H \Rightarrow$$

$$F_H = 9810 * \frac{0.9}{2}(0.9 * 0.3) \Rightarrow F_H = 1191.9N$$

$$W = F_V \Rightarrow \gamma V = F_V \Rightarrow 9810 * \left(\frac{\pi 0.9^2}{4} * 0.3\right) = F_V$$

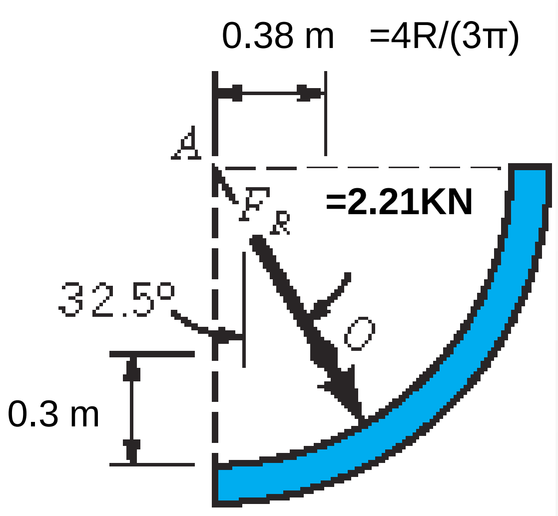
$$\Rightarrow F_V = 1872.2N$$




**Υπολογισμός $F_R$**

$$F_R = F_{o\lambda} = \sqrt{F_H^{\ 2} + F_V^{\ 2}} = 2219.4N$$

$$a = \tan^{-1}\left(\frac{F_H}{F_V}\right) = 32.5^o$$



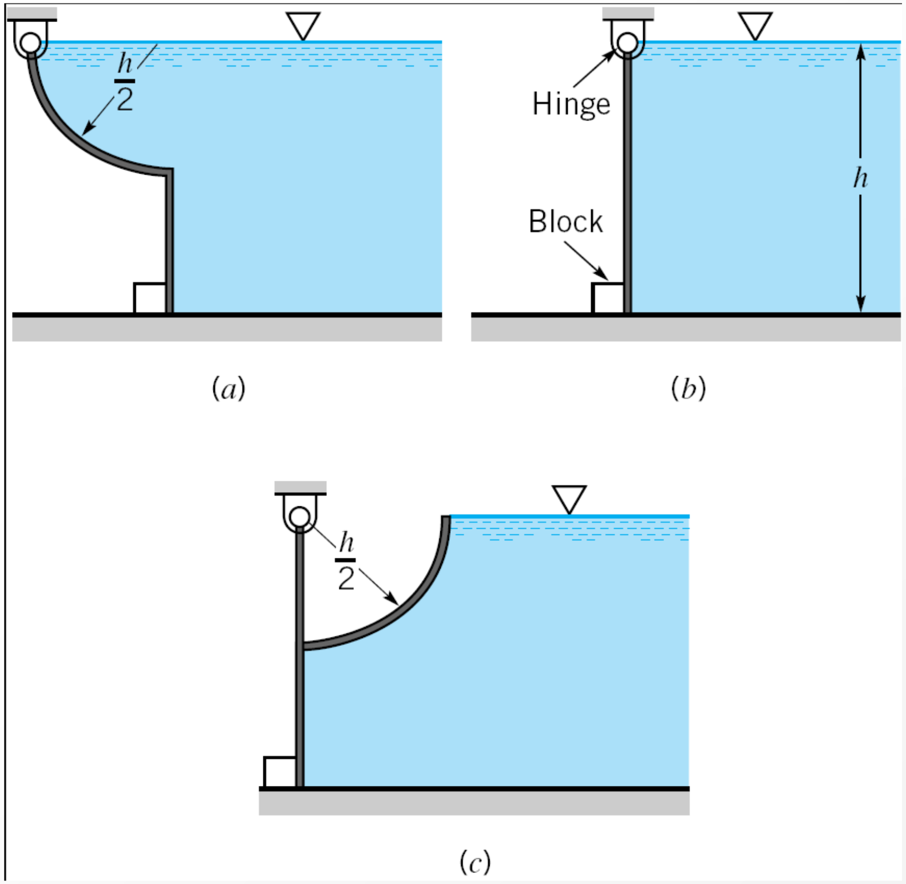
# Δ.3.10. Υδροστατική F καμπύλη επιφάνεια



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.9 σελ. 81-83**

Τρεις θυρίδες αμελητέου βάρους χρησιμοποιούνται σε έναν αγωγό πλάτους b (κάθετα στο χαρτί) για την κατακράτηση του νερού ύψους h. Η δύναμη που ασκείται στο μπλοκ είναι R για την θυρίδα (b).

Υπολογίστε (σαν συνάρτηση του R) την αντίστοιχη δύναμη για τις θυρίδες (a) και (c). Τα βάρος της θυρίδας να θεωρηθεί αμελητέο.

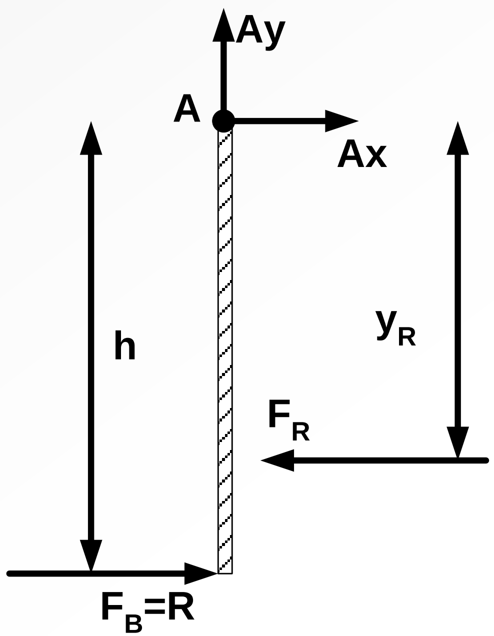


# Δ.3.10. Υδροστατική F καμπύλη επιφάνεια

## Λύση

**ΘΥΡΙΔΑ (b)**

**Διάγραμμα ελεύθερου σώματος**




Πλάτος θυρίδας = b

$F_B$ η αντίδραση από το block στη θυρίδα. Η θυρίδα ασκεί δύναμη R και η αντίδραση είναι $F_B$=R.

**Υπολογισμός δυνάμεων επάνω στη θυρίδα**

$$F_R = \gamma h_c A = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)(hxb) = \frac{\gamma h^2 b}{2}$$

και $\quad y_R = \frac{2}{3}h$

**Υπολογισμός ροπών ως προς A**

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad hR = \left(\frac{2}{3}h\right)F_R$$

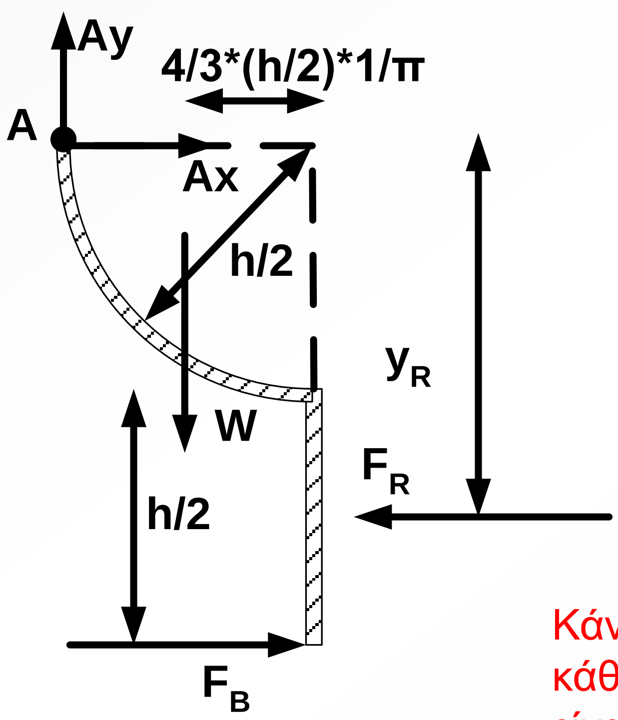
$$hR = \left(\frac{2}{3}h\right)\left(\frac{\gamma h^2 b}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{\gamma h^2 b}{3} \qquad (1)}$$

# Δ.3.10. Υδροστατική F καμπύλη επιφάνεια

## *Λύση*

**ΘΥΡΙΔΑ (a)**

**Διάγραμμα ελεύθερου σώματος**




Πλάτος θυρίδας = b

**Υπολογισμός δυνάμεων επάνω στη θυρίδα**

$$F_R = \gamma h_c A = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)(hxb) = \frac{\gamma h^2 b}{2}$$

$$\text{και} \quad y_R = \frac{2}{3}h$$

Όπως θυρίδα (b)

Επίσης, έχω το βάρος W:

$$W = \gamma V = \gamma(Ab) = \gamma\left[\frac{\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2}{4}b\right] = \frac{\pi\gamma h^2 b}{16}$$

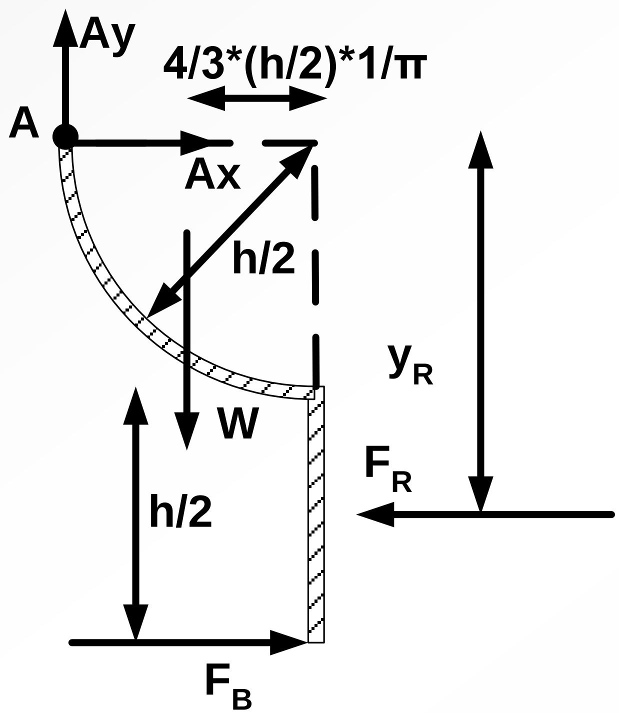
Κάνω τον όγκο ελέγχου για το 4ο-κύκλιο. Η δύναμη στην κάθετη επιφάνεια του τεταρτοκυκλίου υπολογίζεται σαν να είχα μία επίπεδη επιφάνεια. Έχω λοιπόν μία ενιαία επίπεδη επιφάνεια ύψους h. Επομένως $F_R$ όπως θυρίδα (b).

# Δ.3.10. Υδροστατική F καμπύλη επιφάνεια

**ΘΥΡΙΔΑ (a)**

## *Λύση*

**Διάγραμμα ελεύθερου σώματος**




Πλάτος θυρίδας = b

**Υπολογισμός ροπών ως προς A**

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow$$

$$W\left(\frac{h}{2}-\frac{4h}{6\pi}\right)+F_R\left(\frac{2}{3}h\right)=F_B\,h \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\pi\gamma h^2 b}{16}\left(\frac{h}{2}-\frac{4h}{6\pi}\right)+\frac{\gamma h^2 b}{2}\left(\frac{2}{3}h\right)=F_B\,h \quad \Rightarrow$$

$$F_B = 0.390\gamma h^2 b$$

$$(1)\Rightarrow 3R=\gamma h^2 b$$

$$\boxed{F_B = 1.17R}$$

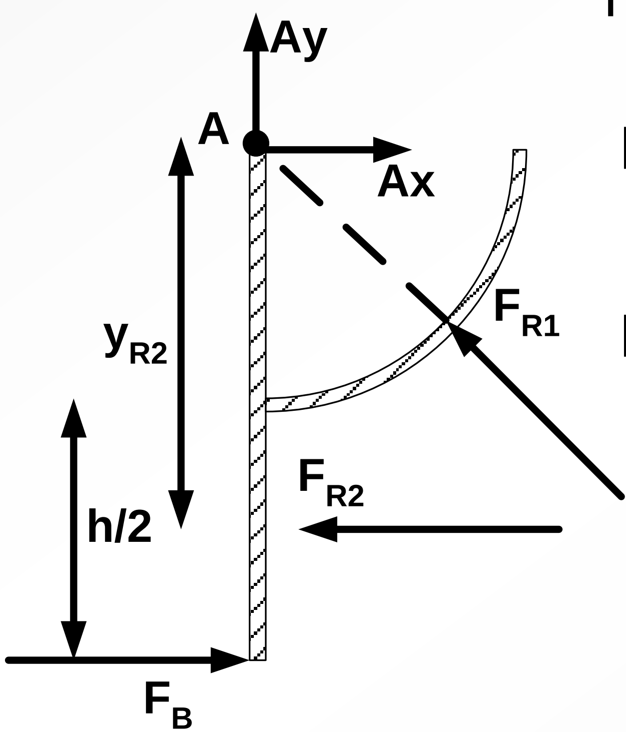
# Δ.3.10. Υδροστατική F καμπύλη επιφάνεια



## *Λύση*

***ΘΥΡΙΔΑ (c)***

**Διάγραμμα ελεύθερου σώματος**




Πλάτος θυρίδας = b

Για την (c) και από το σχήμα η δύναμη $F_R$ ($F_{R1}$)στο καμπύλο τμήμα διέρχεται από την άρθρωση. Άρα δεν συνεισφέρει στη ροπή ως προς το σημείο Α.

Για το κάτω μέρος της θυρίδας έχουμε:

$$F_{R2} = \gamma h_{c2} A = \gamma\left(\frac{h}{2} + \left(\frac{h}{2}\right)/2\right)\left(\frac{h}{2} x b\right) \Rightarrow$$

$$F_{R2} = \gamma \frac{3h}{4}\left(\frac{h}{2} x b\right) = \frac{3\gamma h^2 b}{8}$$

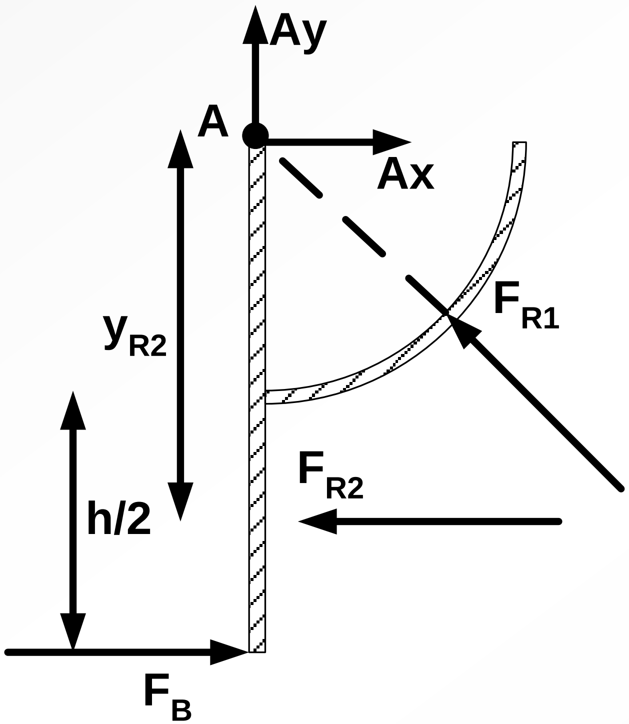
$$y_{R_2} = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c = \frac{\frac{1}{12} b \left(\frac{h}{2}\right)^3}{\left(\frac{3h}{4}\right)\left(\frac{h}{2} b\right)} + \frac{3h}{4} = \frac{28}{36} h$$

# Δ.3.10. Υδροστατική F καμπύλη επιφάνεια

## Λύση

**ΘΥΡΙΔΑ (c)**

**Διάγραμμα ελεύθερου σώματος**




Πλάτος θυρίδας = b

**Υπολογισμός ροπών ως προς A**

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_{R2}\left(\frac{28}{36}h\right) = F_B h \Rightarrow$$

$$\frac{3\gamma h^2 b}{8}\left(\frac{28}{36}h\right) = F_B h \Rightarrow$$

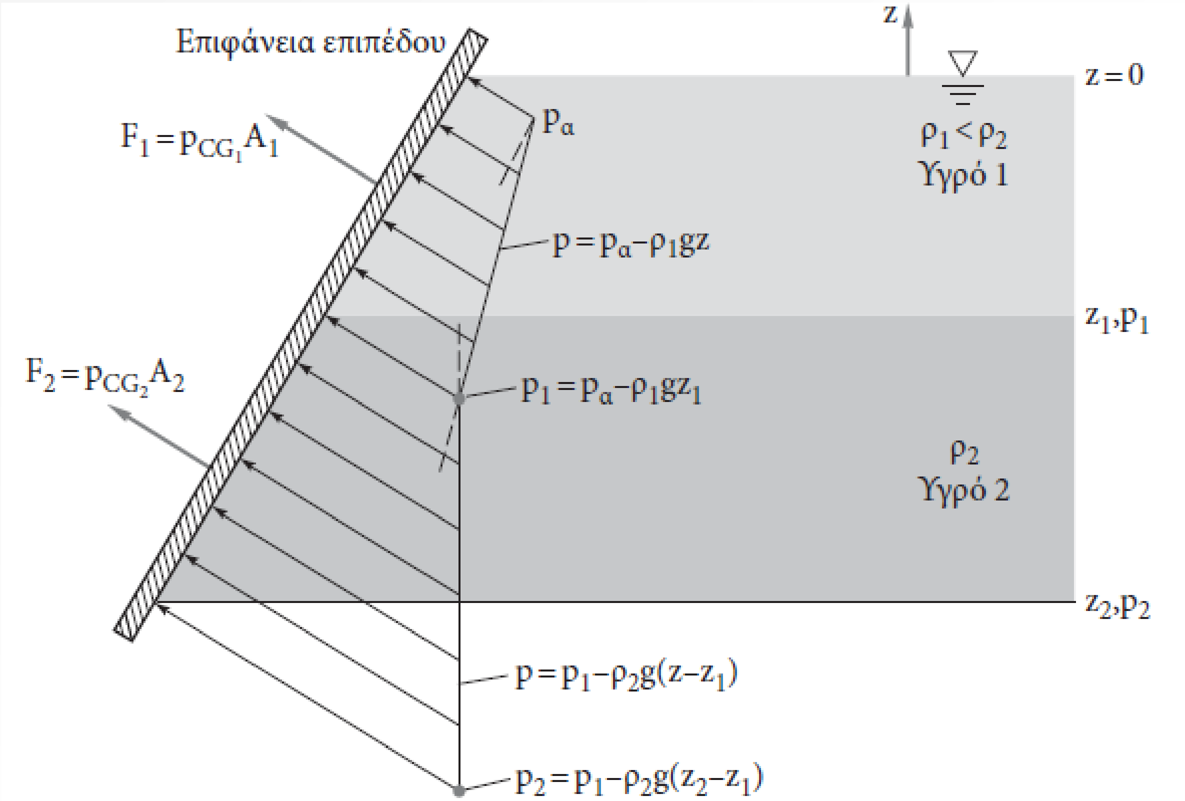
$$F_B = 0.290\gamma h^2 b$$

$$(1) \Rightarrow 3R = \gamma h^2 b$$

$$\boxed{F_B = 0.875R}$$

# Δ.3.11. Υδροστατική F – στρωμάτωση

- ***Με χρήση του Πρίσματος Πίεσης***:



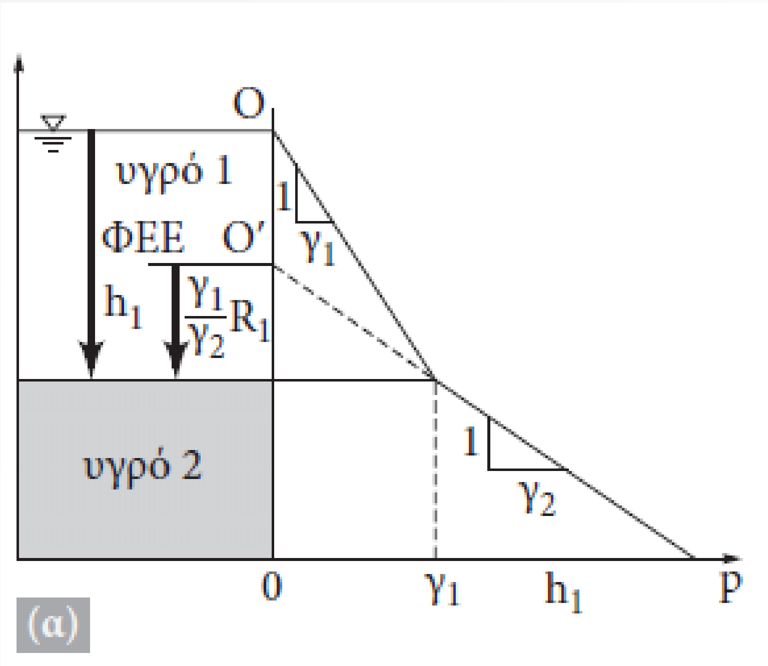

**Οι δυνάμεις $F_1$ και $F_2$ υπολογίζονται όπως:**

$$F_1 = \frac{p_\alpha + p_1}{2} A_1 = \frac{\gamma_1 h_1}{2} A_1 \quad (\text{για } p_\alpha = 0)$$

$$F_2 = \frac{p_1 + p_2}{2} A_2 = \frac{\gamma_1 z_1 + (\gamma_1 z_1 - \gamma_2 (z_2 - z_1))}{2} A_2 = (\gamma_1 h_1 + \frac{h_2}{2}) A_2 \quad (\text{για } p_\alpha = 0)$$

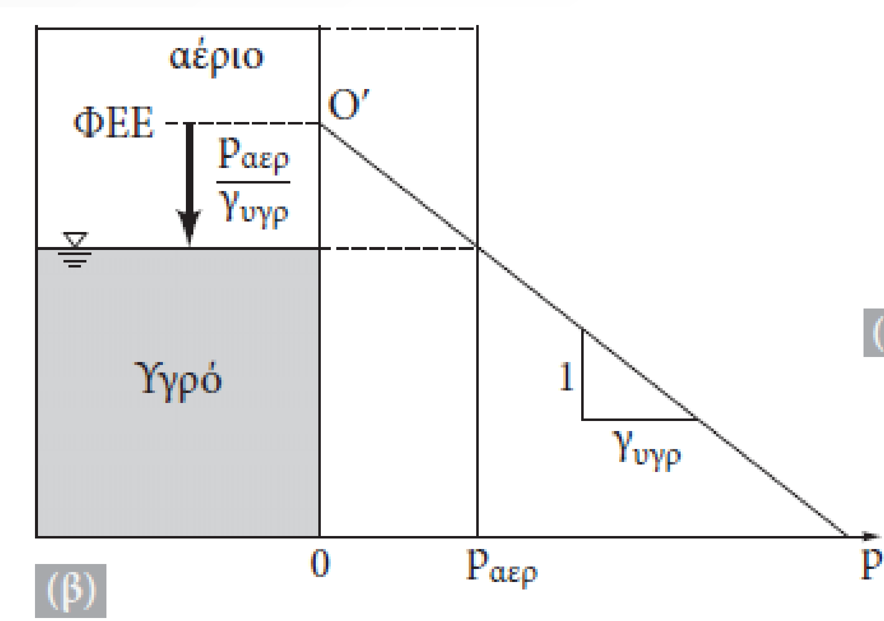
# Δ.3.11. Υδροστατική F – στρωμάτωση

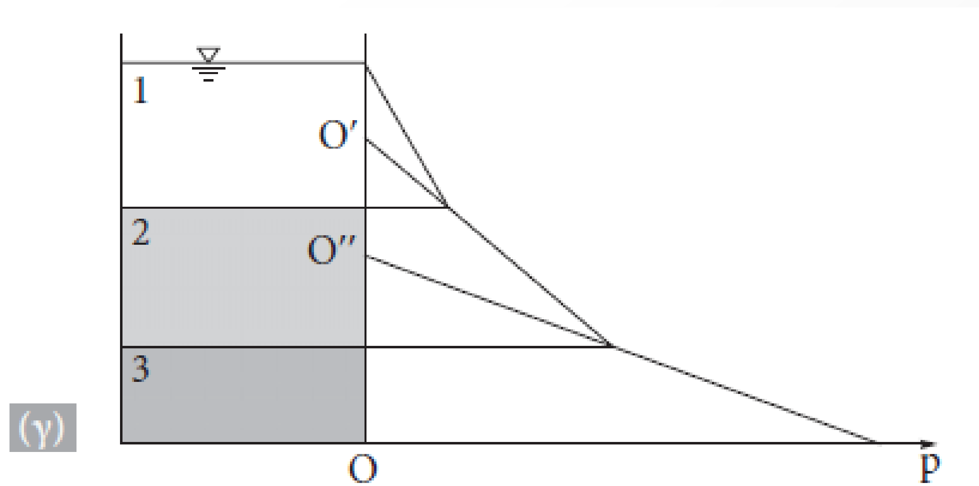





- **Μέθοδος ¨ Ισοδύναμου ρευστού¨**
- Προσδιορισμός της “ισοδύναμης” στήλης

$$p_1 = \gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_1{}' \Rightarrow h_1{}' = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} h_1$$



# Δ.3.11. Υδροστατική F – στρωμάτωση

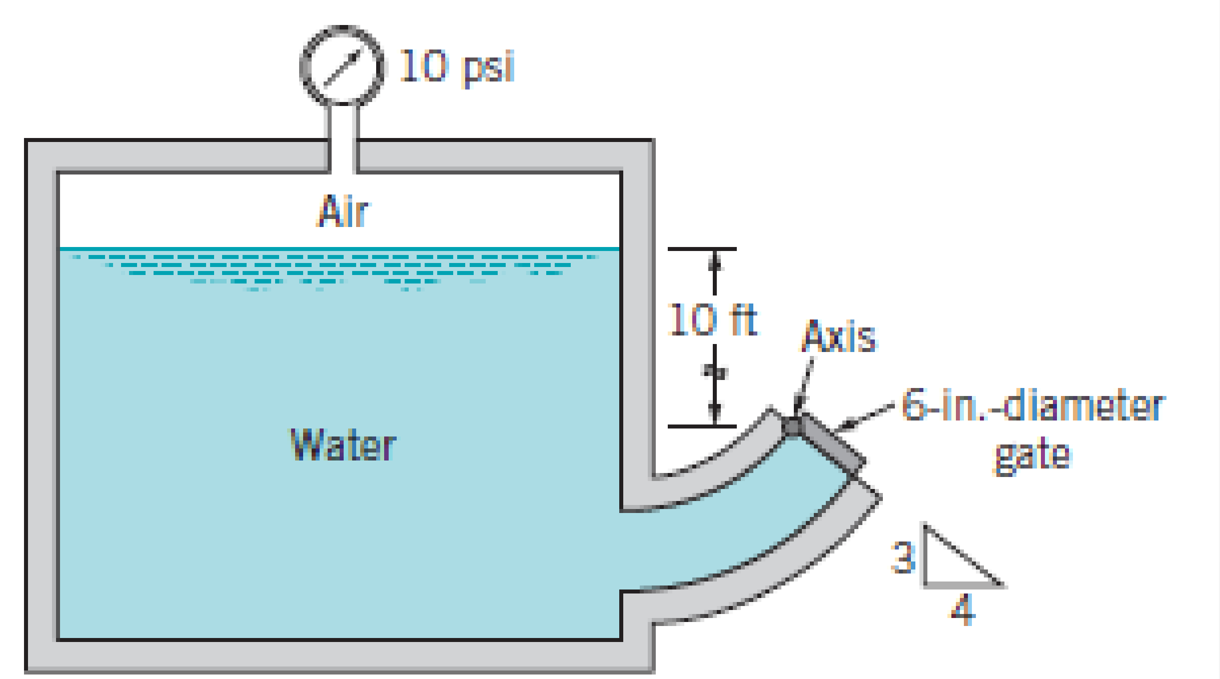


**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ για Λύση 2.5 σελ.106**

Η κλειστή δεξαμενή του σχήματος περιέχει νερό, ενώ η πίεση του αέρα πάνω από το νερό είναι 69 kN/m$^2$. Στη μία πλευρά της δεξαμενής υπάρχει ένας σωλήνας που κλείνει με μια κυκλική θυρίδα διαμέτρου 15 cm που είναι αρθρωμένη στη μια πλευρά όπως φαίνεται στο σχήμα.

Υπολογίστε την ελάχιστη ροπή στρέψης που απαιτείται έτσι ώστε η θυρίδα να παραμείνει κλειστή.

Το βάρος της θυρίδας και οι τριβές του άξονα να θεωρηθούν αμελητέα.

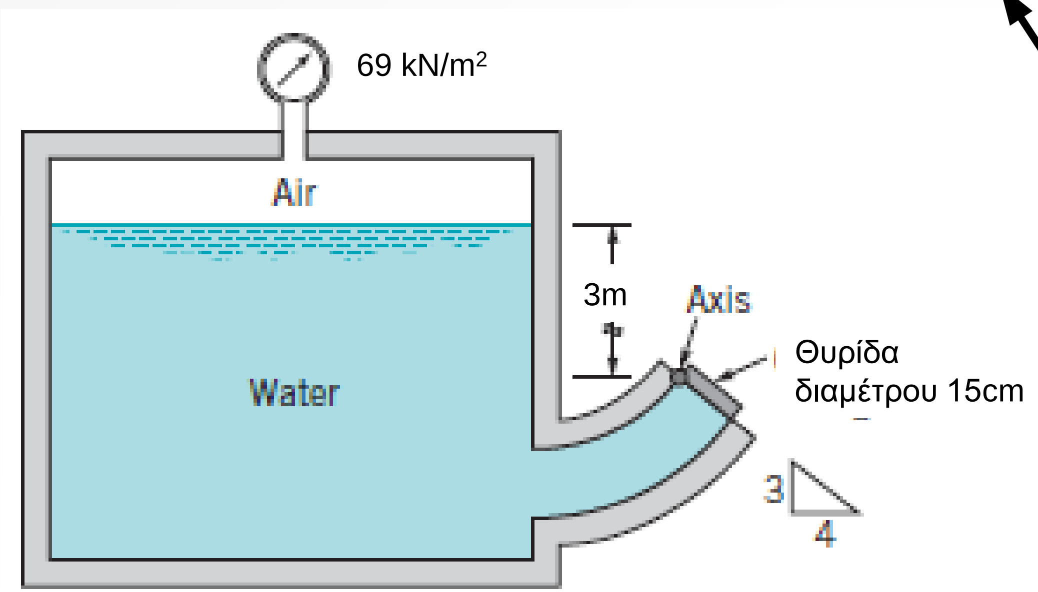


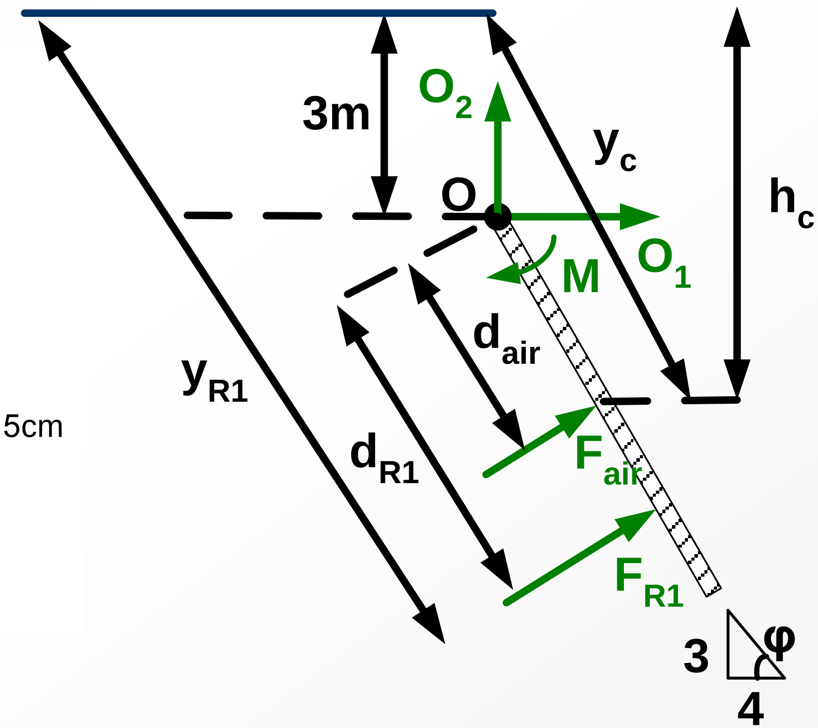
# Δ.3.11. Υδροστατική F – στρωμάτωση



## Λύση

**Διάγραμμα ελεύθερου σώματος**




**Στο σχήμα δεξιά φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη θυρίδα καθώς και οι αποστάσεις τους (που μας ενδιαφέρουν για τον υπολογισμό των ροπών) από το O**

# Δ.3.11. Υδροστατική F – στρωμάτωση



## *Λύση*

**Υπολογισμός δυνάμεων**

$$F_{air} = p_{air}A = p_{air}\frac{\pi d^2}{4} = 69*\frac{\pi 0.15^2}{4} \Rightarrow$$

$$F_{air} = 1219.331N$$

$$F_{R1} = \gamma h_c A = \gamma\left(3+\frac{d}{2}\sin\varphi\right)A = 9810*\left(3+\frac{0.15}{2}0.6\right)*\frac{\pi 0.15^2}{4} \Rightarrow$$

$$F_{R1} = 527.872N$$

**Υπολογισμός σημείων εφαρμογής (ως προς το Ο, κάθετες προς τις δυνάμεις αποστάσεις)**

$$F_{air}: d_{air} = \frac{d}{2} = 0.075m$$

$$F_{R1}: \; d_{R1} = y_{R1} - \frac{3}{\sin\varphi}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{R1} &= \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c \\ I_{xc} &= \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi(0.15/2)^4}{4} = 2.48*10^{-5}m^4 \\ y_c &= \frac{3}{\sin\varphi} + \frac{d}{2} = \frac{3}{0.6} + \frac{0.15}{2} = 5.075m \\ A &= \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 0.15^2}{4} = 0.018m^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_{R1} = \frac{2.48*10^{-5}}{5.075*0.018} + 5.075 = 5.076m$$

# Δ.3.11. Υδροστατική F – στρωμάτωση



## *Λύση*

Επομένως:

$$F_{R1}:\ d_{R1} = y_{R1} - \frac{3}{\sin\varphi} = 5.076 - 5 = 0.076m$$

Για να μην ανοίξει η θυρίδα πρέπει:

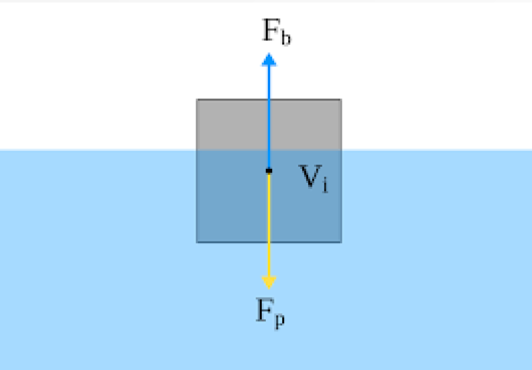
$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M = F_{air} d_{air} + F_{R1} d_{R1} = 1219.331 * 0.075 + 527.872 * 0.076 \Rightarrow$$

