ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Θεωρία και Εφαρμογές για Πολιτικούς Μηχανικούς

Εξάμηνο: **4ο** Κωδικός: **ΤΜΒ111** Μάθημα: **Κορμού**

Διάλεξη **Δ.4. Εξίσωση Bernoulli – Στοιχειώδης Δυναμική Ρευστών**

Διδάσκων υπεύθυνος μαθήματος:

Χρήστος Β. Μακρής

Επίκουρος Καθηγητής (επί θητεία) ΔΠΘ

Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ — Ειδίκευση: Υδραυλική & Περιβαλλοντική Τεχνική
ΜΔΕ Τεχνολογία Υδατικών Πόρων ΕΜΠ — Ειδίκευση: Διαχείριση Παράκτιας Ζώνης
Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ — Ειδίκευση: Υπολογιστική Ρευστοδυναμική – Κυματομηχανική

Αίθουσα ΑΜΘ 3Β – Ισόγειο Κτιρίου Α' Πολ. Μηχ. ΔΠΘ - Ξάνθη, Μάρτιος – Απρίλιος 2025

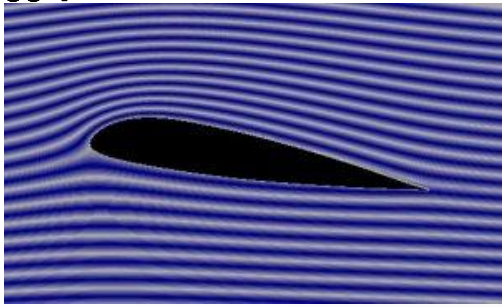
Δ.4. Διάρθρωση Παρουσίασης

1. **2ος Νόμος Νεύτωνα**
2. **F=ma κατά μήκος Ροϊκής Γραμμής**
3. **F=ma κάθετα σε Ροϊκή Γραμμή**
4. **Φυσική ερμηνεία**
5. Στατική, Δυναμική, Ολική Πίεση, Πίεσης ανακοπής
6. Παραδείγματα εφαρμογής Εξίσωσης Bernoulli
    - Ελεύθερες φλέβες
    - Εξωτερικές Ροές
    - Μέτρηση παροχής
7. Γραμμή Ενέργειας και Πιεζομετρική Γραμμή
8. Περιορισμοί χρήσης Εξίσωσης Bernoulli
    - Επίδραση συμπιεστότητας
    - Μη Μόνιμες επιδράσεις
    - Επιδράσεις περιστροφής
9. Λυμένα Παραδείγματα

Δ.4.1. 2ος Νόμος Νεύτωνα

ΚΙΝΗΣΗ ΡΕΥΣΤΟΥ – ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

- ***Στόχος***: Διερεύνηση / Περιγραφή της κίνησης των σωματιδίων του ρευστού

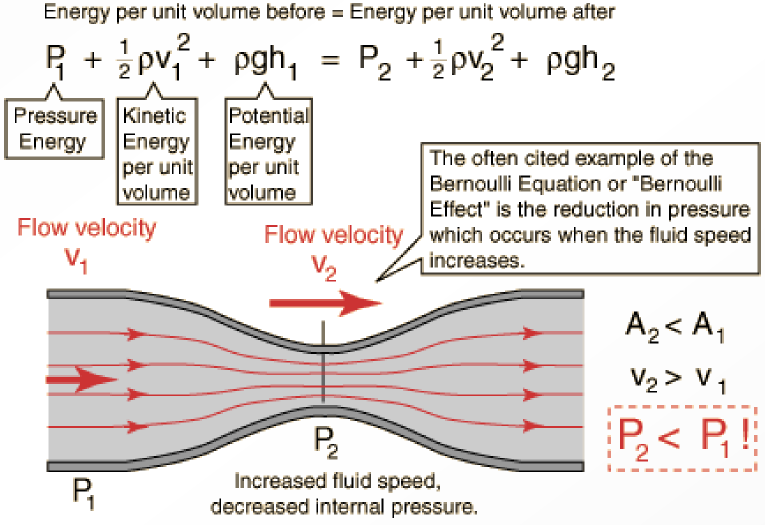


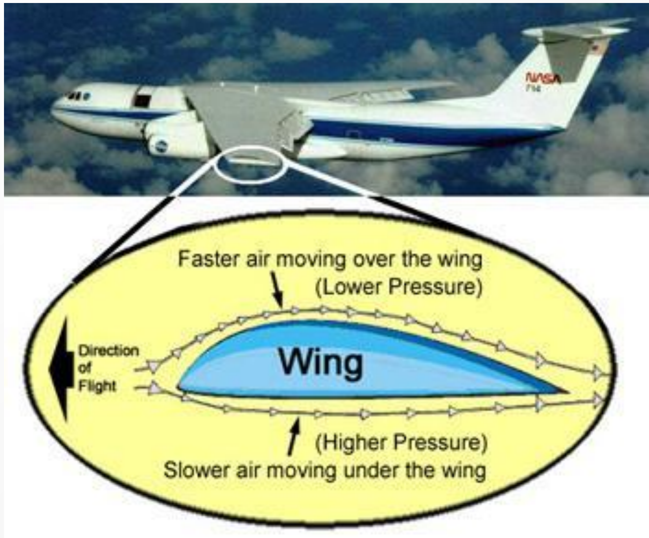
- ***Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα***:

  Δύναμη, Επιτάχυνση: ***F = ma***

  Εφαρμογή στην ***κίνηση*** κάθε σωματιδίου του ρευστού

- ***Εξαγωγή / Εφαρμογή εξίσωσης Bernoulli***





Δ.4.1. 2ος Νόμος Νεύτωνα

ΚΙΝΗΣΗ ΡΕΥΣΤΟΥ – ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

- ***Βασικές Παραδοχές***

1. *Ρευστά χωρίς ιξώδες* (αμελητέες οι διατμητικές τάσεις $\tau = \mu \dfrac{\partial U}{\partial y} \approx 0$)

2. *Κίνηση* ρευστού ***υπό την επίδραση δυνάμεων πίεσης και βαρύτητας*** ⇨ 2ος νόμος του Νεύτωνα: $F_p + F_g = ma$

(Συνολική δύναμη λόγω πίεσης σε ένα σωματίδιο) + (Συνολική δύναμη βαρύτητας στο σωματίδιο) = (μάζα σωματιδίου) x (επιτάχυνση σωματιδίου)

Συστήματα συντεταγμένων: (x, y, z) ή (r, θ, z)

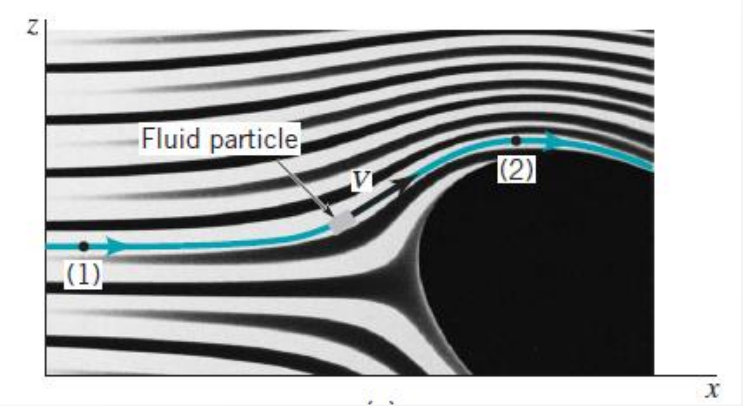
Μελέτη δισδιάστατης ροής (x-z επίπεδο)

3. *Μόνιμη ροή*: Οι ***παράμετροι/χαρακτηριστικά ροής σε ένα συγκεκριμένο σημείο του ρευστού Δ Ε Ν*** μεταβάλλονται ***με το χρόνο*** αλλά μπορεί να μεταβάλλονται ***από σημείο σε σημείο του ρευστού***

$$\boxed{\frac{\partial (QN)}{\partial t} = 0}$$

όπου QN μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε μέγεθος π.χ. p (πίεση) ή U (ταχύτητα)

Επομένως: QN=QN(x, y, z) ή QN=QN(ρ, θ, z)



Δ.4.1. 2ος Νόμος Νεύτωνα

ΜΟΡΦΕΣ ΡΟΗΣ

Κριτήριο το είδος του ρευστού

1α, 1β. Ροή Τέλειου ή Πραγματικού Ρευστού (μη επίδραση ή επίδραση ιξώδους)

1γ, 1δ. Ροή Ασυμπίεστου ή Συμπιεστού Ρευστού (σταθερότητα ή όχι της πυκνότητας)

Κριτήριο ο χώρος περιγραφής

2α, 2β, 2γ. Μονοδιάστατη, Δισδιάστατη και Τρισδιάστατη Ροή

Κριτήριο η μεταβολή στο χώρο

3α. Ομοιόμορφη Ροή: Τα μεγέθη που περιγράφουν τη ροή δεν μεταβάλλονται στο χώρο για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή

3β. Ανομοιόμορφη Ροή: Τα μεγέθη που περιγράφουν τη ροή μεταβάλλονται στο χώρο για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή