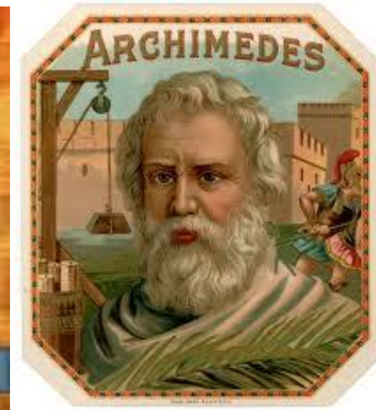
$$\boxed{M = 131.568 N * m}$$

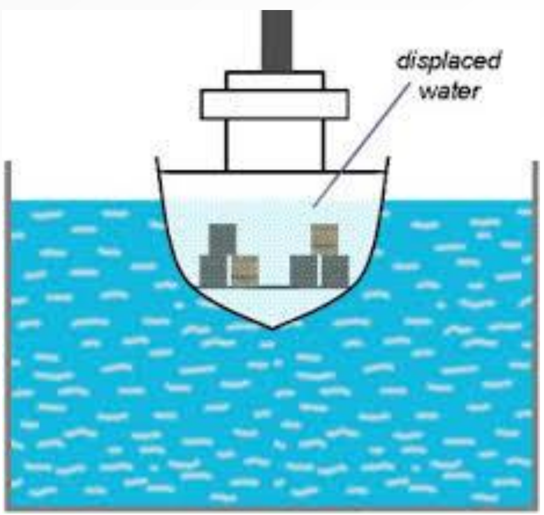
# Δ.3.12. Άνωση – επίπλευση – ευστάθεια

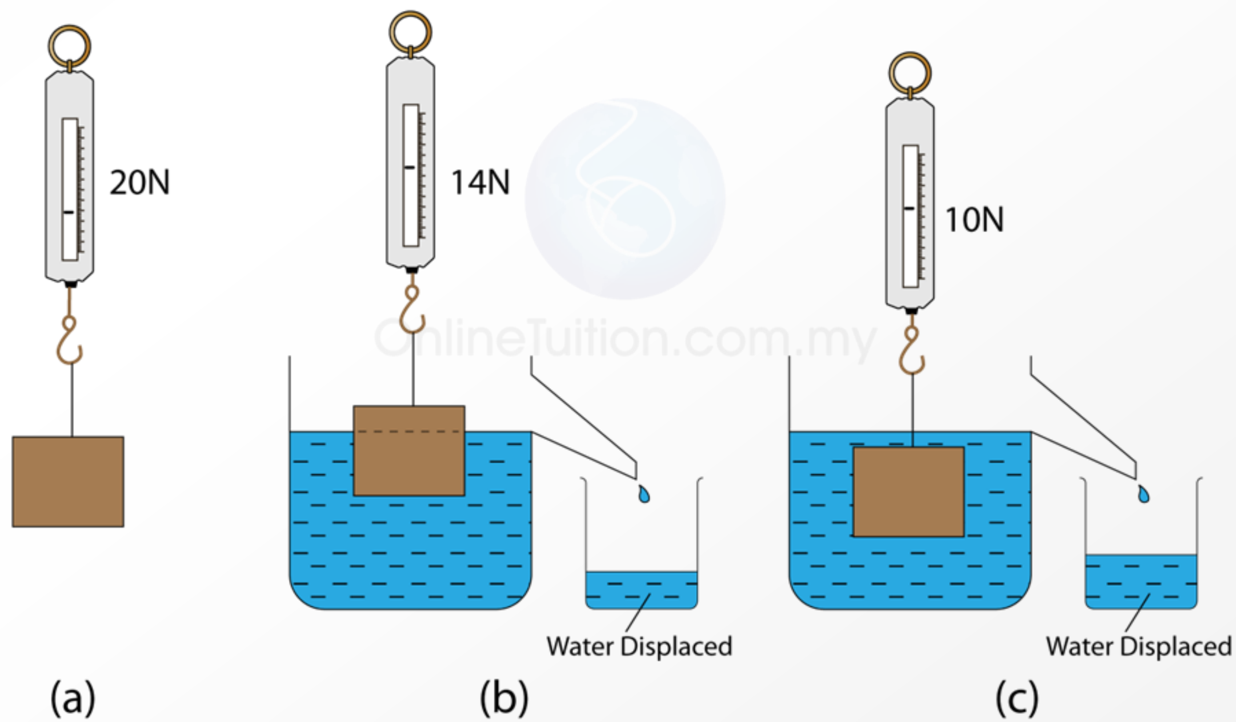
## Άνωση – Αρχή Αρχιμήδη





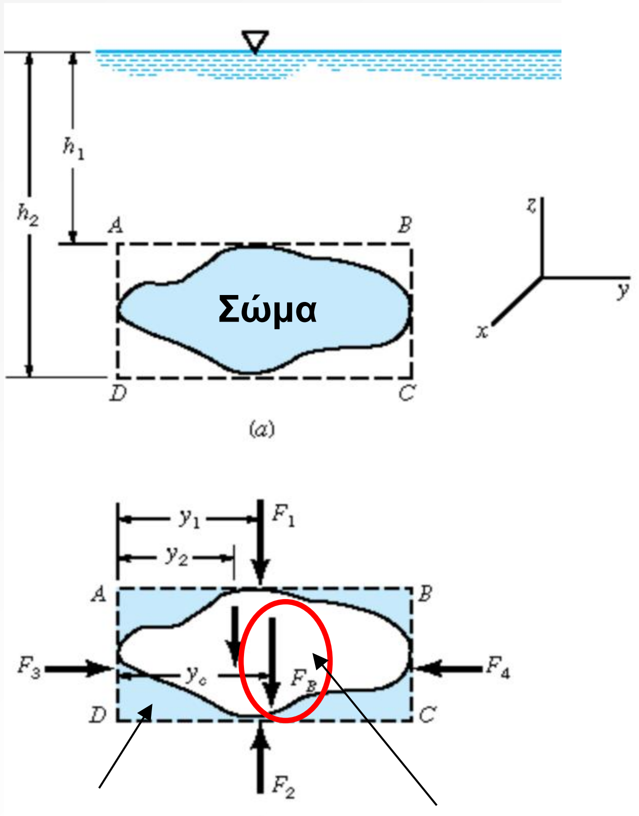


# Δ.3.12. Άνωση – επίπλευση – ευστάθεια

## Άνωση – Αρχή Αρχιμήδη




Σκιασμένη επιφάνεια

Δύναμη από το σώμα στο ρευστό (αντίδραση άνωσης)

$$F_B = F_2 - F_1 - W$$

**W: Βάρος σκιασμένης επιφάνειας (Σχήμα (b))**

$$F_2 - F_1 = \gamma h_2 A - \gamma h_1 A \Rightarrow$$

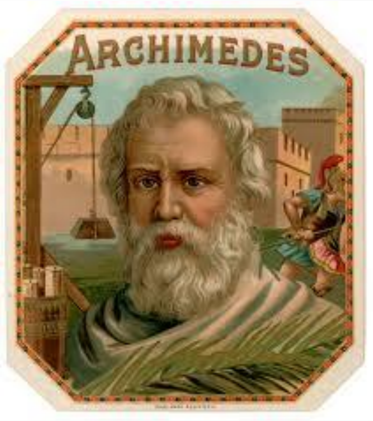
$$F_2 - F_1 = \gamma (h_2 - h_1) A$$

$$W = W_{\rho\varepsilon\upsilon\sigma\tau}^{ABDC} - W_{\rho\varepsilon\upsilon\sigma\tau}^{\sigma\chi\eta\mu\alpha\,\sigma\omega\mu\alpha} \Rightarrow$$

$$W = \gamma (h_2 - h_1) A - \gamma V \Rightarrow$$

$$W = \gamma \{(h_2 - h_1) A - V\}$$

**V: Όγκος σώματος**




**Τελικά προκύπτει:**

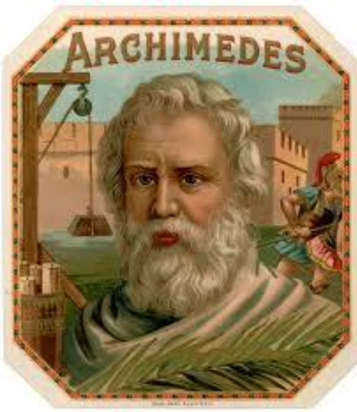
$$F_B = \gamma (h_2 - h_1) A - \gamma \{(h_2 - h_1) A - V\} \Rightarrow \boxed{F_B = \gamma V}$$

- ✓ ***Άνωση*** **ίση με το** ***βάρος του ρευστού που εκτοπίζει το σώμα*** **(Αρχή του Αρχιμήδη)**
- ✓ ***Φορά*** **προς τα** ***επάνω***

# Δ.3.12. Άνωση – επίπλευση – ευστάθεια



## Άνωση – Αρχή Αρχιμήδη



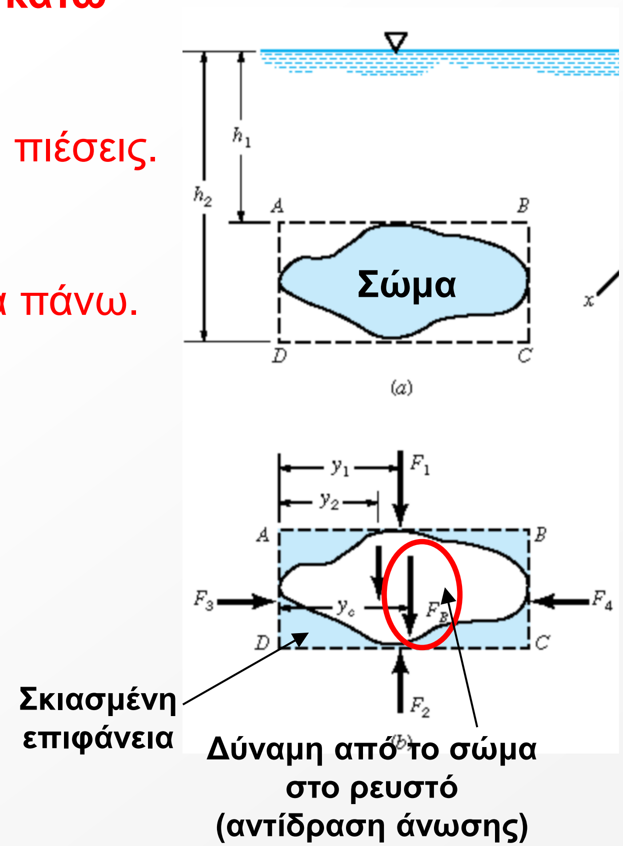

Όταν ένα ακίνητο σώμα βρίσκεται εξολοκλήρου μέσα σε ένα ρευστό (π.χ. μπαλόνι ή βυθισμένο σώμα μέσα στη θάλασσα όχι σε επαφή με τον πυθμένα) ή επιπλέει σε ένα υγρό (μερικώς βυθισμένο) τότε πάνω του ασκείται η **δύναμη της άνωσης**. Είναι μία συνισταμένη δύναμη η οποία προκύπτει λόγω διαφοράς **υδροστατικών δυνάμεων (πιέσεων) στην επάνω και κάτω επιφάνεια ενός σώματος**.

ΓΙΑΤΙ ΥΠΑΡΧΕΙ ΔΙΑΦΟΡΑ: Γιατί όσο αυξάνει το βάθος αυξάνουν οι πιέσεις. Επομένως και φορά άνωσης προς τα επάνω.

Έστω $F_B$ η δύναμη άνωσης που ασκείται στο σώμα. Φορά προς τα πάνω.

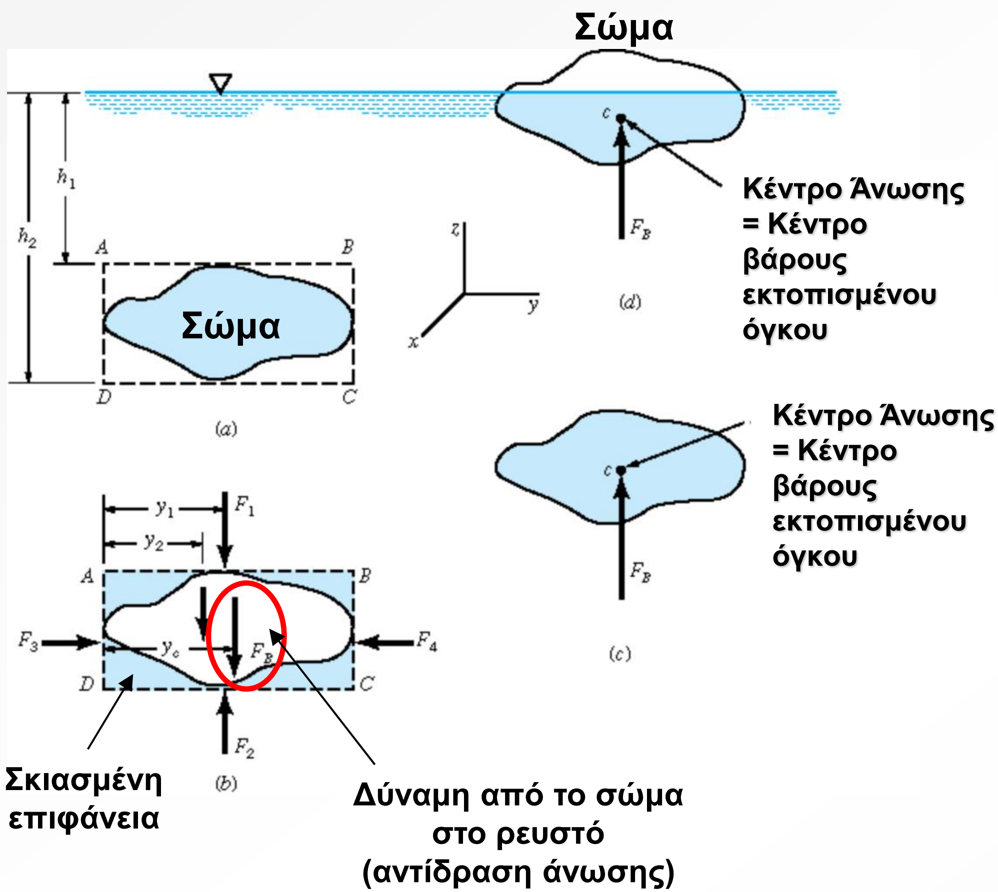
Κλείνω το σώμα με το παραλληλεπίδο ABCD και βγάζω το σώμα. Κάνω το διάγραμμα ελεύθερου σώματος

$F_B$: δύναμη που ασκεί το σώμα στο ρευστό (αντίδραση της πραγματικής άνωσης, αυτό που θέλω να υπολογίσω).



# Δ.3.12. Άνωση – επίπλευση – ευστάθεια






## *Σημείο Εφαρμογής (Κέντρο Άνωσης, (Κ.Α.)):*

- ***Ταυτίζεται*** με το Κέντρο Βάρους (Κ.Β.) του εκτοπιζόμενου όγκου

- ***Βυθισμένο σώμα με ομοιόμορφη κατανομή μάζας***: Κέντρο Άνωσης ταυτίζεται με Κέντρο Βάρους σώματος

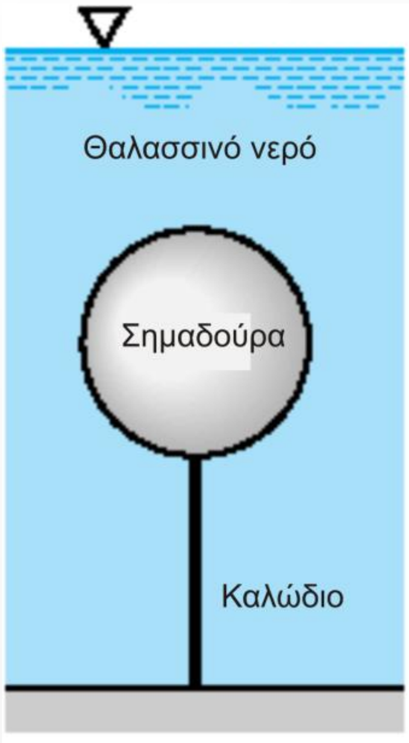
- Στις περισσότερες περιπτώσεις το Κέντρο Άνωσης ***δεν ταυτίζεται*** με το Κέντρο Βάρους

# Δ.3.12. Άνωση – επίπλευση – ευστάθεια



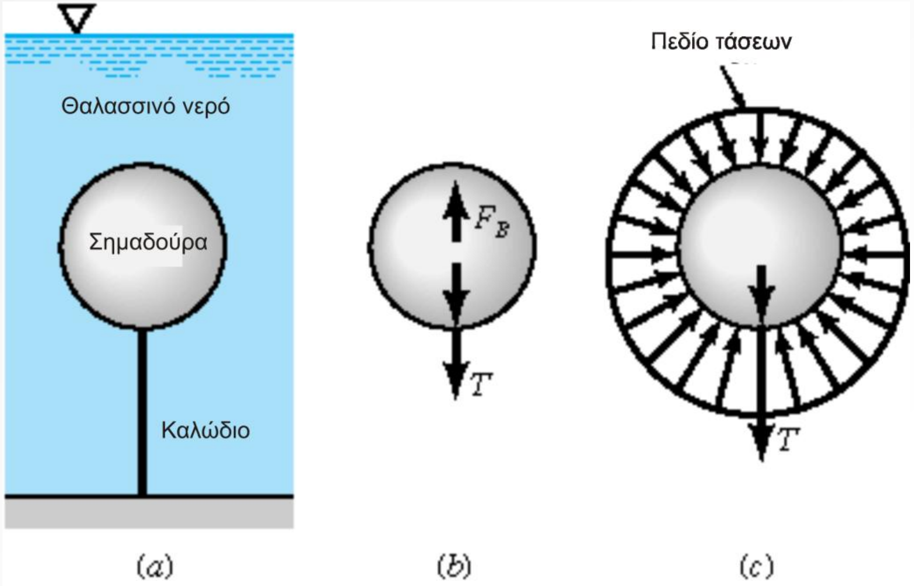
**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γενικό – Άνωση (Αρχή Αρχιμήδη)**

Μία σφαιρική σημαδούρα έχει διάμετρο 1.5m, ζυγίζει 8.5kN και είναι αγκυρωμένη στον πυθμένα της θάλασσας με ένα καλώδιο. Σε κανονικές συνθήκες η σημαδούρα επιπλέει στην επιφάνεια του νερού. Να υπολογισθεί η τάση στο καλώδιο ώστε η σημαδούρα είναι βυθισμένη όπως φαίνεται στο σχήμα.