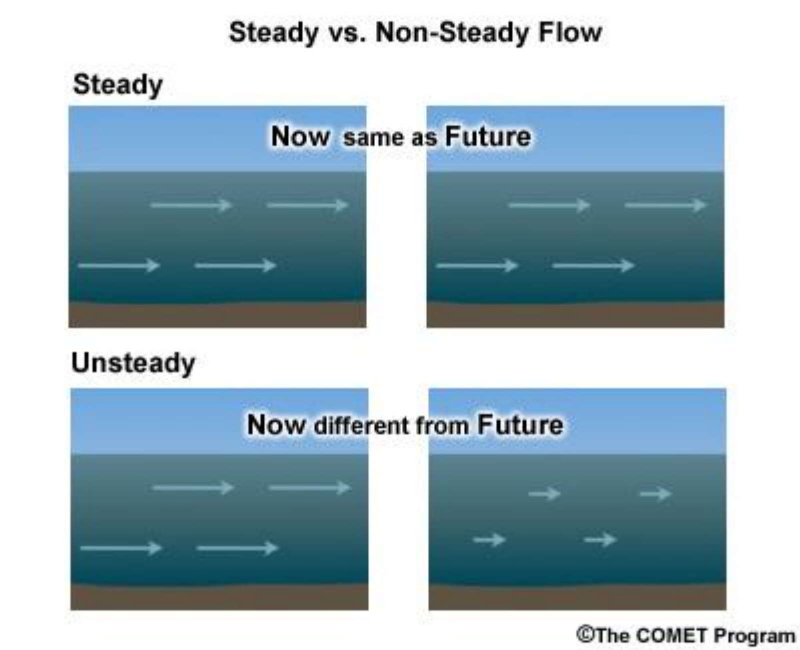
Δ.4.1. 2ος Νόμος Νεύτωνα

ΜΟΡΦΕΣ ΡΟΗΣ

Κριτήριο η μεταβολή στο χρόνο

4α. Μόνιμη Ροή: Τα μεγέθη που περιγράφουν τη ροή δεν μεταβάλλονται με το χρόνο σε ένα συγκεκριμένο σημείο

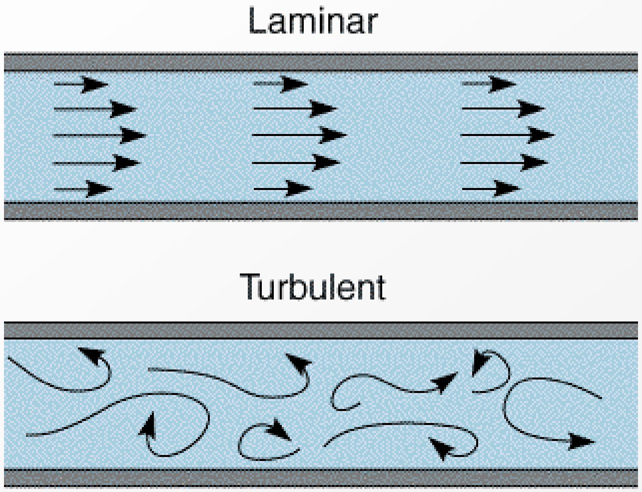
4β. Μη Μόνιμη Ροή: Τα μεγέθη που περιγράφουν τη ροή μεταβάλλονται με το χρόνο σε ένα συγκεκριμένο σημείο



Κριτήριο η συμπεριφορά του ρευστού

5α. Στρωτή Ροή: Ροή ρευστού σε παράλληλες στρώσεις χωρίς αλληλεπίδραση μεταξύ των στρώσεων

5β. Τυρβώδης Ροή: Τα σωματίδια του ρευστού ακολουθούν ακανόνιστη κίνηση



Δ.4.1. 2ος Νόμος Νεύτωνα

Ροϊκές Γραμμές (Streamlines) και Τροχιές (Pathlines) (1)

- ***Ροϊκές Γραμμές (ορισμός)***: **Καμπύλες οι οποίες για** ***δεδομένη χρονική στιγμή εφάπτονται*** **σε κάθε σημείο τους με το διάνυσμα της ταχύτητας ⇨ Κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής** ***η εφαπτομένη*** **σε κάθε σημείο της γραμμής δείχνει την** ***διεύθυνση της ταχύτητας του ρευστού*** **στο σημείο** ***τη δεδομένη χρονική στιγμή***

- ***Ροϊκές Γραμμές***: **Περιγραφή πεδίου ταχυτήτων ενός ρευστού σε κίνηση (διευθύνσεις ταχυτήτων** ***σε ένα σύνολο σημείων*** **για** ***μία δεδομένη χρονική στιγμή*****)**

- ***Τροχιά ενός σωματιδίου ρευστού***: **Γεωμετρικός τόπος των διαδοχικών θέσεων που κατέχει το σωματίδιο** ***σε συνάρτηση με το χρόνο***

- ***Εφαπτόμενες*** **σε μία** ***τροχιά***: ***Διεύθυνση ταχύτητας*** **του** ***σωματιδίου*** **για** ***διαδοχικές χρονικές στιγμές***

Δ.4.1. 2ος Νόμος Νεύτωνα

Ροϊκές Γραμμές (Streamlines) και Τροχιές (Pathlines) (1)

- ***Ροϊκές Γραμμές (ορισμός)***: **Καμπύλες οι οποίες για *δεδομένη χρονική στιγμή εφάπτονται* σε κάθε σημείο τους με το διάνυσμα της ταχύτητας ⇨ Κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής *η εφαπτομένη* σε κάθε σημείο της γραμμής δείχνει την *διεύθυνση της ταχύτητας του ρευστού* στο σημείο *τη δεδομένη χρονική στιγμή***

- ***Ροϊκές Γραμμές***: **Περιγραφή πεδίου ταχυτήτων ενός ρευστού σε κίνηση (διευθύνσεις ταχυτήτων *σε ένα σύνολο σημείων* για *μία δεδομένη χρονική στιγμή*)**

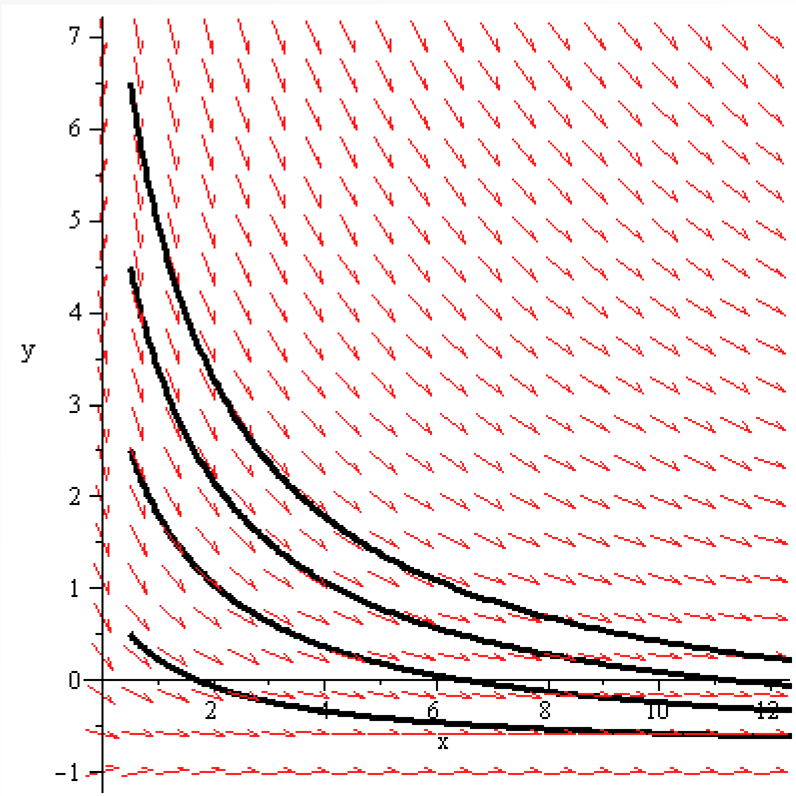
- ***Τροχιά ενός σωματιδίου ρευστού***: **Γεωμετρικός τόπος των διαδοχικών θέσεων που κατέχει το σωματίδιο *σε συνάρτηση με το χρόνο***

- ***Εφαπτόμενες* σε μία *τροχιά*: *Διεύθυνση ταχύτητας* του *σωματιδίου* για *διαδοχικές χρονικές στιγμές***

Δ.4.1. 2ος Νόμος Νεύτωνα

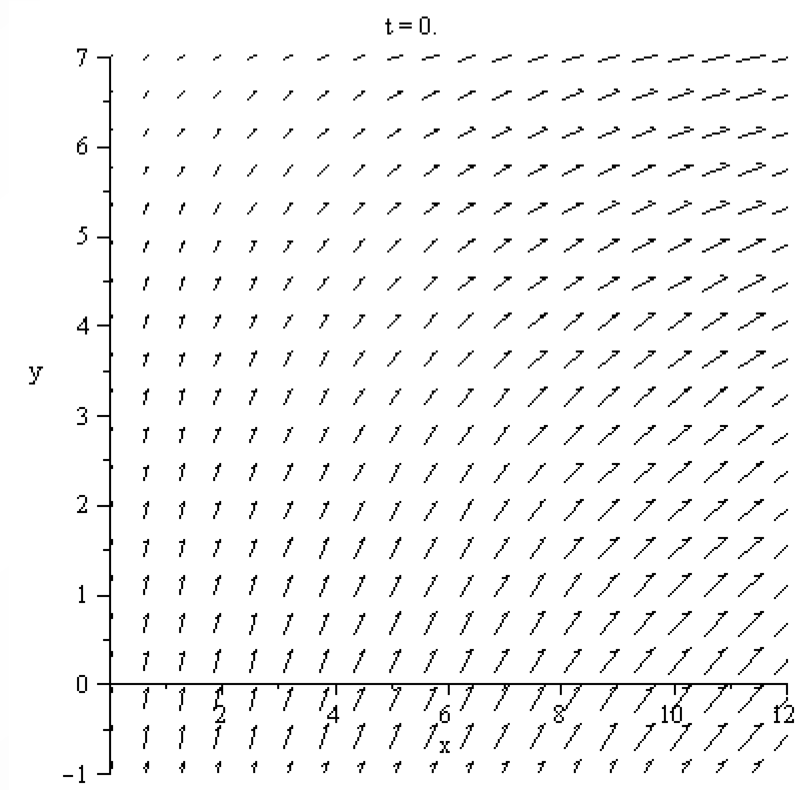
Ροϊκές Γραμμές (Streamlines) και Τροχιές (Pathlines) (2)

Πεδίο ταχυτήτων (t=1.9 sec)



Ροϊκές Γραμμές (t=1.9sec)

Πεδίο ταχυτήτων (t=0-4 sec)



Τροχιές

Δ.4.1. 2ος Νόμος Νεύτωνα

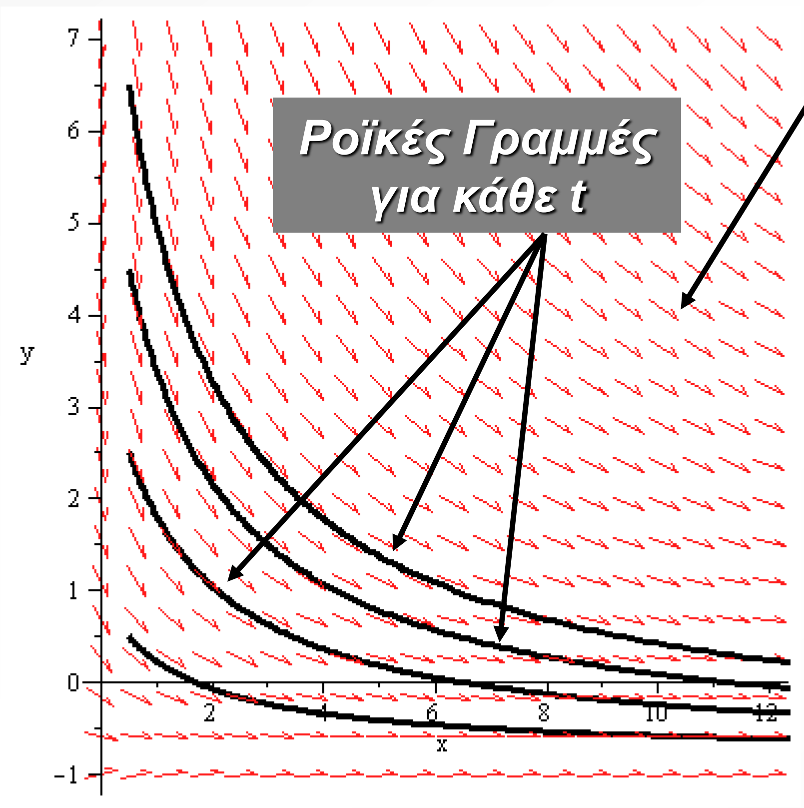
Ροϊκές Γραμμές (Streamlines) και Τροχιές (Pathlines) (3)

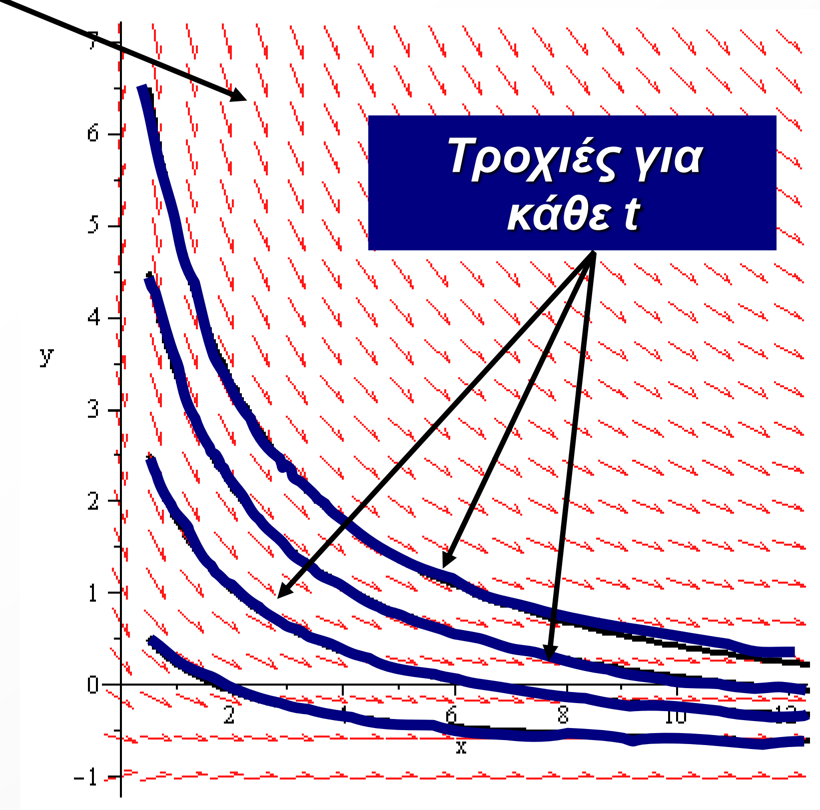
- ***Μόνιμη ροή***: ***V σταθερή στο χρόνο*** κα σε ***μέτρο*** και σε ***διεύθυνση σε συγκεκριμένο σημείο***

Ροϊκές γραμμές σταθερές στο χρόνο

Ροϊκές γραμμές ταυτίζονται με τροχιές

Πεδίο ταχυτήτων (σταθερό για κάθε t)

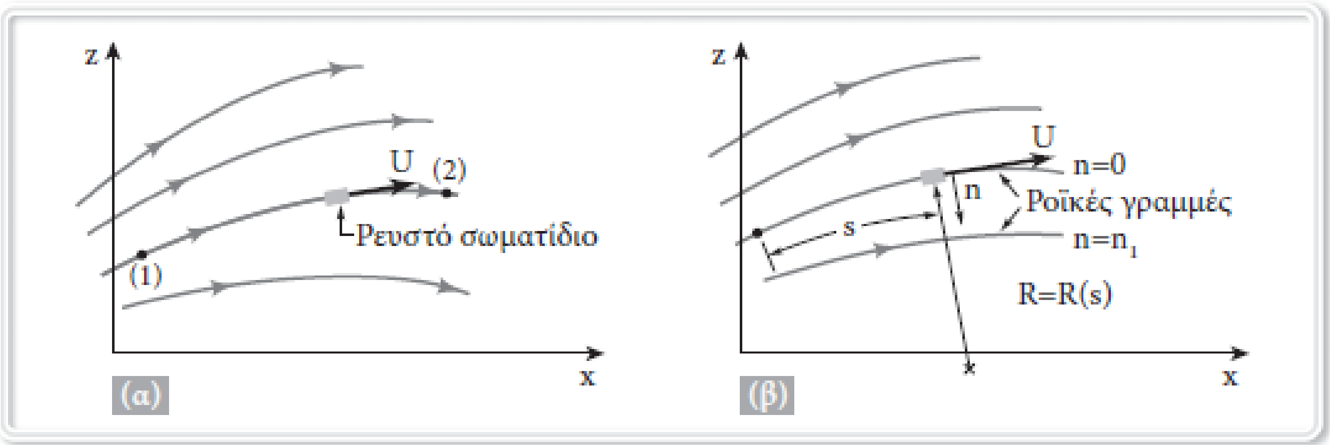




Δ.4.1. 2ος Νόμος Νεύτωνα

Προσδιορισμός της Επιτάχυνσης

- ***Περιγραφή ροής*** **με «ροϊκές» συντεταγμένες (s, n)**



$$U = \frac{ds}{dt}$$

s=s(t): απόσταση από κάποιο αυθαίρετο σημείο κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής

R=R(s): ακτίνα καμπυλότητας της ροϊκής γραμμής

n: συντεταγμένη κάθετη στην s

Νόμος Νεύτωνα στα (s,n): $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} \Rightarrow \alpha_n, \alpha_s$$