# Δ.3.12. Άνωση – επίπλευση – ευστάθεια






## Λύση

**Στην σημαδούρα θα ασκούνται οι ακόλουθες δυνάμεις:**
**α) Βάρος**
**β) Άνωση**
**γ) Τάση καλωδίου**

**Από ισορροπία δυνάμεων έχουμε:**

$$T + W = F_B \Rightarrow T = F_B - W$$

$$F_B = \gamma_{\theta\alpha\lambda.\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}} V = \rho_{\theta\alpha\lambda.\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}} g V \Rightarrow$$

$$F_B = 1025 * 9.81 * \frac{\pi 1.5^3}{6} \Rightarrow F_B = 1.785 * 10^4 N$$

$$W = 8500N$$

$$T = 1.785 * 10^4 N - 0.85 * 10^4 \Rightarrow$$

$$\boxed{T = 9.65 * 10^3 N}$$

# Δ.3.12. Άνωση – επίπλευση – ευστάθεια

- ***Ευσταθής ισορροπία*: Όταν το σώμα μετατοπιστεί από την αρχική του θέση ισορροπίας μπορεί να ξαναεπιστρέψει σε αυτήν**


- ***Ασταθής ισορροπία*: Όταν το σώμα μετατοπιστεί από την αρχική του θέση ισορροπίας Δ Ε Ν μπορεί να ξαναεπιστρέψει σε αυτήν**

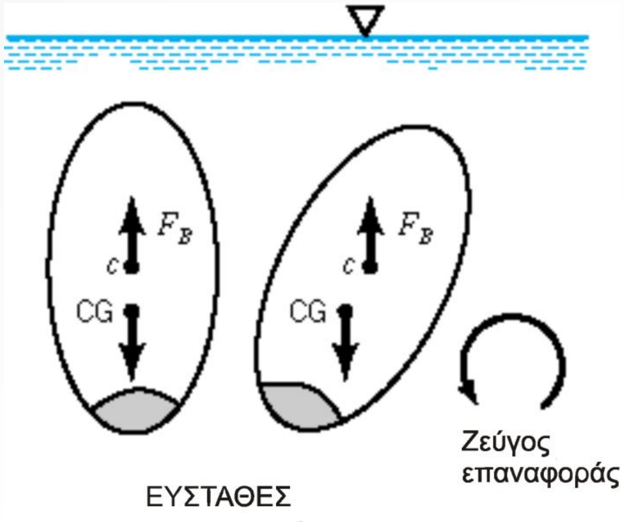

- ***Θέματα ευστάθειας*: Πολύ σημαντικά για βυθισμένα ή πλωτά σώματα**

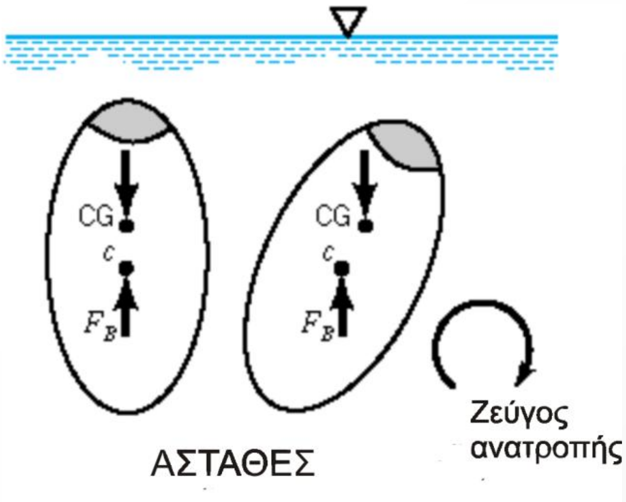
  **⇨ Το Κ.Α. ΔΕΝ συμπίπτει με Κ.Β.**

  **⇨ Μία μικρή στροφή μπορεί να οδηγήσει είτε σε ένα ζεύγος ροπών επαναφοράς είτε σε ζεύγος ροπών ανατροπής**

# Δ.3.12. Άνωση – επίπλευση – ευστάθεια

## ΠΛΗΡΩΣ ΒΥΘΙΣΜΕΝΑ ΣΩΜΑΤΑ




**ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ:**
**ΤΟ Κ.Β. ΧΑΜΗΛΟΤΕΡΑ ΑΠΟ Κ.Α.**

**ΑΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ:**
**ΤΟ Κ.Β. ΥΨΗΛΟΤΕΡΑ ΑΠΟ Κ.Α.**

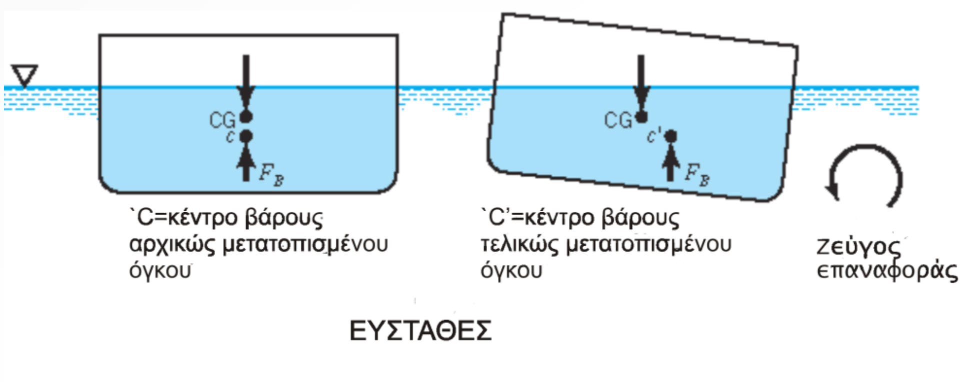
ΣΤΟ ΣΧΗΜΑ ΔΕΝ ΕΧΩ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΜΑΖΑ ΤΟ ΓΚΡΙ ΠΡΟΣΘΕΤΕΙ ΜΑΖΑ!!!

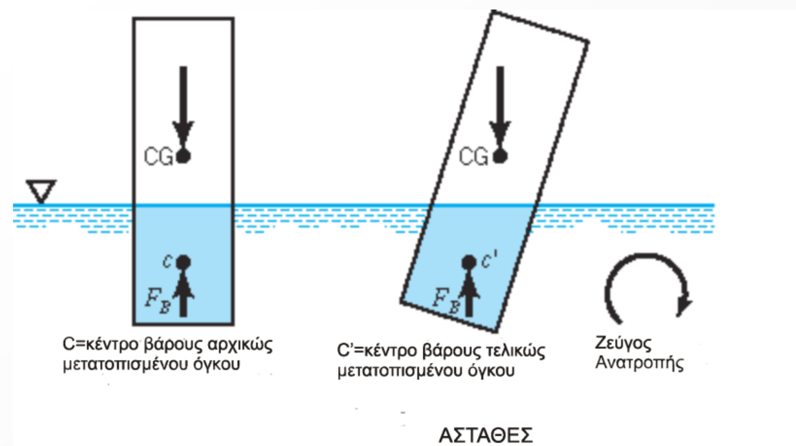
# Δ.3.12. Άνωση – επίπλευση – ευστάθεια



## ΠΛΩΤΑ ΣΩΜΑΤΑ

- ***Το πρόβλημα ευστάθειας λίγο πιο πολύπλοκο*: Κατά την περιστροφή του σώματος η θέση του Κ.Α. μεταβάλλεται (μεταβάλλεται ο όγκος του σώματος που βυθίζεται μέσα στο ρευστό)**




παίζει ρόλο η οριζόντια απόσταση κ.β. μετατοπισμένου κ.α. μεγαλύτερη απόσταση καλύτερη ευστάθεια

επίσης όσο χαμηλότερα κέντρο βάρους => μεγαλύτερη ευστάθεια

# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού

- ***Βασική εξίσωση κίνησης ρευστού υπό τη θεώρηση απουσίας διατμητικών τάσεων (Εφαρμογή Νόμου Νεύτωνα):***

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\mathbf{i}}-\frac{\partial p}{\partial y}\vec{\mathbf{j}}-\frac{\partial p}{\partial z}\vec{\mathbf{k}}\right)-\gamma\vec{\mathbf{k}}=\rho\vec{\boldsymbol{\alpha}}\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\alpha_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}=\rho\alpha_y$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\gamma+\rho\alpha_z$$

- ***Γενική κατηγορία προβλημάτων σχετικών με κίνηση ρευστού απουσίας διατμητικών τάσεων:*** **Μάζα ρευστού που πραγματοποιεί κίνηση (μετατόπιση ή στροφή) στερεού σώματος**

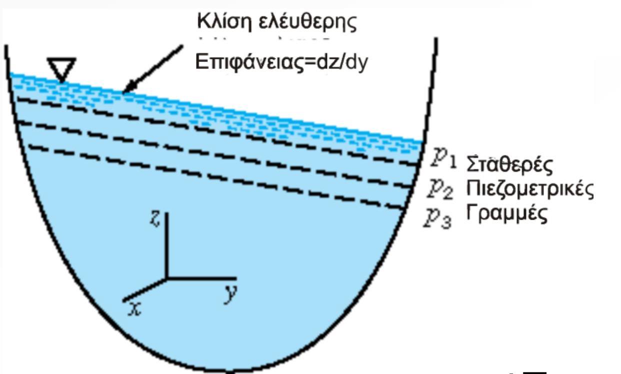
Από την παραπάνω εξίσωση βγάλαμε την εξίσωση για κατανομή πίεσης σε ακίνητο ρευστό. Τα προβλήματα αυτά δεν είναι ακριβώς στατικά (ακίνητο ρευστό) αλλά επειδή βασίζονται στην ίδια εξίσωση που χρησιμοποιήσαμε για ακίνητο ρευστό (απουσία διατμητικών τάσεων) τα αναφέρουμε εδώ.

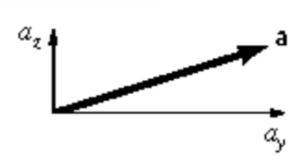
# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού

## *Γραμμική Κίνηση*

- **Θεωρούμε ένα ανοικτό δοχείο με ρευστό το οποίο *μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή με σταθερή επιτάχυνση***

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\alpha_y \\ &\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g+\alpha_z) \\ &dp = \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{dp = -\rho\alpha_y dy - \rho(g+\alpha_z)dz}$$

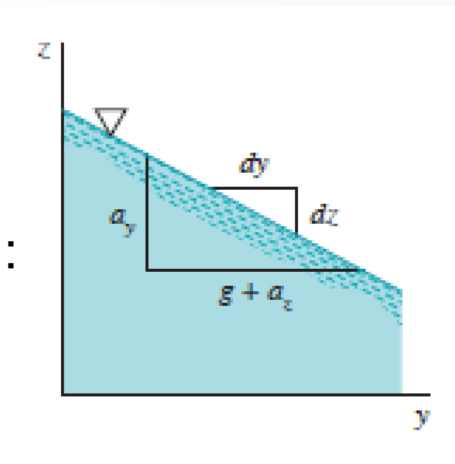



***Μετατόπιση σε ευθεία στο επίπεδο y-z***

*Για γραμμή σταθερής πίεσης $(dp = 0)$:

$$\boxed{\frac{dz}{dy} = -\frac{\alpha_y}{g+\alpha_z}}$$




(Για $\alpha_y = 0, \alpha_z \neq 0$ π.χ. ασανσέρ, $\frac{dp}{dz} = -\rho(g+\alpha_z)$)

# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού

## *Γραμμική Κίνηση*

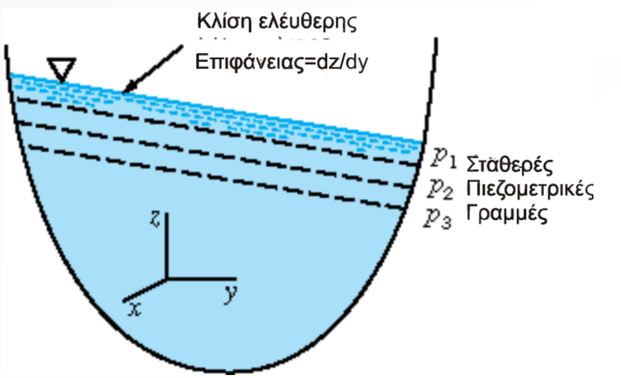
- **Θεωρούμε ένα ανοικτό δοχείο με ρευστό το οποίο *μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή με σταθερή επιτάχυνση***

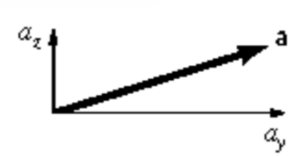
Κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας η πίεση είναι σταθερή. Επιπλέον όλες οι ευθείες με σταθερή πίεση θα είναι παράλληλες με την ελεύθερη επιφάνεια.

Για να έχω κεκλιμένη επιφάνεια πρέπει αy να είναι διαφορετικό από μηδέν.

Εάν $a_y$=0 η μάζα του ρευστού επιταχύνεται μόνο στο κατακόρυφο επίπεδο και άρα έχουμε οριζόντια επιφάνεια.

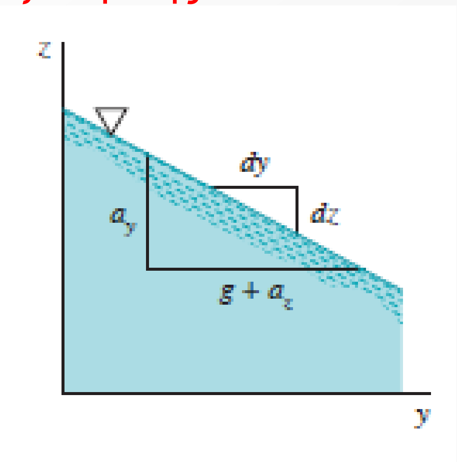
Ωστόσο η κατανομή ΔΕΝ είναι υδροστατική όπως φαίνεται από την εξίσωση του dp (υπάρχει και το $a_z$). Γραμμική μεταβολή πίεσης με το z αλλά η μεταβολή εξαρτάσαι από τη συνδυασμένη επίδραση του g και της εξωτερικής επιτάχυνσης $a_z$.




***Μετατόπιση σε ευθεία στο επίπεδο y-z***

Π.χ. ρευστό σε δεξαμενή μέσα σε ασανσέρ.



# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού

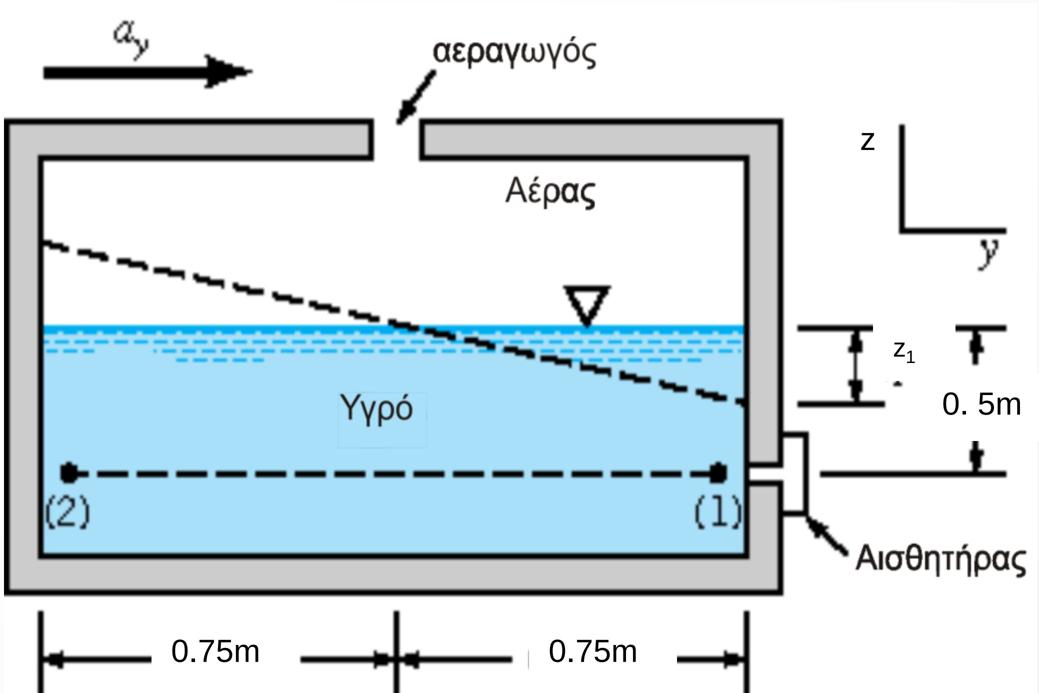


**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.12 σελ. 96-97**

Η δεξαμενή του σχήματος κινείται με σταθερή γραμμική επιτάχυνση $a_y$ κατά τον άξονα y.

(α) Να προσδιοριστεί η σχέση μεταξύ της επιτάχυνσης και της πίεσης στον αισθητήρα για υγρό με πυκνότητα 650 kg/m$^3$.

(β) Ποια είναι η μέγιστη επιτάχυνση για την οποία η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού αγγίζει τον αισθητήρα;



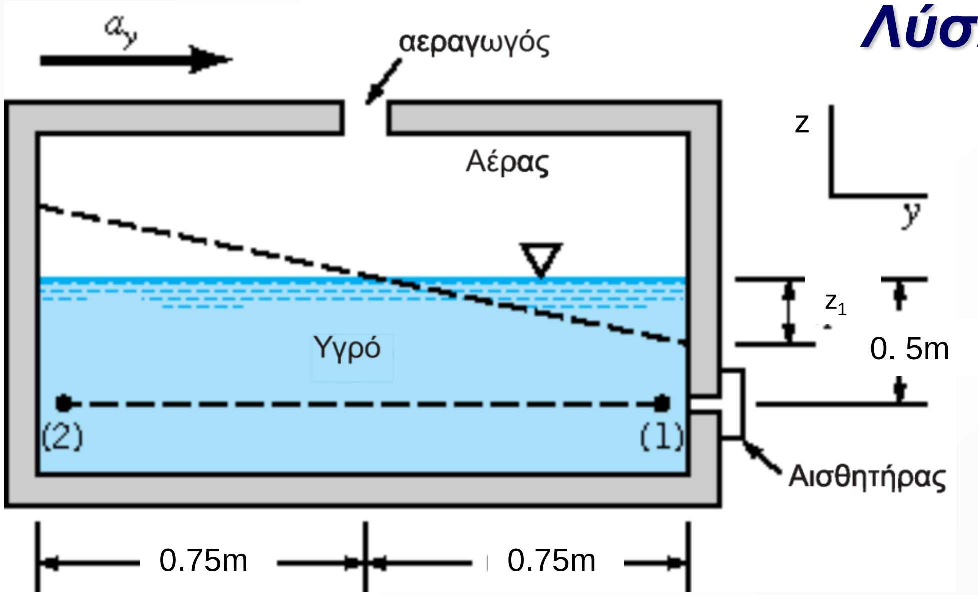
# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού

## *Ερώτημα (α)*

**Για σταθερή οριζόντια επιτάχυνση η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας προσδιορίζεται από τη σχέση:**

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\alpha_y}{g} \qquad (\alpha_z = 0)$$

## *Λύση*




Επειδή y αισθητήρα ίδιο με y $z_1$ η πίεση στην κάθετη αυτή ευθεία μεταβάλλεται με το βάθος. Έχω μόνο υδροστατική ($a_z$=0).

**Επομένως, για επιτάχυνση $a_y$ η μεταβολή του βάθους $z_1$ δίνεται από τη σχέση:**

$$-\frac{z_1}{0.75} = -\frac{\alpha_y}{g} \Rightarrow z_1 = 0.75\left(\frac{\alpha_y}{g}\right)$$

**Η πίεση θα είναι υδροστατική ($\alpha_z$=0) και άρα:**

$$p = \gamma h \Rightarrow p = \rho g h \Rightarrow$$

$$p = 650 * 9.81 * \left(0.5 - 0.75\frac{\alpha_y}{g}\right) \Rightarrow$$

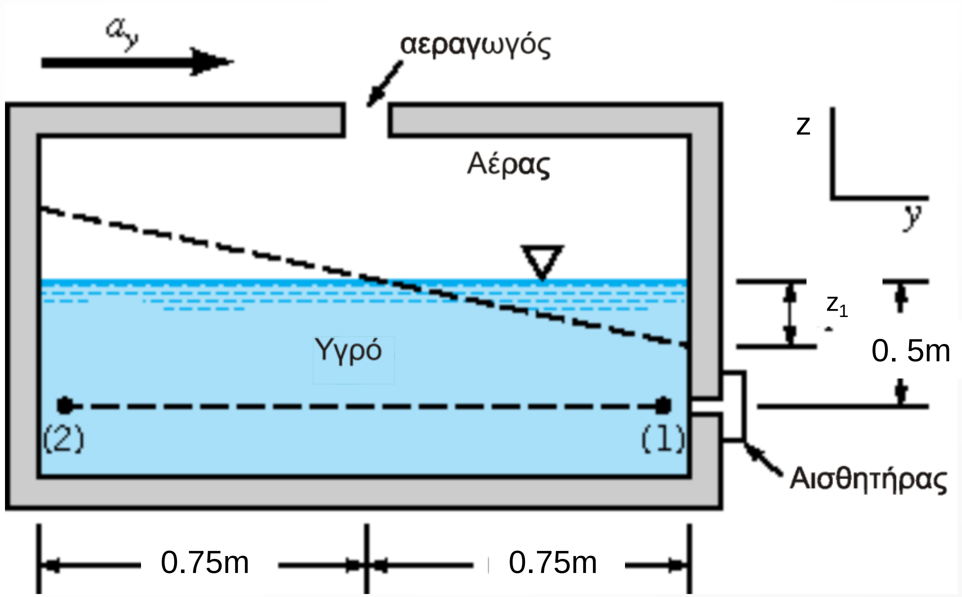
$$\boxed{p = 3188.2 - 487.5\alpha_y}$$

# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού



## *Λύση*

### *Ερώτημα (β)*




**Από την εξίσωση**

$$z_1 = 0.75\left(\frac{\alpha_y}{g}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{z_1}{0.75} = \frac{\alpha_y}{g}$$

**για $z_1$=0.5m έχουμε:**

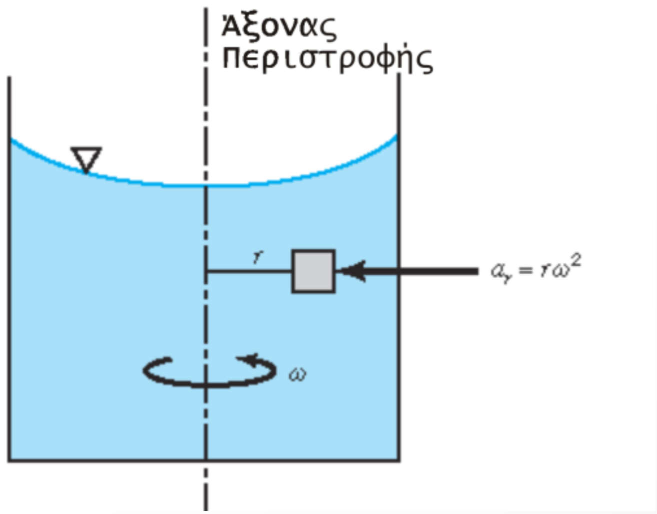
$$\frac{0.5}{0.75} = \frac{\alpha_y^{max}}{g} \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_y^{max} = 6.54\ m/s^2}$$

# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού

## *Περιστροφή Στερεού Σώματος*

- **Θεωρούμε ένα ανοικτό δοχείο με ρευστό το οποίο *περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα* γύρω από έναν άξονα (το ρευστό περιστρέφεται ως στερεό σώμα)**




- **Σε *απόσταση r* από τον άξονα περιστροφής: Το σωματίδιο του ρευστού κινείται με *σταθερή επιτάχυνση $a_r=\omega r^2$***

- ***Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων* από καρτεσιανό (x, y, z) σε σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων (r, θ)**

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \alpha_r$$

$$-\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho \alpha_\theta$$

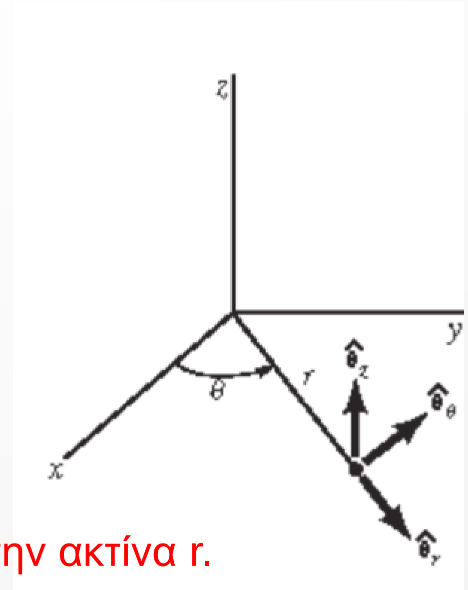
$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma + \rho \alpha_z$$

# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού



## *Περιστροφή Στερεού Σώματος*

$$\left.\begin{array}{l}
\boldsymbol{\alpha}_r = -r\omega^2\vec{\mathbf{e}}_r \Rightarrow -\dfrac{\partial p}{\partial r} = \rho\alpha_r\vec{\mathbf{e}}_r \Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial r} = \rho r\omega^2 \\[2ex]
\alpha_\theta = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\[2ex]
\alpha_z = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \\[2ex]
dp = \dfrac{\partial p}{\partial r}dr + \dfrac{\partial p}{\partial z}dz
\end{array}\right\} \Rightarrow dp = \rho r\omega^2 dr - \rho g dz$$




## *Πίεση για την περίπτωση περιστροφής ρευστού ως στερεό σώμα: Συνάρτηση r και z*

Για dz=0 (οριζόντια επιφάνεια) η πίεση μεταβάλλεται (αυξάνεται) με την ακτίνα r.
Το πιο σημαντικό όμως… (επόμενη διαφάνεια)

# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού

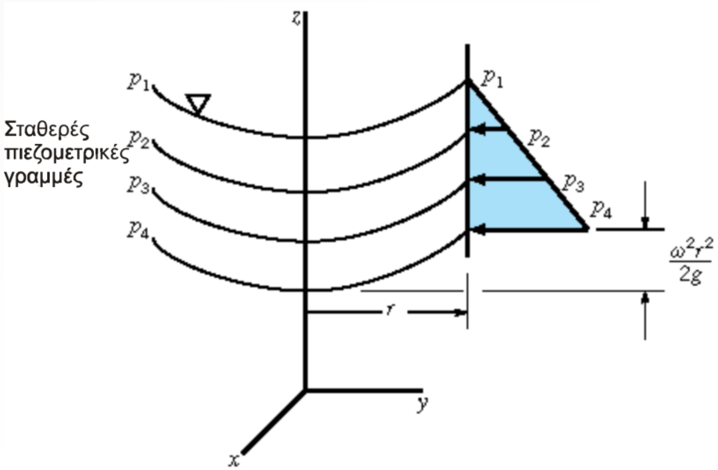


- **Κατά μήκος μίας επιφάνειας με σταθερή πίεση (dp=0):**

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g} \xrightarrow{\text{ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ}} \boxed{z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{σταθερά}}$$

***Επιφάνειες σταθερής πίεσης: Παραβολικές (όχι ευθείες)***

***Ελεύθερη επιφάνεια περιστρεφόμενου ρευστού καμπύλη (όχι επίπεδη)***




- **Για την πίεση έχουμε:**

$$\int dp = \rho\omega^2 \int r dr - \gamma \int dz$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \gamma z + \text{σταθερά}}$$

***Μεταβολή πίεσης με την ακτίνα αλλά για δεδομένη ακτίνα η πίεση μεταβάλλεται υδροστατικά με το z***

# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού



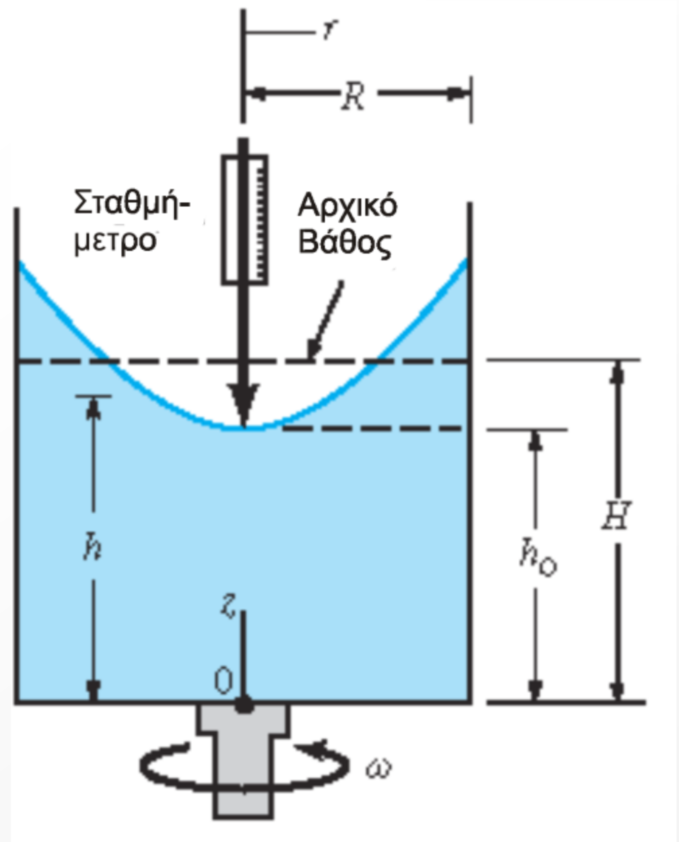
## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.13 σελ. 99-100

Η γωνιακή ταχύτητα ω ενός σώματος ή ενός άξονα μπορεί να μετρηθεί με τη διάταξη του σχήματος μετρώντας με ένα σταθμήμετρο τη διαφορά στάθμης ($H$-$h_0$). Να προσδιορισθεί η σχέση μεταξύ ω και ($H$-$h_0$).

Ενώνουμε με τον άξονα ένα κυλινδρικό δοχείο με νερό.

Όλα μαζί γυρίζουν με μία γωνιακή ταχύτητα ω.

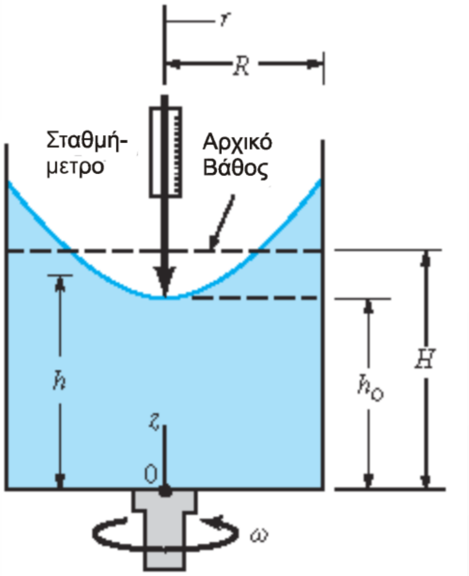
Μετρώντας τη μεταβολή της στάθμης του νερού μέσα στο κυλινδρικό δοχείο μπορούμε να υπολογίσουμε το ω.



# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού

## Λύση

**Με βάση την εξίσωση** $z = \dfrac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{σταθερά}$




O άξονας z στον πυθμένα της δεξαμενής

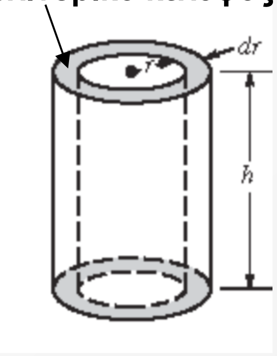
**και το διπλανό σχήμα, το ύψος h της ελεύθερης επιφάνειας μπορεί να προσδιορισθεί ως εξής:**

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0$$

**Ο αρχικός όγκος του ρευστού στη δεξαμενή είναι:**

$$V_{αρχ} = \pi R^2 H$$

**Κυλινδρικό κέλυφος**




**Ο τελικός όγκος του ρευστού υπολογίζεται με βάση τον στοιχειώδη όγκο του σχήματος (όγκος κυλινδρικού κελύφους)**

$$dV = 2\pi r h dr \Rightarrow V_{τελ} = 2\pi \int_0^R r h dr$$

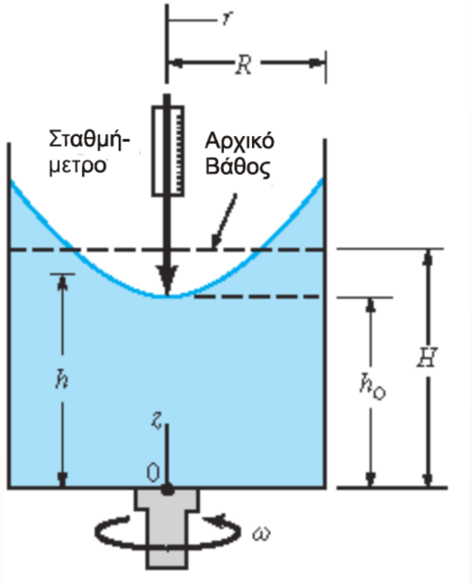
# Δ.3.13. Μεταβολή P από κίνηση στερεού



## Λύση

Επομένως:

$$V_{\tau\varepsilon\lambda} = 2\pi\int_0^R r\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0\right)dr = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + \pi R^2 h_0$$

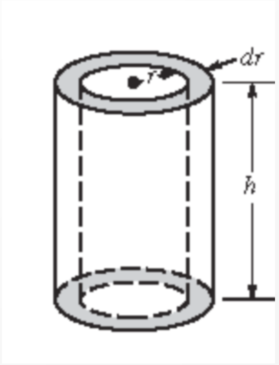



**Ο όγκος του ρευστού στη δεξαμενή πρέπει να παραμείνει σταθερός (δεν έχω υπερχείλιση).**

Επομένως:

$$V_{\alpha\rho\chi} = V_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\pi R^2 H = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + \pi R^2 h_0 \Rightarrow \boxed{H - h_0 = \frac{\omega^2 R^2}{4g}}$$



# Δ.3.14. Ασκήσεις

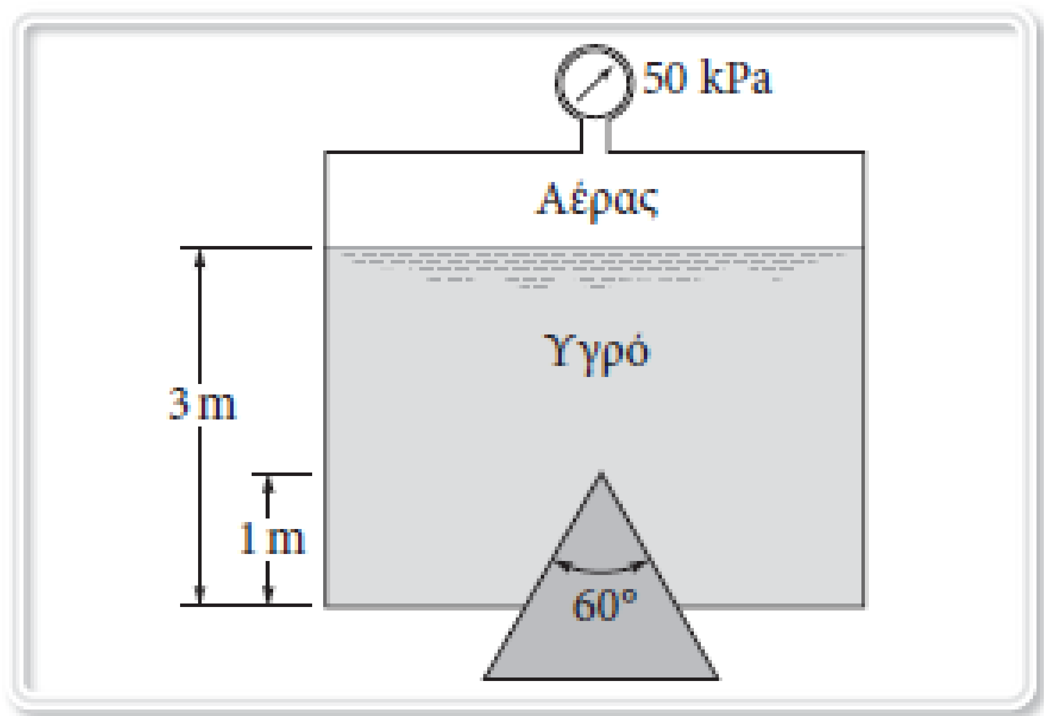


## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ασκήσεις για Λύση 2.15 σελ. 110

Η σφήνα που βρίσκεται στον πυθμένα της δεξαμενής του σχήματος είναι κωνικού σχήματος. Το υγρό της δεξαμενής έχει ειδικό βάρος 27 kN/m$^3$. Υπολογίστε το μέγεθος και τη διεύθυνση της δύναμης που ασκείται στο τμήμα της σφήνας που βρίσκεται μέσα στη δεξαμενή.