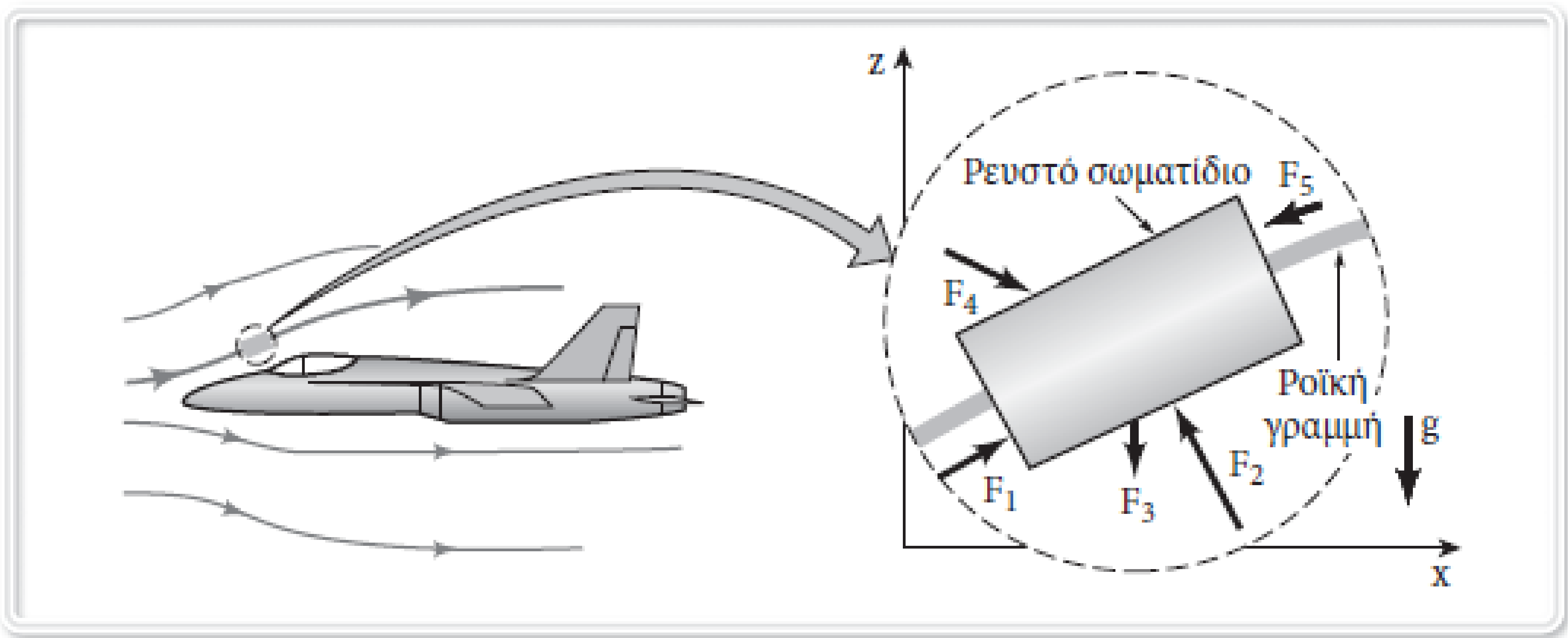
a_n, a_s: συνιστώσες επιταχύνσεις κατά s και n

$$\boxed{\alpha_s = \frac{dU}{dt} = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{\partial U}{\partial s} U}$$

$$\boxed{\alpha_n = \frac{U^2}{R}}$$

Δ.4.1. 2ος Νόμος Νεύτωνα

Προσδιορισμός της Δυνάμεων

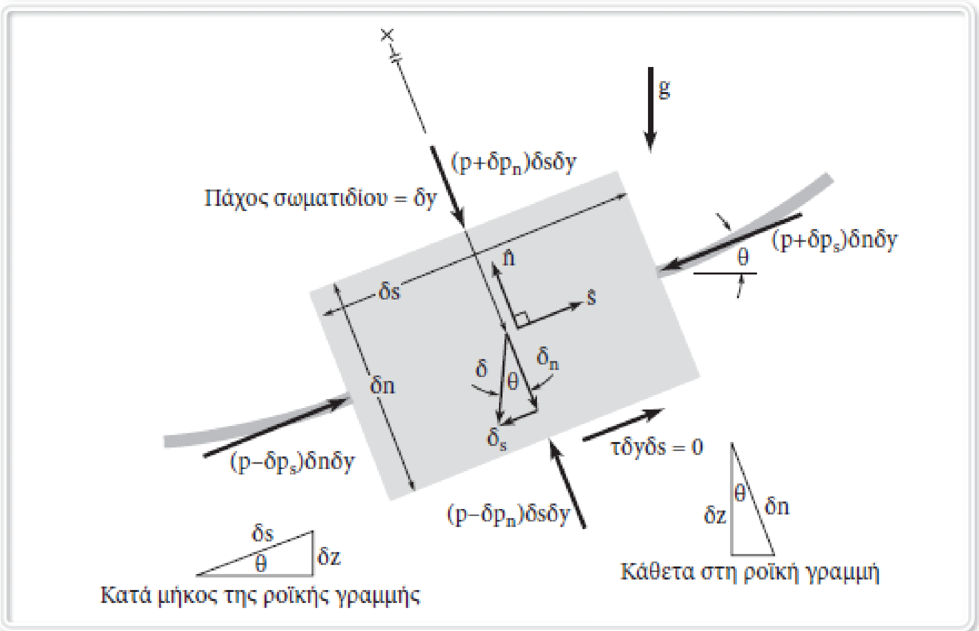


Διάγραμμα «Ελευθέρου Σώματος» για ένα ρευστό σωματίδιο

Δ.4.2. F=ma κατά μήκος Ροϊκής Γραμμής

F=ma κατά Μήκος μίας Ροϊκής Γραμμής (1)

- Για ***μόνιμη ροή*** η εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα ***στη διεύθυνση s*** δίνει:



$$\sum \delta F_s = \delta m a_s = \delta m \left(U \frac{\partial U}{\partial s} \right) \Rightarrow$$

$$\sum \delta F_s = (\rho \delta V) \left(U \frac{\partial U}{\partial s} \right) \quad (1)$$

- Η ***συνιστώσα του βάρους*** στην διεύθυνση μίας ροϊκής γραμμής εξαρτάται από τη γωνία της ροϊκής γραμμής:

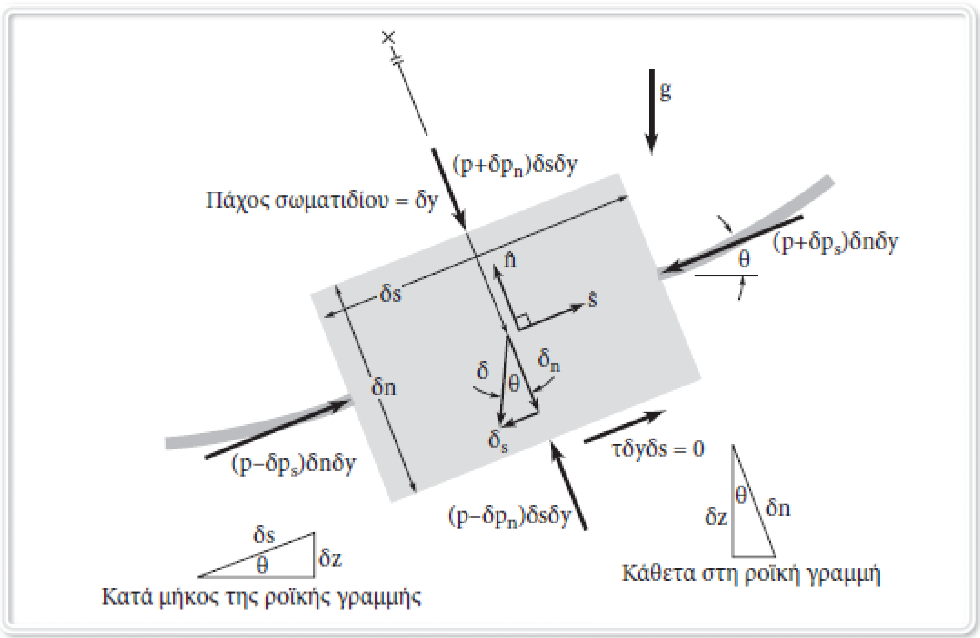
$$\delta W_s = -\delta W \sin\theta = -(\gamma \delta V) \sin\theta$$

- Η ***τελική δύναμη λόγω πίεσης*** στη διεύθυνση s προσδιορίζεται από την ***κλίση (βαθμίδα) πίεσης***:

$$\delta F_{ps} = -\frac{\partial p}{\partial s} \delta V$$

Δ.4.2. F=ma κατά μήκος Ροϊκής Γραμμής

F=ma κατά Μήκος μίας Ροϊκής Γραμμής (2)



- **Η εξίσωση (1) τελικά γίνεται:**

$$\sum \delta F_s = (\rho \delta V)\left(U\frac{\partial U}{\partial s}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{-\gamma \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho U \frac{\partial U}{\partial s} = \rho \alpha_s} \quad (2)$$

Φυσική Σημασία:

Η μεταβολή της ταχύτητας του ρευστού σωματιδίου εξαρτάται από την κλίση πίεσης και από το βάρος του σωματιδίου κατά μήκος της ροϊκής γραμμής

Δ.4.2. F=ma κατά μήκος Ροϊκής Γραμμής

F=ma κατά Μήκος μίας Ροϊκής Γραμμής (3)

- Η εξίσωση (2) κατά ***μήκος μίας ροϊκής γραμμής*** γράφεται:

$$-\gamma\frac{dz}{ds}-\frac{dp}{ds}=\frac{1}{2}\rho\frac{d\left(U^2\right)}{ds}$$

απλοποιείται σε: $$dp+\frac{1}{2}\rho d\left(U^2\right)+\gamma dz=0$$

και με ολοκλήρωση γίνεται:

$$\int\frac{dp}{\rho}+\frac{1}{2}U^2+gz=c$$ (c=σταθερά ολοκλήρωσης)

- Για ***ρ=σταθερό (ασυμπίεστη ροή)*** έχουμε την ***εξίσωση Bernoulli***

$$\boxed{p+\frac{1}{2}\rho U^2+\gamma z=\text{σταθερό}}$$

Για μόνιμη, ασυμπίεστη ροή σε τέλειο ρευστό κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής

Δ.4.2. F=ma κατά μήκος Ροϊκής Γραμμής

F=ma κατά Μήκος μίας Ροϊκής Γραμμής (4)

- Η ***εξίσωση Bernoulli*** μπορεί να γραφεί και με μορφή ***«φορτίων»*** ως εξής:

$$\boxed{\frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} + z = \text{σταθερό}}$$

$\frac{p}{\gamma}$ → ***«Φορτίο» πίεσης***

$\frac{U^2}{2g}$ → ***«Φορτίο» ταχύτητας***

z → ***«Φορτίο» ύψους ή δυναμικό «φορτίο»***

https://www.youtube.com/watch?v=DW4rItB20h4&ab_channel=TheEfficientEngineer

Φυσική Σημασία Εξίσωσης Bernoulli:

Για μόνιμη, ασυμπίεστη ροή σε τέλειο ρευστό κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής το «φορτίο» λόγω πίεσης, ταχύτητας και ύψους παραμένει ΣΤΑΘΕΡΟ

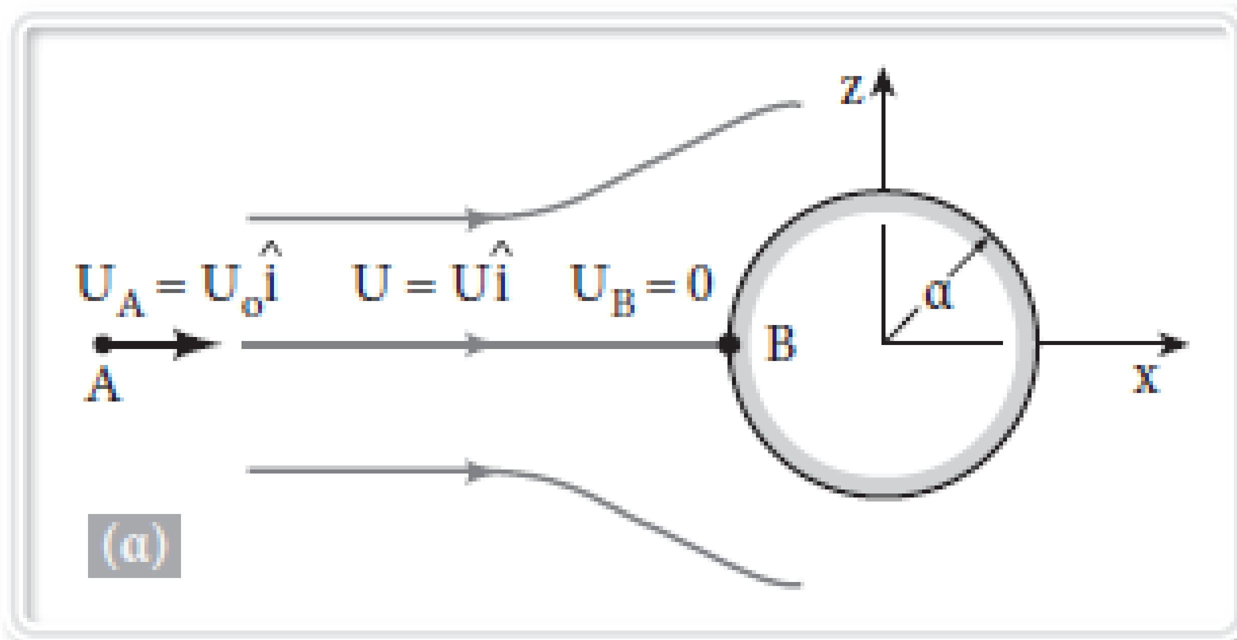
Δ.4.2. F=ma κατά μήκος Ροϊκής Γραμμής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1 σελ. 125-126

Εξετάζουμε την μη συνεκτική (τέλειο ρευστό), ασυμπίεστη, μόνιμη ροή κατά μήκος της ροϊκής γραμμής Α-Β μπροστά από μία σφαίρα ακτίνας α. Η ταχύτητα ροής κατά μήκος της ροϊκής αυτής γραμμής δίνεται από τη σχέση:

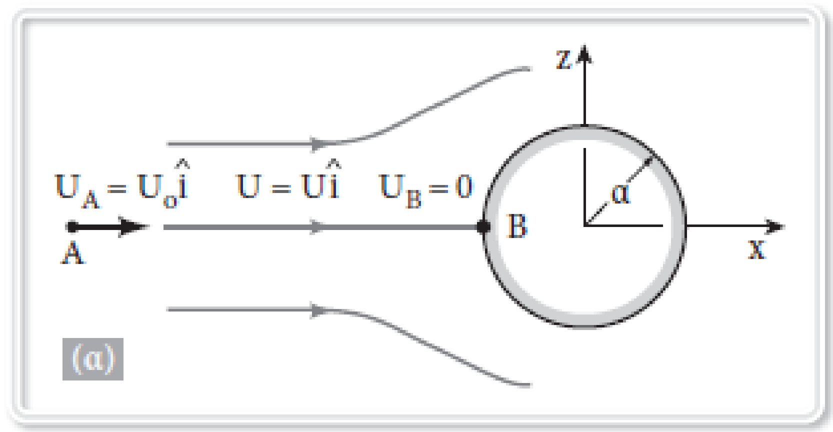
$$U = U_0\left(1 + \frac{\alpha^3}{x^3}\right)$$

Να προσδιορισθεί η μεταβολή της πίεσης από το σημείο Α μακριά από τη σφαίρα ($x_A=-\infty$ και $U_A=U_0$) στο σημείο Β επάνω στη σφαίρα ($x_B=-\alpha$ και $U_B=0$)



Δ.4.2. F=ma κατά μήκος Ροϊκής Γραμμής

Λύση



Από την Εξ. (2) για ροή μη συνεκτική, μόνιμη και sinθ=0 προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho U \frac{\partial U}{\partial s}$$

Με τη δεδομένη σχέση για την ταχύτητα, ο όρος της επιτάχυνσης γράφεται:

$$U\frac{\partial U}{\partial s} = U\frac{\partial U}{\partial x} = U_0\left(1+\frac{\alpha^3}{x^3}\right)\left(-\frac{3U_0\alpha^3}{x^4}\right) = -3U_0^2\left(1+\frac{\alpha^3}{x^3}\right)\frac{\alpha^3}{x^4}$$

Προκύπτει ότι $U\frac{\partial U}{\partial s} < 0$ **, δηλαδή το ρευστό επιβραδύνεται**

Επομένως:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3\rho\alpha^3 U_0^2\left(1+\frac{\alpha^3}{x^3}\right)}{x^4}$$

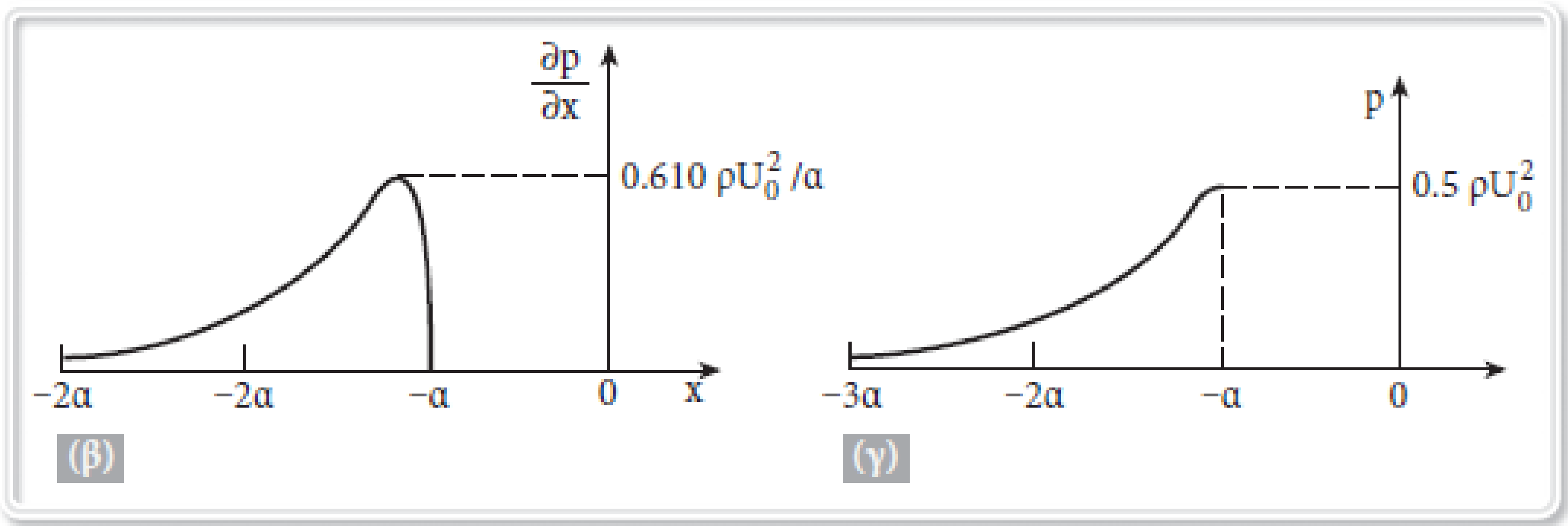
Ολοκληρώνοντας από -∞ έως x:

$$p = -\rho U_0^2\left[\left(\frac{\alpha^3}{x^3}\right) + \frac{(\alpha/x)^6}{2}\right]$$