Δίνονται:

Όγκος Κώνου, $V_{κώνου} = 1/3*π(d/2)^2h$, d = διάμετρος, h = ύψος



# Δ.3.14. Ασκήσεις

## *Λύση*

Για την ισορροπία:

$$\sum F_{vertical} = 0 \;\Rightarrow\; F_c = p_{air} A + W$$

οπου $F_c$ η δύναμη που ασκεί ο κώνος στο ρευστό.

Επίσης $p_{air} A = (50\,kP_\alpha)\left(\frac{\pi}{4}\right)(d^2) \Rightarrow$

$$p_{air} A = (50kPa)\left(\frac{\pi}{4}\right)(1.155m)^2 = 52.4kN$$

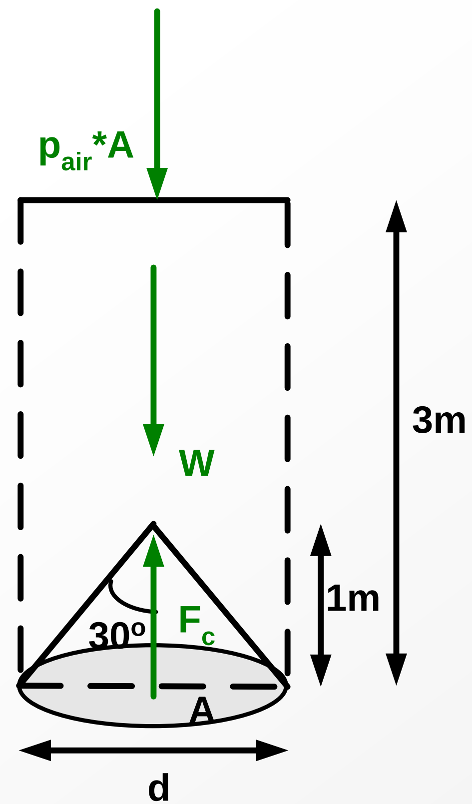
και $W = \gamma\left[\frac{\pi}{4}d^2(3m) - \frac{\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2(1m)\right] \Rightarrow$

$$W = \gamma\pi d^2\left[\frac{3m}{4} - \frac{1m}{12}\right] = (27\frac{kN}{m^3})(\pi)(1.155m)^2\left(\frac{2}{3}m\right) = 75.4kN$$

Επομένως $F_c = 52.4kN + 75.4kN \Rightarrow \boxed{F_c = 128kN}$

***Διεύθυνση***: Στον άξονα του κώνου με φορά προς τα κάτω

**Διάγραμμα δυνάμεων**




$$\tan 30^o = \frac{\frac{d}{2}}{1} = \frac{d}{2} \Rightarrow$$

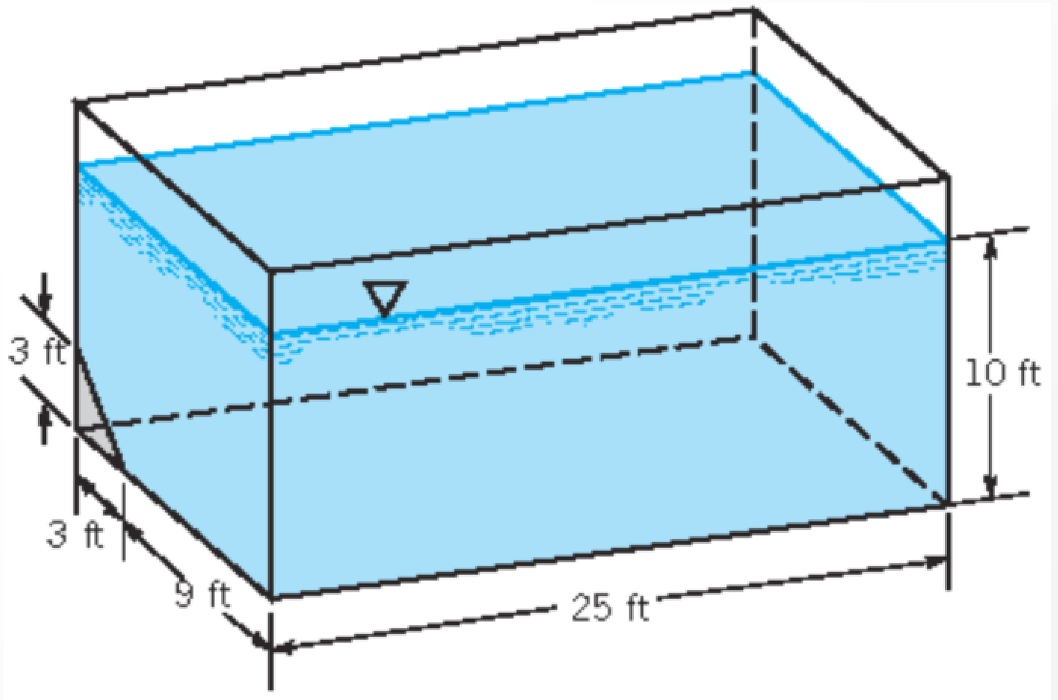
$$d = 2\tan 30^o = 1.155m$$

# Δ.3.14. Ασκήσεις

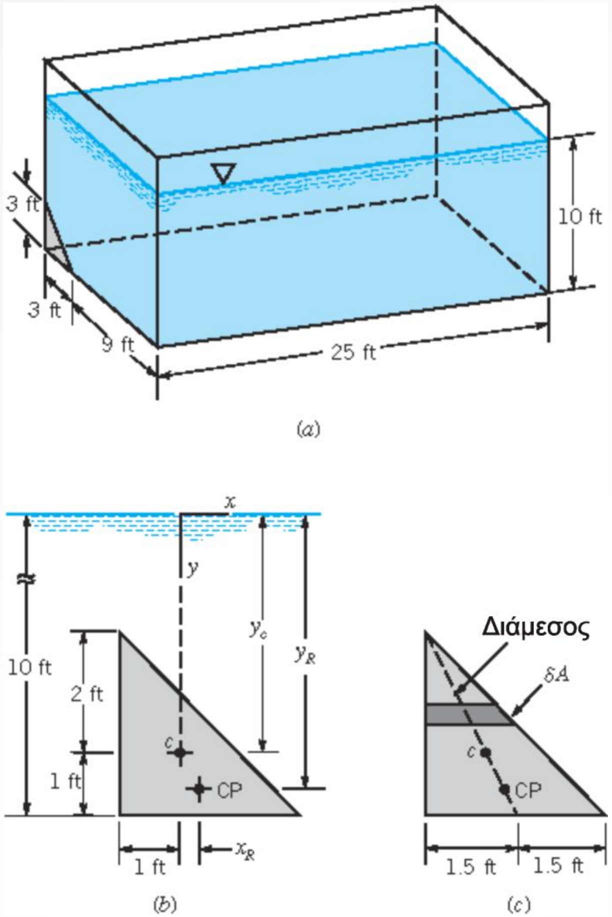


**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ για Υδροστατική Δύναμη σε κεκλιμένη επιφάνεια**

Η δεξαμενή του σχήματος περιέχει θαλασσινό νερό ($\rho$=1025kg/m$^3$) σε ένα βάθος 3.0m. Χρειάζεται να αντικατασταθεί το τριγωνικό κομμάτι στη μία γωνία. Να προσδιορισθεί το μέγεθος και το σημείο εφαρμογής της δύναμης που ασκεί το νερό στην τριγωνική επιφάνεια.



# Δ.3.14. Ασκήσεις




10ft=3m, 2ft=0.6m
1ft=0.3m, 1.5ft=0.45m
3ft=0.9m

## *Λύση*

**Οι διάφορες αποστάσεις φαίνονται στο σχήμα (b)**

$y_c=h_c=(2+10-3)ft=9ft=2.7m$

**Και**

$F_R=\gamma*h_c*A=9.81*1025*2.7*(0.9)*2/2=10995N$

**Η δύναμη αυτή είναι ανεξάρτητη του μήκους της δεξαμενής.**

**Η συντεταγμένη y του κέντρου πίεσης βρίσκεται από τη σχέση:**

# Δ.3.14. Ασκήσεις

## *Λύση*

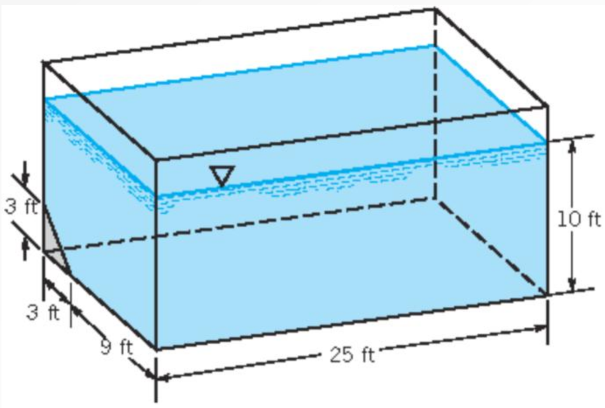
$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c \ , \ I_{xc} = \frac{0.9(0.9)^3}{36} = 0.018 m^4$$

$$y_R = \frac{0.018}{2.7\frac{(0.9*0.9)}{2}} + 2.7 = 2.716 m$$

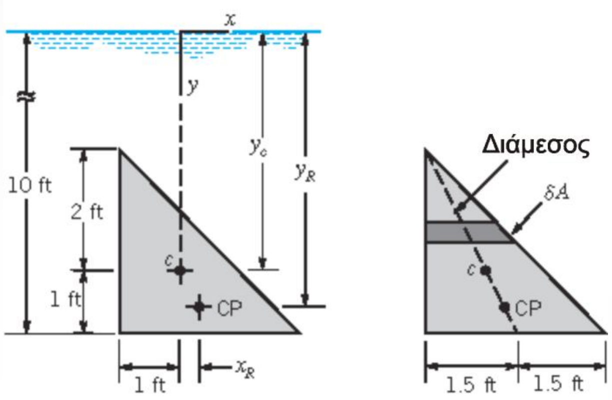
Παρόμοια :

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c \ , \ I_{xyc} = \frac{0.9(0.9)^2}{72} 0.9 = 0.0091 m^4$$

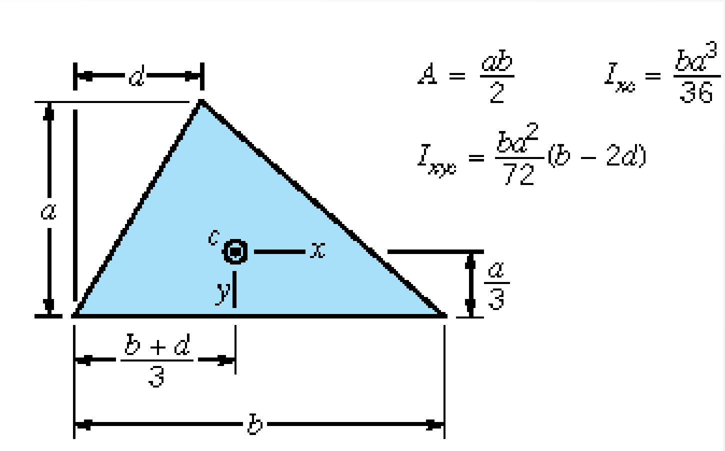
$$x_R = \frac{0.0091}{2.7\frac{(0.9*0.9)}{2}} + 0 = 0.0083 m$$




(a)




(b) (c)



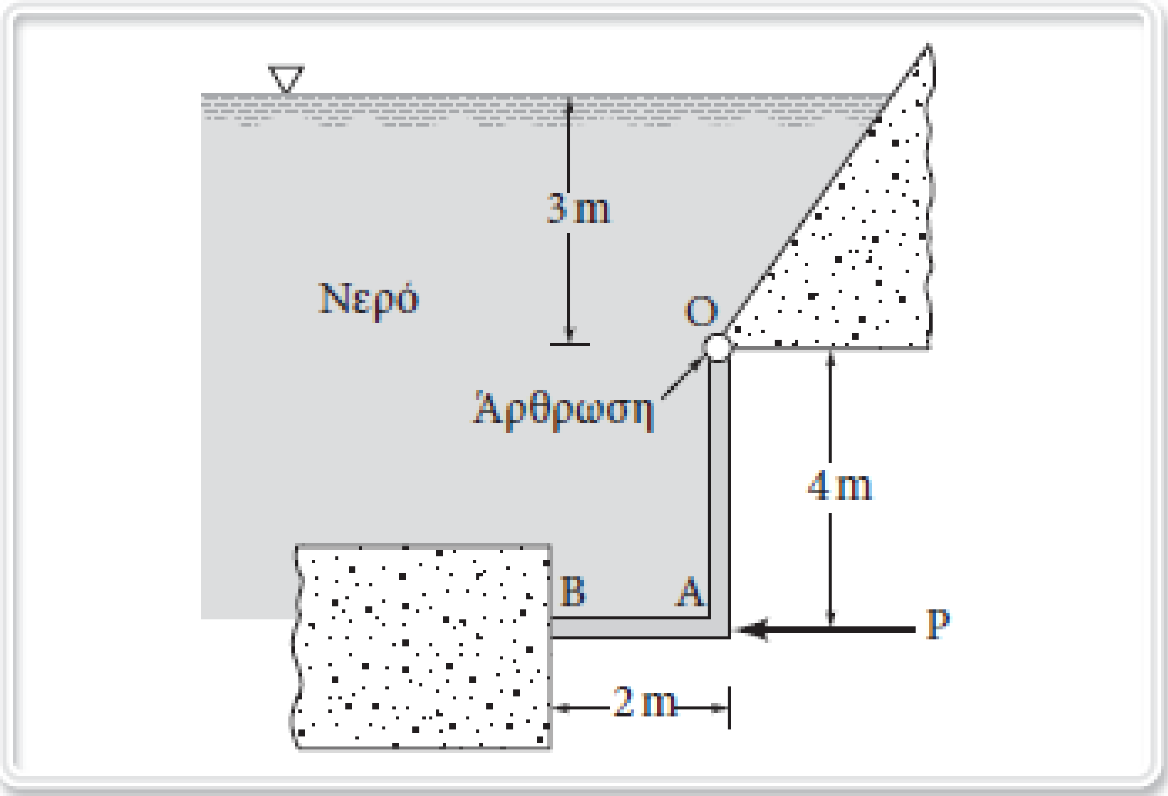
# Δ.3.14. Ασκήσεις



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ασκήσεις για λύση 2.8 σελ. 107**

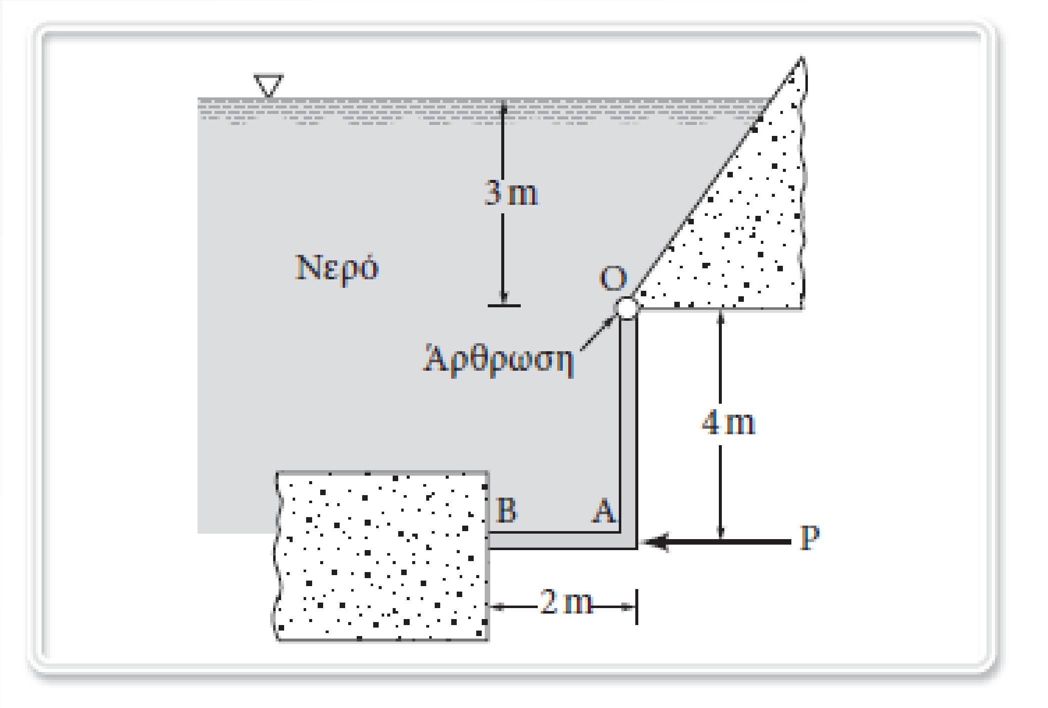
Η θυρίδα ΟΑΒ του σχήματος είναι αρθρωμένη στο Ο.

Ποια είναι η ελάχιστη δύναμη P που απαιτείται για να παραμείνει η θυρίδα κλειστή αν το πλάτος της είναι 3 m. Το βάρος της θυρίδας και η τριβή στην άρθρωση είναι αμελητέα.

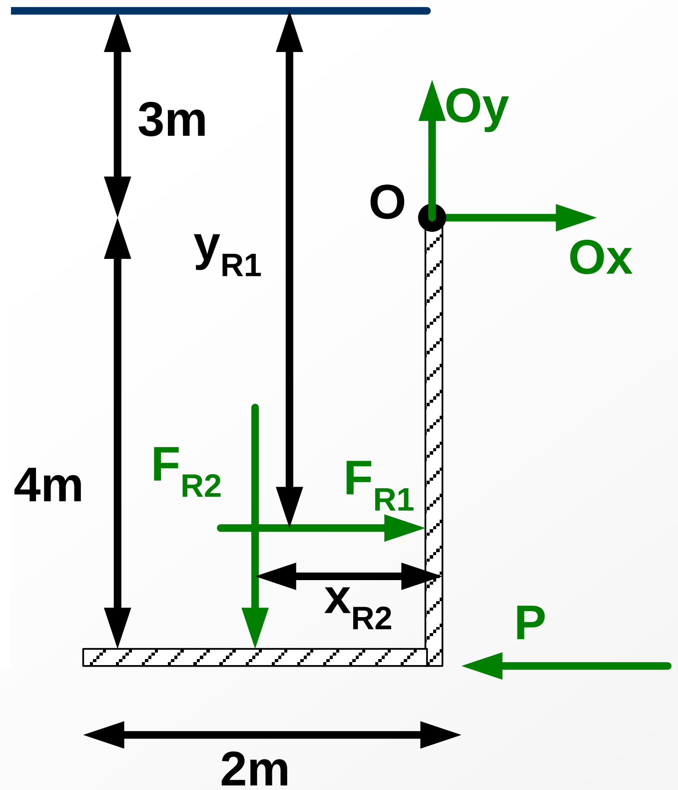


# Δ.3.14. Ασκήσεις

## *Λύση*




**Διάγραμμα ελεύθερου σώματος**




Πλάτος θυρίδας = 3m

## Υπολογισμός δυνάμεων επάνω στη θυρίδα

***Λύση***

$$F_{R1} = \gamma h_{c_1} A_1 \text{ όπου } h_{c_1} = \left(3 + \frac{4}{2}\right) = 5m \text{ και επομένως}$$

$$F_{R1} = (9810\frac{N}{m^3})(5m)(4m * 3m) = 5.89x10^5 N$$

$$F_{R2} = \gamma h_{c_2} A_2 \text{ όπου } h_{c_2} = \left(3 + 4\right) = 7m \text{ και επομένως}$$

$$F_{R2} = (9810\frac{N}{m^3})(7m)(2mx3m) = 4.12 * 10^5 N$$

## Υπολογισμός σημείων εφαρμογής δυνάμεων

$$F_{R1} : y_{R_1} = \frac{I_{xc}}{y_{c_1} A_1} + y_{c_1} = \frac{\frac{1}{12}(3m)(4m)^3}{(5m)(4m * 3m)} + 5m = 5.267m$$

$$F_{R2} : x_{R_2} = \frac{2}{2} = 1m$$

# Δ.3.14. Ασκήσεις

## *Λύση*

**Υπολογισμός ροπών ως προς Ο**

$$\sum M_O \geq 0 \quad \Rightarrow \quad P(4m) \geq F_1(5.267m - 3m) + F_2(1m)$$

$$\Rightarrow \quad P_{min}(4m) = F_1(5.267m - 3m) + F_2(1m)$$

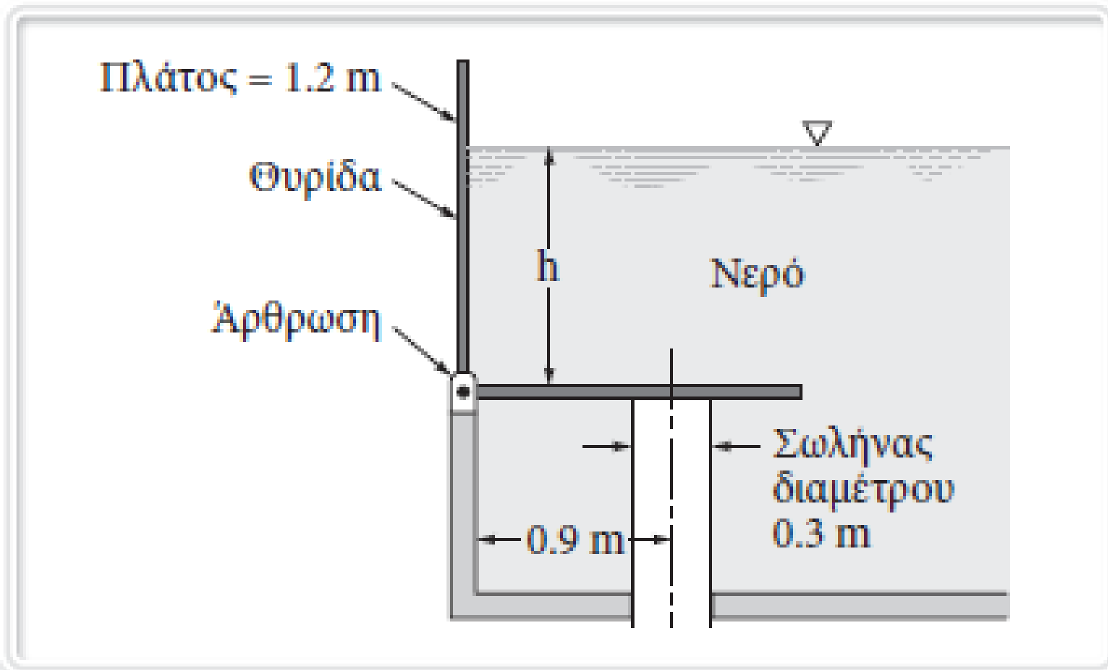
$$\Rightarrow P_{min} = \frac{\left(5.89x10^5 N\right)\left(2.267m\right) + \left(4.12x10^5 N\right)\left(1m\right)}{4m} \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{min} = 436kN}$$

# Δ.3.14. Ασκήσεις

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ σελ. 101-102**

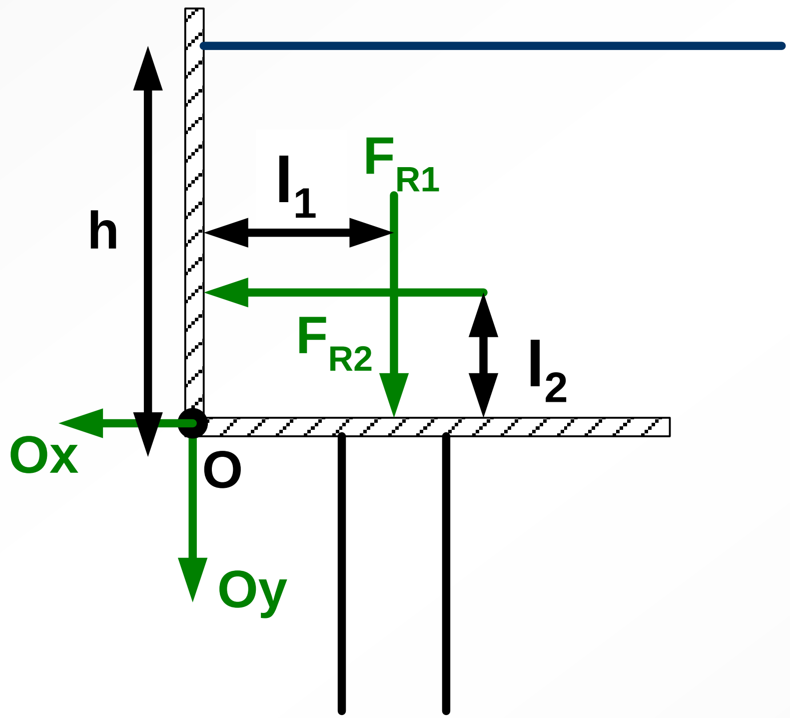
Μία λεπτή γωνιακή θυρίδα πλάτους 1.2 m (κάθετα στο χαρτί) και αμελητέας μάζας είναι ελεύθερη να περιστρέφεται γύρω από την άρθρωση στο σημείο 0 όπως φαίνεται στο σχήμα. Το οριζόντιο τμήμα της θυρίδας καλύπτει ένα σωλήνα διαμέτρου 0.3 m που περιέχει αέρα με ατμοσφαιρική πίεση.
Υπολογίστε το ελάχιστο βάθος νερού h για το οποίο η θυρίδα θα περιστραφεί και θα επιτρέπει στο νερό να εισέλθει στο σωλήνα.



# Δ.3.14. Ασκήσεις



## *Λύση*




**Η δύναμη $F_{R2}$ ασκείται μόνο στο οριζόντιο τμήμα της θυρίδας *σε επαφή με τον σωλήνα* που περιέχει αέρα.**
**Στο υπόλοιπο οριζόντιο τμήμα της θυρίδας έχουμε νερό επάνω και κάτω και άρα *οι υδροστατικές αλληλοεξουδετερώνονται*.**

# Δ.3.14. Ασκήσεις

## *Λύση*

**Υπολογισμός δυνάμεων**

$$F_{R_1} = \gamma h_{c_1} A = 9810\left(\frac{h}{2}\right)(1.2 * h) = 5886h^2$$

$$F_{R2} = \gamma h_{c_2} A = 9810h\left(\frac{\pi * 0.3^2}{4}\right) = 693.43h$$

**Υπολογισμός σημείων εφαρμογής**

$$F_{R1} : l_1 = \frac{h}{3}$$

$$F_{R2} : \; l_2 = 1.0m$$

**Υπολογισμός ροπών ως προς Ο**

$$\sum M_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{R_1} * l_1 = F_{R_2} * l_2 \quad \Rightarrow$$

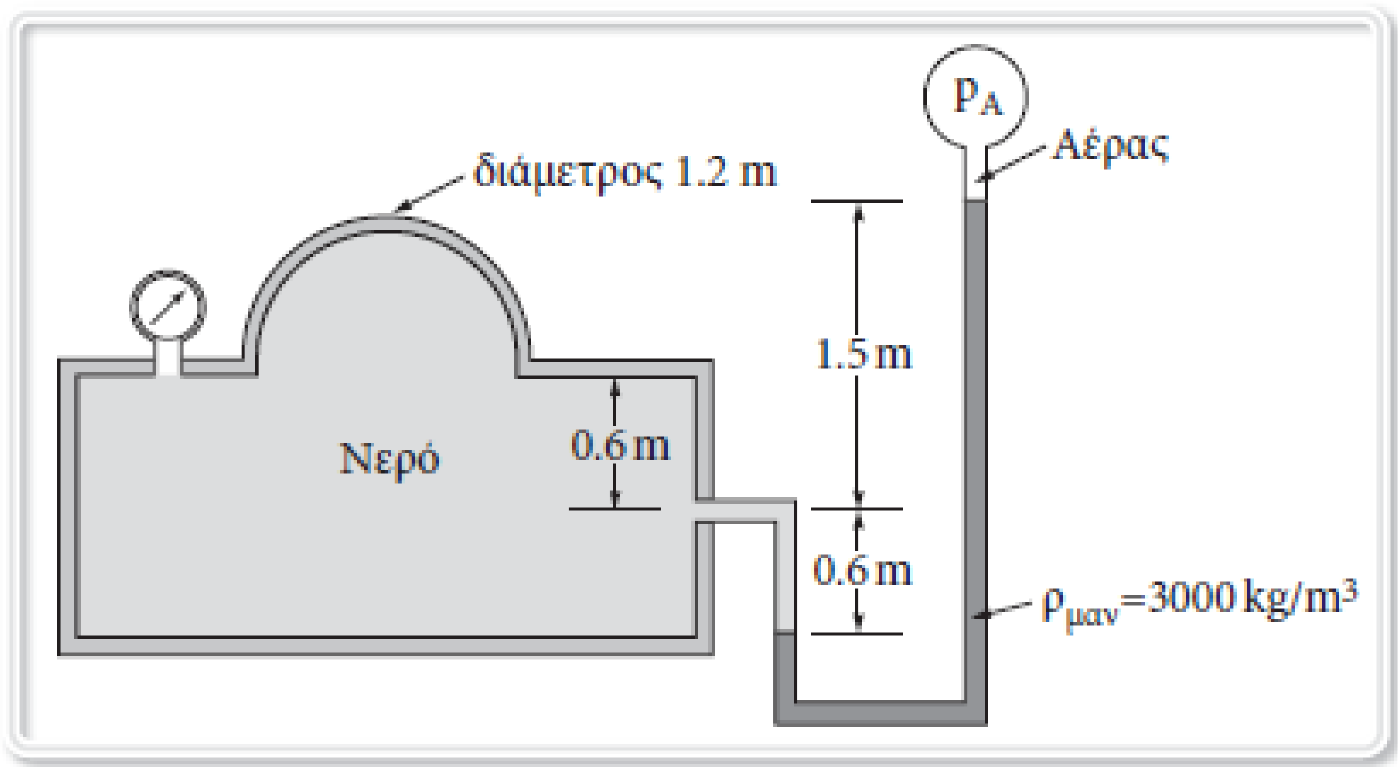
$$5886h^2 * \frac{h}{3} = 693.43h * 1 \quad \Rightarrow \quad 1962h^2 - 693.43 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{h = 0.59m}$$

# Δ.3.14. Ασκήσεις

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ για λύση 2.13 σελ. 109**

Μια κλειστή δεξαμενή είναι γεμάτη με νερό και έχει στο επάνω μέρος ένα ημισφαίριο διαμέτρου 1.2 m. Προσδιορίστε τη δύναμη που ασκεί το νερό στο ημισφαίριο όταν η ένδειξη του μανομέτρου είναι 2.1 m και η πίεση του αέρα στο μανόμετρο είναι $8.69 \cdot 10^4$ Pa.



# Δ.3.14. Ασκήσεις



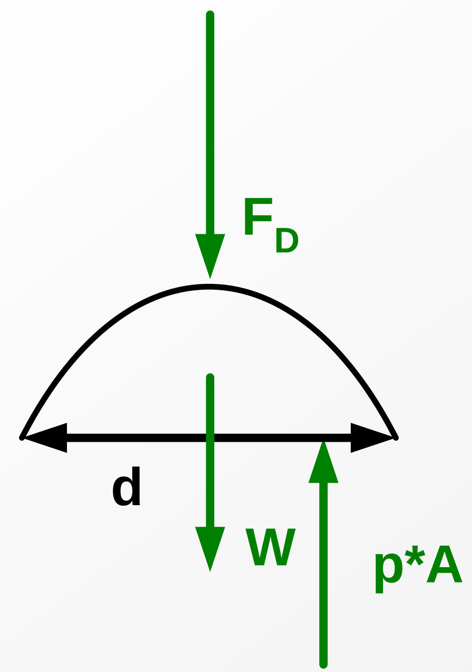
## *Λύση*

**Για την ισορροπία:**

$$\sum F_{vertical} = 0 \;\Rightarrow\; F_D = pA - W$$

**οπου $F_D$ η δύναμη που ασκεί το ημισφαίριο στο ρευστό.**

**Διάγραμμα ελεύθερου σώματος**




**Από το μανόμετρο:**

$$p_A + \gamma_{GF}(1.5 + 0.6) - \gamma_W(0.6 + 0.6) = p \Rightarrow$$

$$p = 8.69 * 10^4 + 3 * 9810 * 2.1 - 9810 * 1.2 \Rightarrow$$

$$p = 136931 \;\; \text{Pa}$$

# Δ.3.14. Ασκήσεις

## Λύση

**Επομένως:**

$$pA = (136931\,P_\alpha)\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(d^2\right) \Rightarrow$$

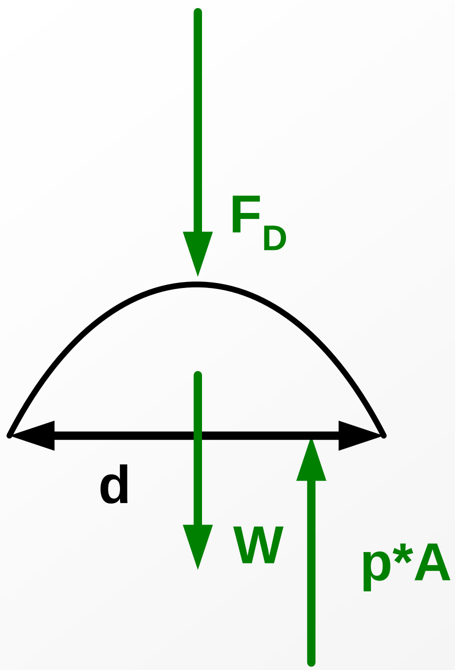
$$pA = (136931\,Pa)\left(\frac{\pi}{4}\right)(1.2m)^2 = 154786.80N$$

$$\text{και}\quad W = \gamma\left[\frac{1}{2}\frac{1}{6}\pi\left(d^3\right)\right] = 9810\frac{N}{m^3}\left(\frac{\pi}{12}\right)(1.2m)^3 = 4435.69N$$

$$\text{Επομένως}\quad F_D = 154786.80N - 4435.69N \Rightarrow$$

$$\boxed{F_c = 150351.11N}$$

**Διάγραμμα ελεύθερου σώματος**



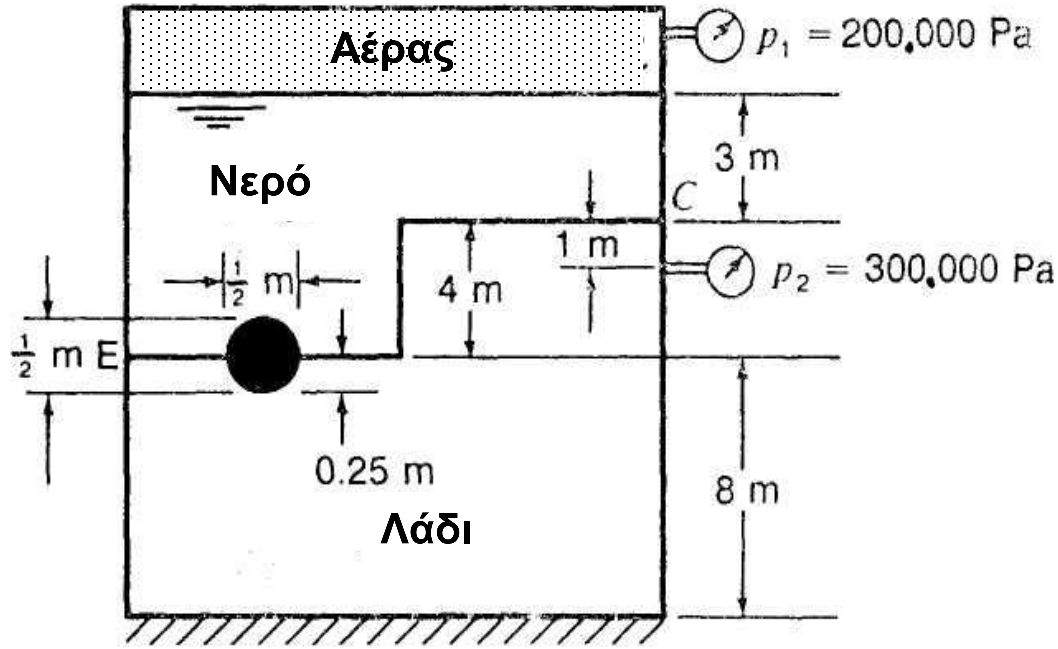

***Διεύθυνση***: Στον άξονα του ημισφαιρίου με φορά προς τα ***πάνω***

# Δ.3.14. Ασκήσεις



**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΛΥΜΕΝΗ ΑΣΚΗΣΗ 2.3 σελ. 103-104**

Η δεξαμενή του σχήματος διαχωρίζεται ερμητικά σε δύο μέρη που περιέχουν νερό και αέρα επάνω και λάδι κάτω ($\rho_{λαδιού}$ = 800 kg/m$^3$).
Μια σφαίρα διαμέτρου d = 0.5 m συγκολλείται στο διαχωριστικό EC και εκτείνεται ισόποσα στο νερό και στο λάδι.
Υπολογίστε το μέγεθος και τη φορά της κάθετης δύναμης που ασκείται στη σφαίρα.