Δ.4.2. F=ma κατά μήκος Ροϊκής Γραμμής

Λύση

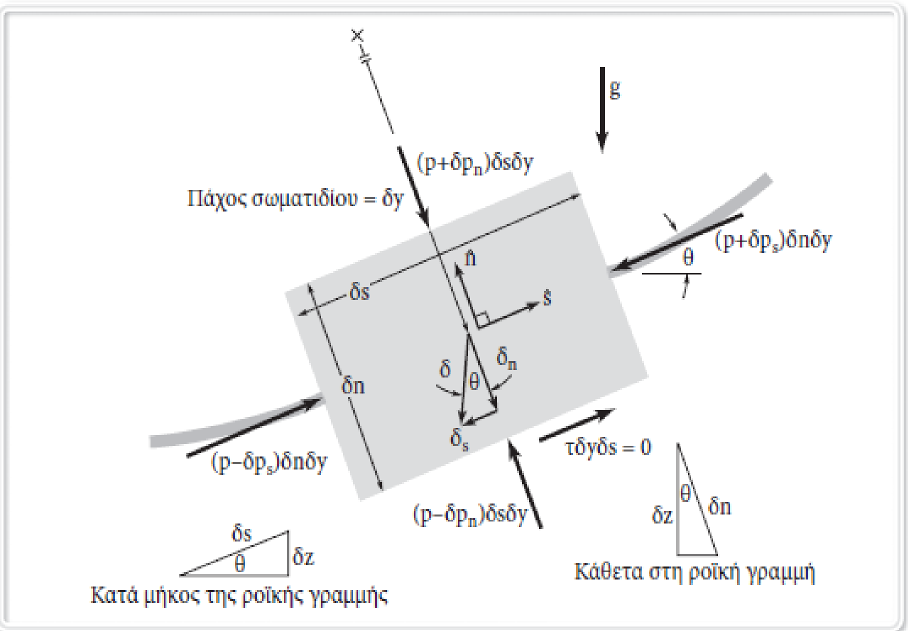
Το σχήμα (b) δείχνει τη μεταβολή του ∂p/ ∂x κατά μήκος της γραμμής και το (c) τη μεταβολή της πίεσης



Δ.4.3. F=ma κάθετα σε Ροϊκή Γραμμή

F=ma Κάθετα σε μία Ροϊκή Γραμμή (1)

- Για ***μόνιμη ροή*** η εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα ***στη διεύθυνση n*** δίνει:



$$\sum \delta F_n = \delta m a_n = \delta m \left(\frac{U^2}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\sum \delta F_n = \frac{(\rho \delta V) U^2}{R} \qquad (3)$$

Η *συνιστώσα του βάρους* στην διεύθυνση n είναι:

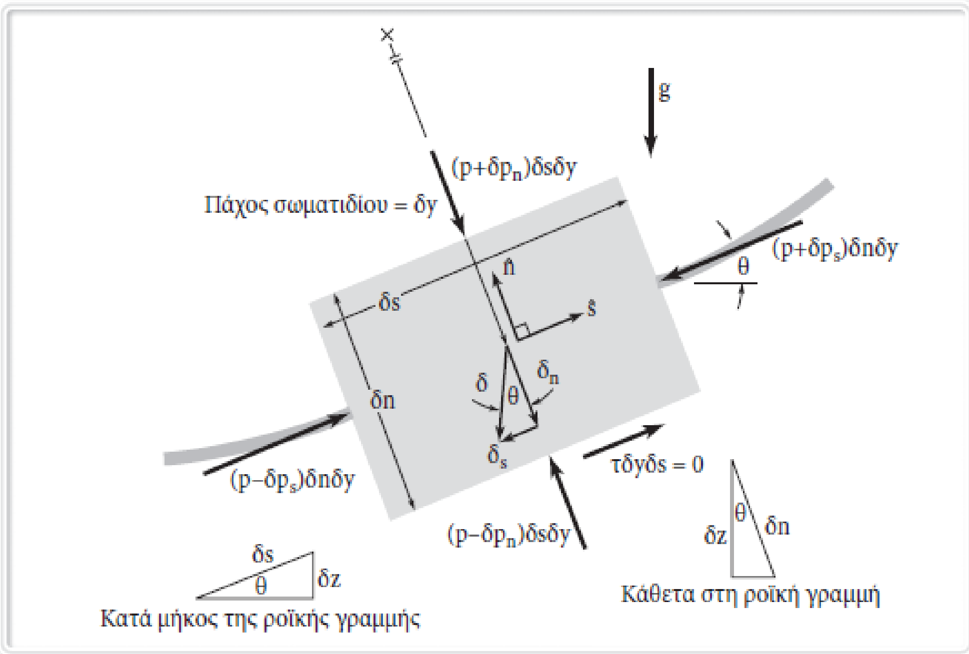
$$\delta W_n = -\delta W \cos\theta = -(\gamma \delta V)\cos\theta$$

- **Η *συνιστώσα της δύναμης λόγω πίεσης* στη διεύθυνση n είναι:**

$$\delta F_{pn} = -\frac{\partial p}{\partial n}\delta V$$

Δ.4.3. F=ma κάθετα σε Ροϊκή Γραμμή

F=ma Κάθετα σε μία Ροϊκή Γραμμή (2)



- **Η εξίσωση (3) τελικά γίνεται:**

$$-\gamma\delta V\cos\partial - \frac{\partial p}{\partial n}\delta V = -\frac{\rho\delta V U^2}{R} \quad \text{ή}$$

$$\boxed{-\gamma\frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho U^2}{R}} \quad (4)$$

Φυσική Σημασία:

Η μεταβολή της διεύθυνσης της ροής ενός σωματιδίου οφείλεται στη κλίση πίεσης και το βάρος του σωματιδίου στη διεύθυνση n

Δ.4.3. F=ma κάθετα σε Ροϊκή Γραμμή

F=ma Κάθετα σε μία Ροϊκή Γραμμή (3)

- Για αμελητέα βαρύτητα ή οριζόντια ροή έχουμε:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho U^2}{R}$$

Αύξηση της πίεσης με την απόσταση από το κέντρο καμπυλότητας

- Ολοκλήρωση στη διεύθυνση n (ολοκλήρωση Εξ. 4) δίνει:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \int \frac{U^2}{R} dn + gz = \text{σταθερό}$$

Κάθετα σε μία ροϊκή γραμμή

- Για ***μόνιμη***, ***ασυμπίεστη*** ροή σε ***τέλειο (μη-συνεκτικό) ρευστό*** έχουμε:

$$\boxed{p + \rho \int \frac{U^2}{R} dn + \gamma z = \text{σταθερό}}$$

Κάθετα σε μία ροϊκή γραμμή

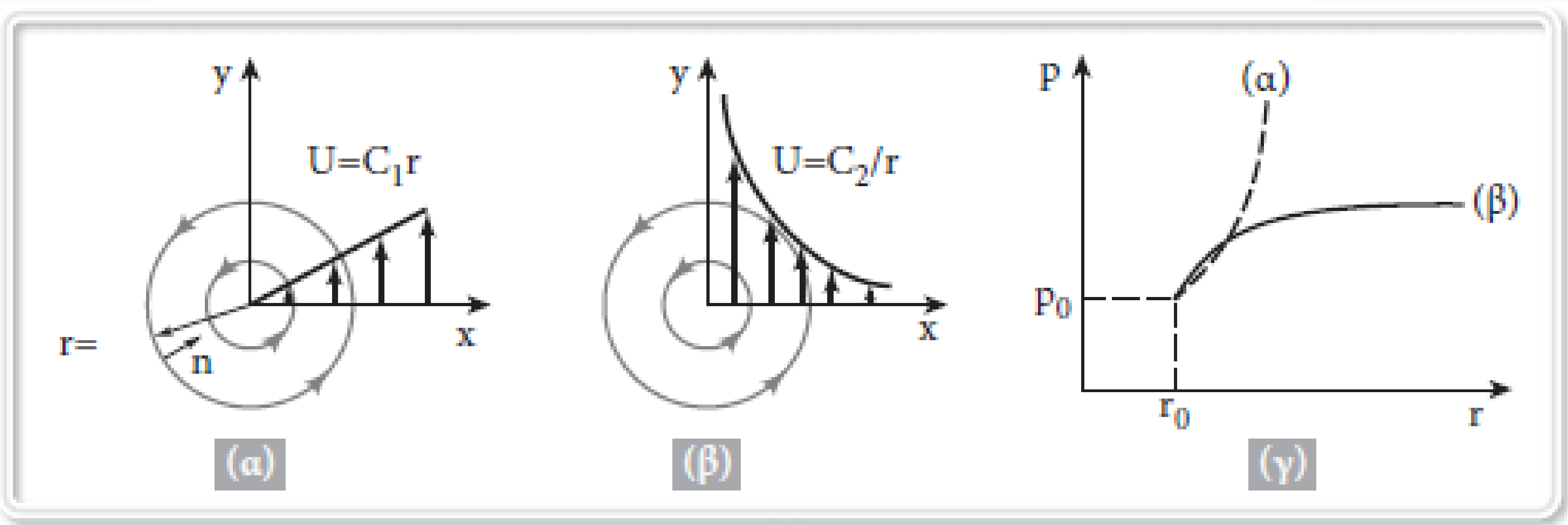
Δ.4.3. F=ma κάθετα σε Ροϊκή Γραμμή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Στο σχήμα φαίνονται δύο ροϊκά πεδία με κυκλικές ροϊκές γραμμές. Οι κατανομές της ταχύτητας δίνονται από τις σχέσεις:

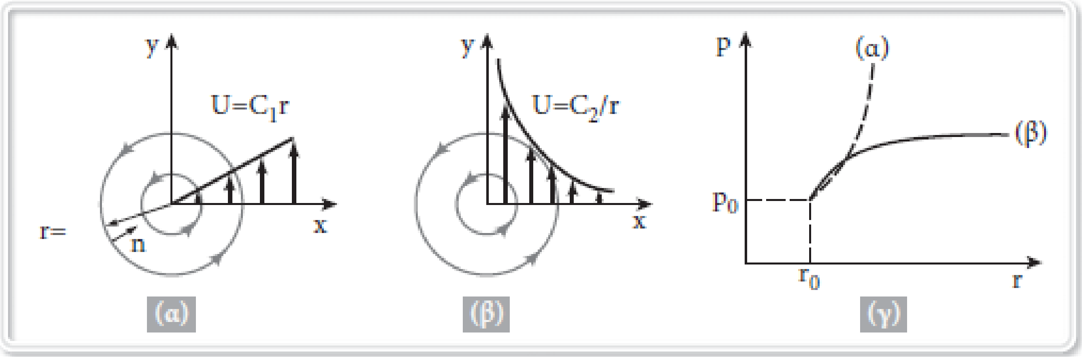
$$U(r) = C_1 r \;\; \text{και} \;\; U(r) = \frac{C_2}{r} \quad \text{για την (α) και (b) αντίστοιχα } (C_1,\, C_2 \text{ σταθερές})$$

Να προσδιορισθεί η κατανομή της πίεσης p=p(r) για κάθε περίπτωση με δεδομένο ότι $p=p_0$ στη θέση $r=r_0$.



Δ.4.3. F=ma κάθετα σε Ροϊκή Γραμμή

Λύση



Η εξίσωση που ισχύει είναι :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho U^2}{r}$$

Για την (a) η εξίσωση δίνει:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho C_1^2 r$$

Για την (b) η εξίσωση δίνει:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho C_2^2}{r^3}$$

Και στις δύο περιπτώσεις η p αυξάνει με αύξηση του r $\left(\frac{\partial p}{\partial r} > 0\right)$

Με ολοκλήρωση έχουμε:

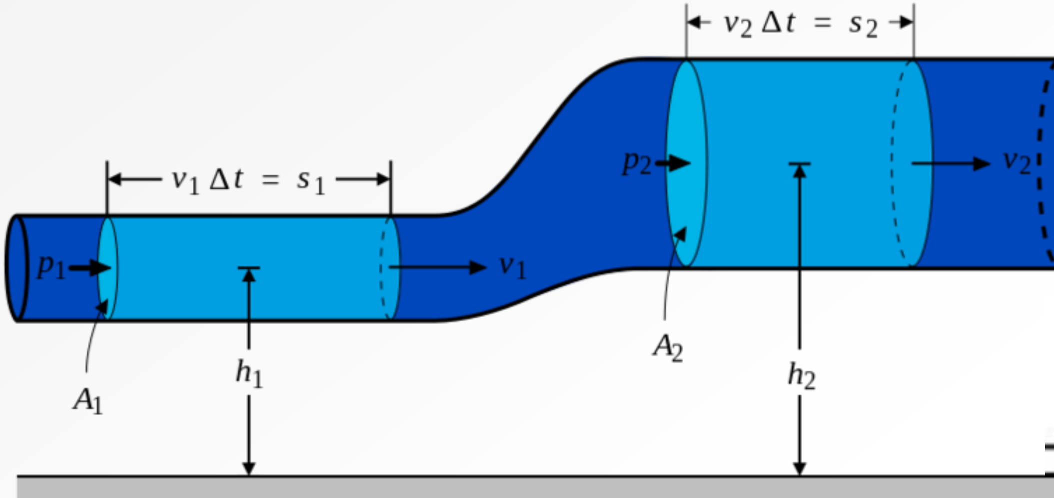
$$p = \frac{1}{2}\rho C_1^2\left(r^2 - r_0^2\right) + p_0 \quad (a)$$

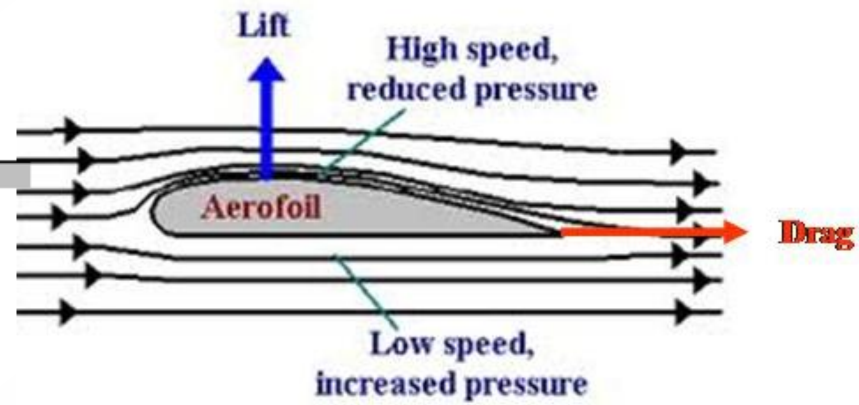
$$p = \frac{1}{2}\rho C_2^2\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) + p_0 \quad (b)$$

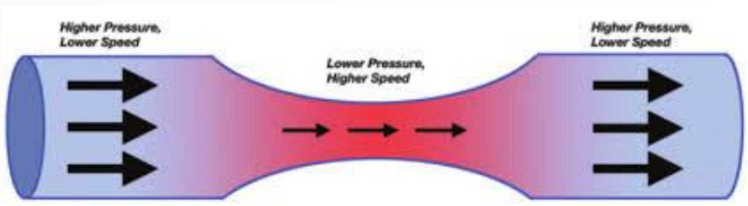
Η (a) αντιστοιχεί σε κίνηση στερεού σώματος

Η (b) αντιστοιχεί σε ελεύθερη «δίνη» (λαίλαπα-tornado)

Δ.4.4. Φυσική ερμηνεία

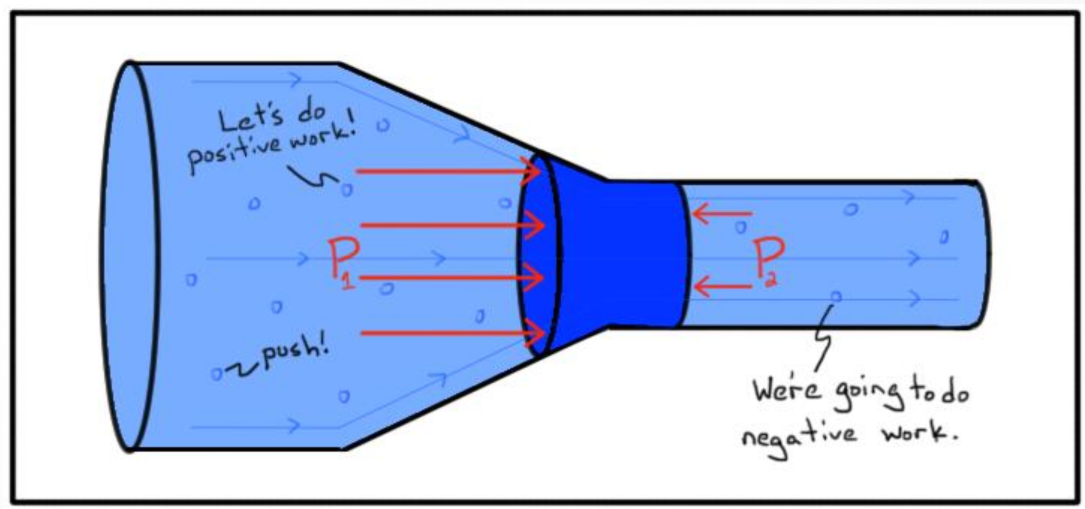






$$\frac{p}{\gamma}+\frac{U^2}{2g}+z=\ \text{σταθερό}$$

$$p+\rho\int\frac{U^2}{R}dn+\gamma z=\text{σταθερό}$$



Δ.4.4. Φυσική ερμηνεία

Γραμμή ροής

Διαφορές: **γραμμή ροής (streamline)**, **ινώδης φλέβα ή ακολουθία (streakline)** και **τροχιά (pathline)**

https://www.youtube.com/watch?v=8MUPQbazkLQ&ab_channel=CPPMechEngTutorials

Ο καθορισμός των τιμών αυτής στο υπολογιστικό πεδίο μπορεί να οδηγήσει αμέσως στον υπολογισμό των ταχυτήτων σε κάθε κόμβο. Εφόσον είναι γνωστές οι ταχύτητες, τότε από την εξίσωση του Bernoulli προσδιορίζεται η κατανομή των πιέσεων στο χώρο, διότι το ολικό φορτίο διατηρείται σταθερό στο πεδίο ροής.