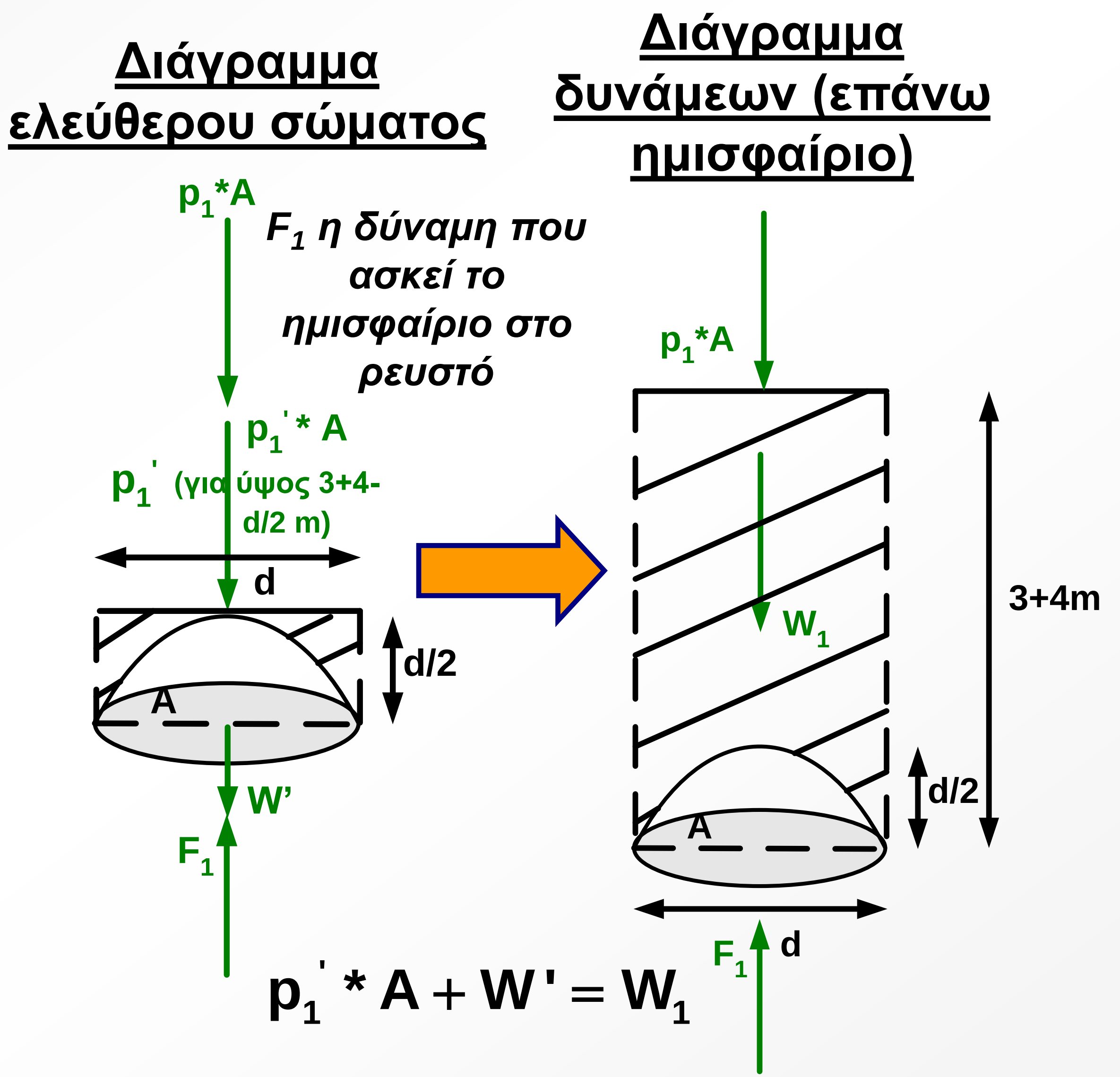


# Δ.3.14. Ασκήσεις

## *Λύση*

- Στο επάνω ημισφαίριο οι δυνάμεις που ασκούνται από τον αέρα και νερό υπολογίζονται με την μεθοδολογία που ακολουθείται για τον υπολογισμό δύναμης σε καμπύλη επιφάνεια

- Θεώρηση κυλίνδρου διαμέτρου 0.5 m και ύψος 0.25 m (d/2) ⇨ $W' = \rho g(V_{κυλινδρ} - V_{ημισφ})$




$$p_1^{'} * A + W' = W_1$$

*Όπου $W_1$ το βάρος του κυλίνδρου ύψους 7m έχοντας αφαιρέσει τον όγκο του ημισφαιρίου*

# Δ.3.14. Ασκήσεις

## Λύση

**Για την ισορροπία:**

$$\sum F_{vertical} = 0 \Rightarrow F_1 = p_1 A + W_1$$

οπου $F_1$ η δύναμη που ασκεί το ημισφαίριο στο ρευστό.

Επίσης $p_1 A = (200 * 10^3 P_\alpha)\left(\frac{\pi}{4}\right)(d^2) \Rightarrow$

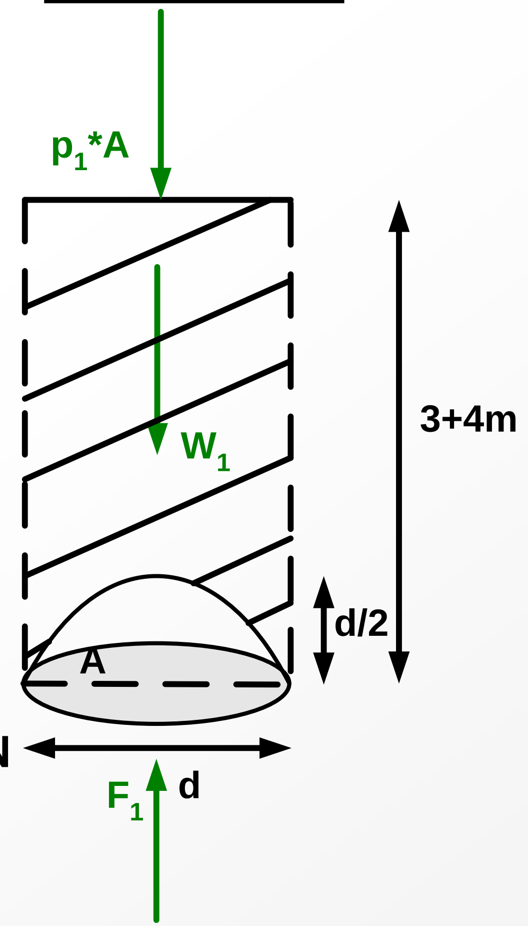
$$p_1 A = (200 * 10^3 Pa)\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.5m)^2 = 39.25kN$$

και $W_1 = \gamma\left[\frac{\pi}{4} d^2 (7m) - \frac{1}{2}\frac{1}{6}\pi\left(d^3\right)\right] \Rightarrow$

$$W_1 = \gamma\pi d^2\left[\frac{7m}{4} - \frac{0.5m}{12}\right] = (9810\frac{N}{m^3})(\pi)(0.5m)^2\left(\frac{20.5}{12}m\right) = 13.16kN$$

Επομένως $F_1 = 39.25kN + 13.16kN \Rightarrow \boxed{F_1 = 52.41kN}$

**Διάγραμμα δυνάμεων (επάνω ημισφαίριο)**




***Διεύθυνση***: Στον άξονα της σφαίρας με φορά προς τα κάτω

# Δ.3.14. Ασκήσεις

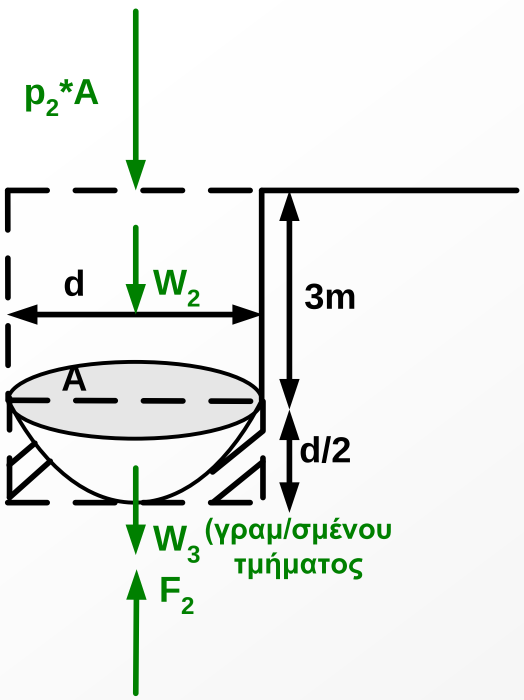
## Λύση

Ανάλογα για το κάτω ημισφαίριο έχουμε:
Για την ισορροπία:

$$\sum F_{vertical} = 0 \Rightarrow F_2 = p_2 A + W_2 + W_3$$

οπου $F_2$ η δύναμη που ασκεί το ρευστό στο ημισφαίριο.

### Διάγραμμα δυνάμεων (κάτω ημισφαίριο)




Είναι $p_2 A = \left(300 * 10^3 P_\alpha\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(d^2\right) \Rightarrow$

$$p_2 A = \left(300 * 10^3 Pa\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.5m)^2 = 58.88kN$$

$$W_2 = \gamma\left[\frac{\pi}{4} d^2 (3m)\right] = (7848\frac{N}{m^3})(\pi)\left(\frac{0.5m}{4}\right)^2 (3m) = 4.62kN$$

$$W_3 = \gamma\left[\frac{\pi}{4} d^2 (\frac{d}{2} m) - \frac{1}{2}\frac{1}{6}\pi\left(d^3\right)\right] \Rightarrow$$

$$W_3 = \gamma\pi d^3\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right] = (7848\frac{N}{m^3})(\pi)(0.5m)^3\left(\frac{1}{24}\right) = 30.80kN$$

Επομένως $F_2 = 58.88kN + 4.62kN + 30.80kN \Rightarrow \boxed{F_2 = 94.3kN}$

***Διεύθυνση***: Στον άξονα του σφαίρας με φορά προς τα επάνω

# Δ.3.14. Ασκήσεις



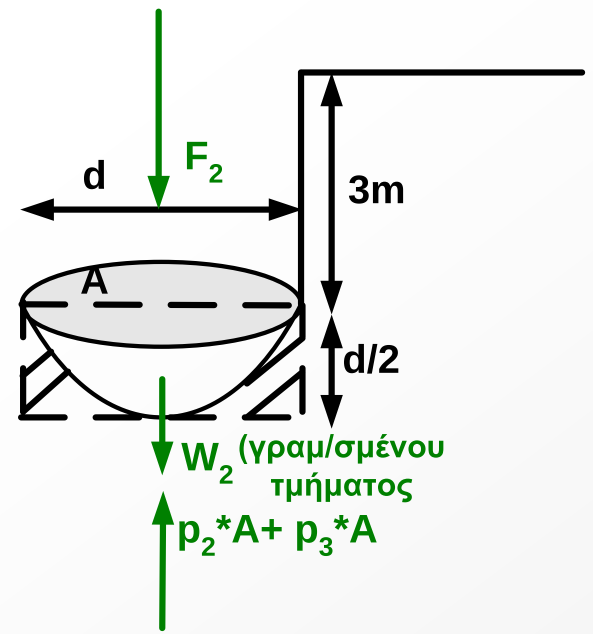
*Λύση*

Ανάλογα για το κάτω ημισφαίριο έχουμε:
Για την ισορροπία:

$$\sum F_{vertical} = 0 \;\Rightarrow\; F_2 = p_2 A + p_3 A - W_2$$

οπου $F_2$ η δύναμη που ασκεί το ημισφαίριο στο ρευστό.

**Διάγραμμα δυνάμεων (κάτω ημισφαίριο)**




Είναι $p_2 A = \left(300 * 10^3 P_\alpha\right)\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\left(d^2\right) \Rightarrow$

$$p_2 A = \left(300 * 10^3 Pa\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.5m)^2 = 58.88kN$$

$$p_3 A = \gamma * (3 + 0.25)\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(d^2\right) \Rightarrow$$

$$p_3 A = 800 * 9.81 * (3 + 0.25)\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(0.5^2\right) = 5.01kN$$

$$W_2 = \gamma\left[\frac{\pi}{4} d^2 (\frac{d}{2} m) - \frac{1}{2}\frac{1}{6}\pi\left(d^3\right)\right] \Rightarrow$$

$$W_3 = \gamma\pi d^3\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right] = (7848\frac{N}{m^3})(\pi)(0.5m)^3\left(\frac{1}{24}\right) = 0.128kN$$

***Διεύθυνση***: Στον άξονα του σφαίρας με φορά προς τα επάνω

Επομένως $F_2 = 58.88kN + 5.01kN - 0.128kN \Rightarrow$

# Δ.3.14. Ασκήσεις



## *Λύση*

**Τελικά, η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα είναι:**

$$F = F_1 - F_2 = 52.41 - 94.3 \Rightarrow \boxed{F = -41.89kN}$$

***Διεύθυνση*: Στον άξονα του σφαίρας με φορά προς τα επάνω**

# Δ.3.14. Ασκήσεις



***Λύση***

**Τελικά, η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα είναι:**

$$F = F_1 - F_2 = 52.41 - 63.76 \Rightarrow \boxed{F = -11.35 kN}$$

***Διεύθυνση***: **Στον άξονα του σφαίρας με φορά προς τα επάνω**

# Δ.3.14. Ασκήσεις

**Πρίνος Π. «ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ», 2014, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, ISBN 978-960-456-419-4.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

2.6 σελ. 71

2.8 σελ. 77-79

γενικό – Δύναμη σε καμπύλη επιφάνεια (Αποχετευτικός αγωγός με ΕΕ)

2.9 σελ. 81-83

ΑΣΚΗΣΕΙΣ για Λύση 2.5 σελ.106

γενικό – Άνωση (Αρχή Αρχιμήδη) Σημαδούρα

2.12 σελ. 96-97

2.13 σελ. 99-100

Ασκήσεις για Λύση 2.15 σελ. 110

Γενικό – Υδροστατική Δύναμη σε κεκλιμένη επιφάνεια Σφήνα πυθμένα δεξαμενής

Ασκήσεις για λύση 2.8 σελ. 107 και 2.13 σελ. 109

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ σελ. 101-102 και 2.3 σελ. 103-104

# Δ.3. Βιβλιογραφία



*Κεφάλαιο 1*

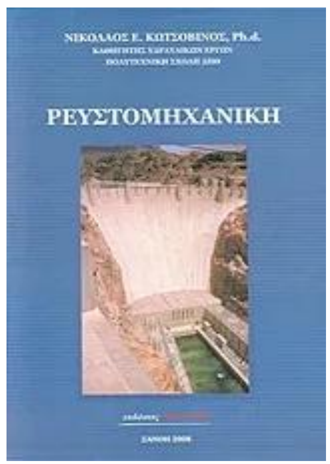
**1. Πρίνος Π. «ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ», 2014, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, ISBN 978-960-456-419-4. Βιβλίο [41963463]**

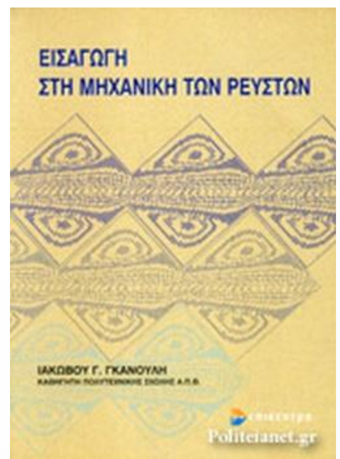
2. Κωτσοβίνος Ν. «ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ», 2008, Εκδόσεις ΣΠΑΝΙΔΗΣ ΜΙΧΑΛΗΣ, ISBN 978-960-6653-34-6. Βιβλίο [833]

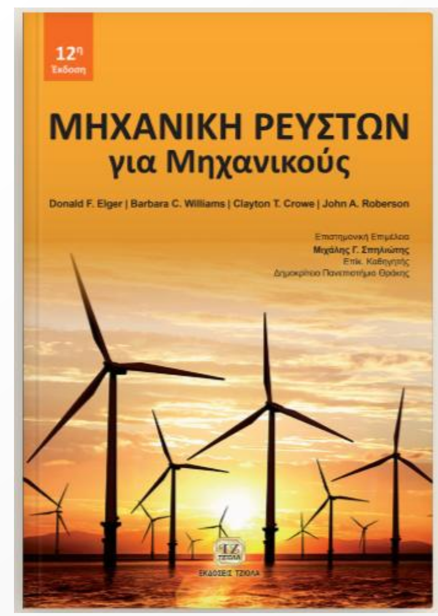
3. Γκανούλης Ι. «ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ», 2007, ΕΠΙΚΕΝΤΡΟ, ISBN 978-960-8731-8-6. Βιβλίο [14945]

***Μεταφρασμένη στα ελληνικά Βιβλιογραφία διαθέσιμη από ΕΥΔΟΞΟ***

4. Elger F. Donald - Williams C. Barbara - Crowe T. Clayton - Roberson A. John. Μηχανική Ρευστών. Επιμέλεια στα Ελληνικά: Μιχάλης Σπηλιώτης Βιβλίο [77106811]

# Δ.3. Επίλογος



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ πολύ για την προσοχή σας !!!