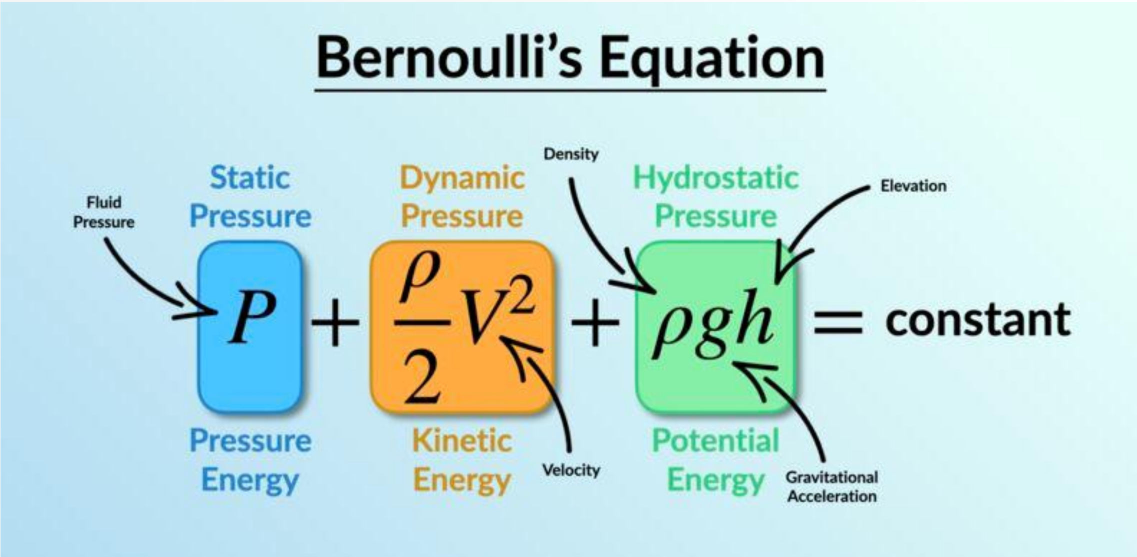
Από τις κατανομές πιέσεων μεγάλου ενδιαφέροντος είναι εκείνες που υπολογίζονται στα όρια μιας κατασκευής. Η γνώση των πιέσεων στα όρια οδηγεί στον υπολογισμό των ασκούμενων δυνάμεων στην κατασκευή.

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{U^2}{2g}=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}=H$$

Δ.4.4. Φυσική ερμηνεία

Εξίσωση Bernoulli

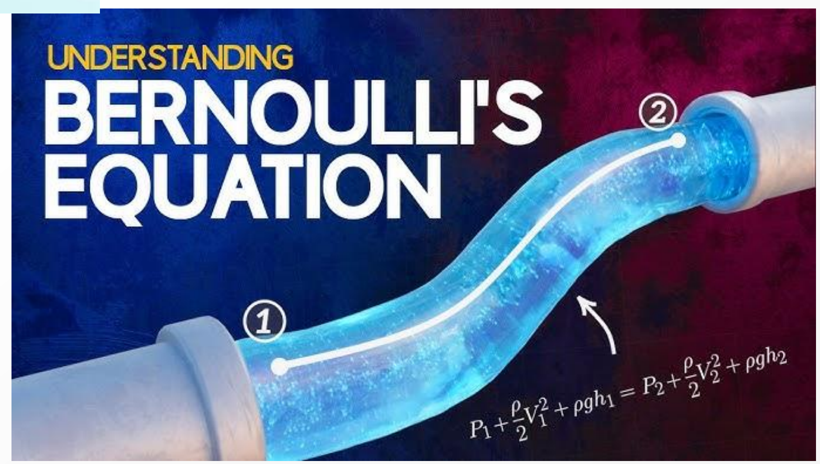
Μορφή Πιέσεων



https://www.youtube.com/watch?v=MxIP73frBZk&ab_channel=PhysicswithProfessorMattAnderson

Μορφή Υδραυλικού Φορτίου

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} = H$$



https://www.youtube.com/watch?v=DW4rItB20h4&ab_channel=TheEfficientEngineer

Δ.4.9. Λυμένες Ασκήσεις

Πρίνος Π. «ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ», 2014, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, ISBN 978-960-456-419-4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

3.1 σελ. 125-126

3.2 σελ. 126-127

3.3 σελ. 130-131

3.4-5 σελ. 134-36

Δ.4. Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 1

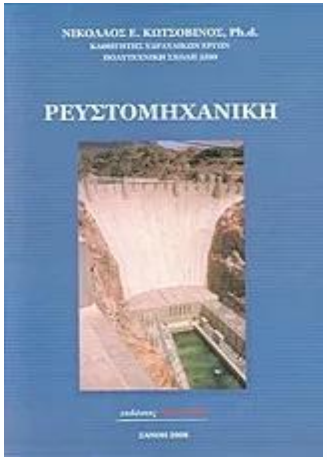
1. Πρίνος Π. «ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ», 2014, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, ISBN 978-960-456-419-4. Βιβλίο [41963463]

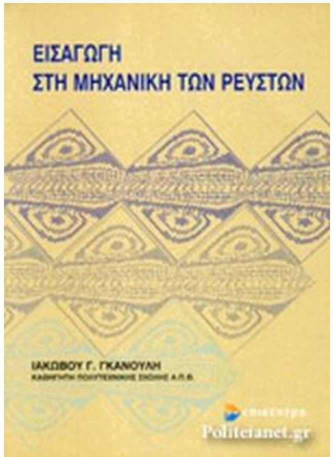
2. Κωτσοβίνος Ν. «ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ», 2008, Εκδόσεις ΣΠΑΝΙΔΗΣ ΜΙΧΑΛΗΣ, ISBN 978-960-6653-34-6. Βιβλίο [833]

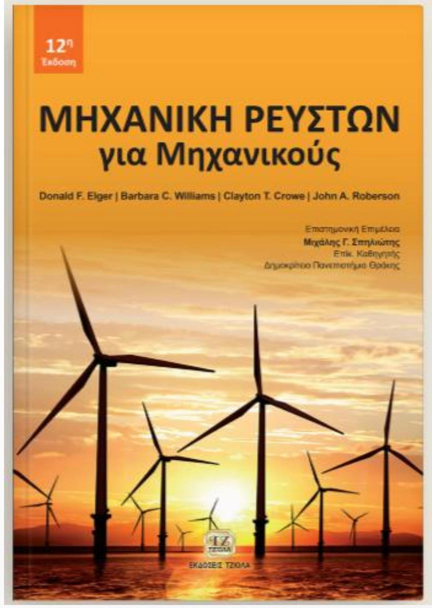
3. Γκανούλης Ι. «ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ», 2007, ΕΠΙΚΕΝΤΡΟ, ISBN 978-960-8731-8-6. Βιβλίο [14945]

Μεταφρασμένη στα ελληνικά Βιβλιογραφία διαθέσιμη από ΕΥΔΟΞΟ

4. Elger F. Donald - Williams C. Barbara - Crowe T. Clayton - Roberson A. John. Μηχανική Ρευστών. Επιμέλεια στα Ελληνικά: Μιχάλης Σπηλιώτης Βιβλίο [77106811]

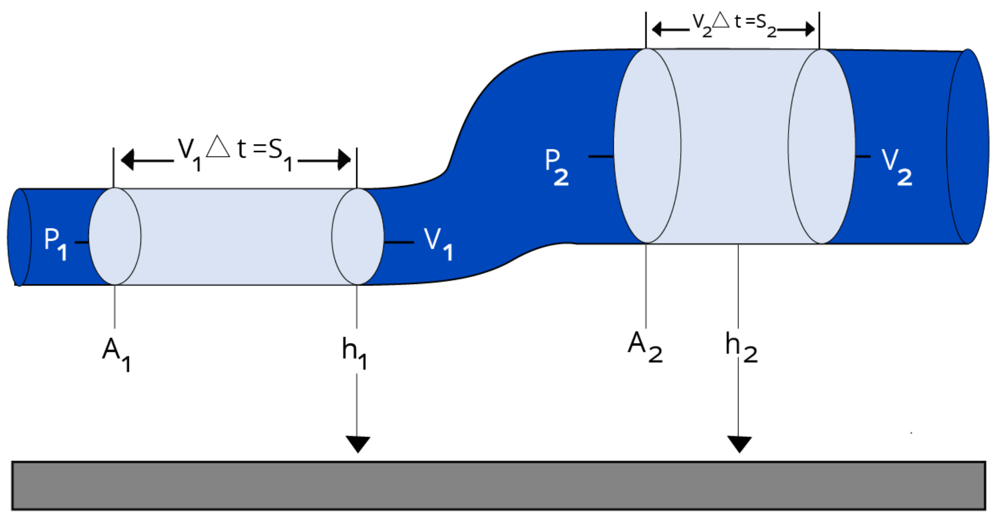




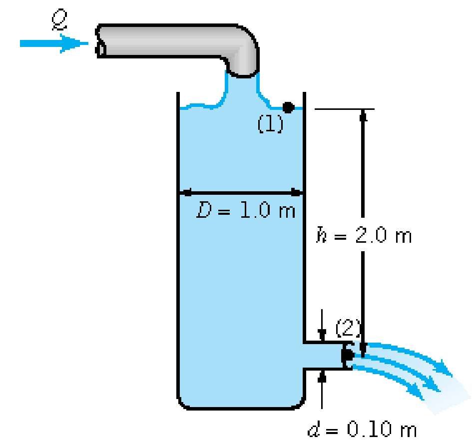


Δ.4. Επίλογος

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ πολύ για την προσοχή σας !!!



$$P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\, g\, h = \text{Constant}$$



(a)