



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
DEMOCRITUS UNIVERSITY OF THRACE

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ



Υπολογιστική Μηχανική Ρευστών

Θεωρία και Εφαρμογές για Πολιτικούς Μηχανικούς

Εξάμηνο: **9^ο**

Κωδικός: **TMB329**

Μάθημα: **Επιλογής ΤΥΕ**

Διάλεξη **Δ.3. Διαφορικές Εξισώσεις (Συνήθειες - ODEs)**

Διδάσκων υπεύθυνος μαθήματος:

Χρήστος Β. Μακρής

Επίκουρος Καθηγητής (επί θητεία)

ΔΠΘ

Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ

Ειδίκευση: Υδραυλική & Περιβαλλοντική Τεχνική

ΜΔΕ Τεχνολογία Υδατικών Πόρων ΕΜΠ

Ειδίκευση: Διαχείριση Παράκτιας Ζώνης

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ

Ειδίκευση: Υπολογιστική Ρευστοδυναμική - Κυματομηχανική

Αίθουσα Η/Υ - Ισόγειο Κτιρίου Α' Πολ. Μηχ. ΔΠΘ - Ξάνθη, 17-24 Οκτωβρίου 2024

Δ.3. Διάρθρωση Παρουσίασης (α)

1. Εισαγωγή στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (Ordinary Differential Equations, ODEs)

- Εισαγωγή και βασικές έννοιες
- Βαθμός και τάξη της ODE
- Γραμμικές και μη γραμμικές ODEs
- Λύση – Ολοκλήρωση ODEs
- Πρόβλημα αρχικών τιμών
- Παράδειγμα – Αραίωση διαλυμάτων

2. Το πρόβλημα του Cauchy για ODEs

- Τυπικές μορφές εξισώσεων
- Μέθοδοι επίλυσης (Runge – Kutta κ.λπ.)
- Παράδειγμα (ωστικά κύματα σε συνεκτικά ρευστά/υγρά)
- Τρόποι επίλυσης

Δ.3. Διάρθρωση Παρουσίασης (β)

3. Προβλήματα με ODEs στην Υδραυλική

- Διαχείριση Αποθήκευσης Νερού σε Δεξαμενή
 - ✓ Αριθμητικές λύσεις διόδευσης νερού από ταμιευτήρα/δεξαμενή
- Διαχείριση ποιότητας νερού σε λιμνοθάλασσα
 - ✓ Αρχικές και οριακές συνθήκες

4. Παραδείγματα με κώδικες

- Χρόνος εκκένωσης κυλινδρικής δεξαμενής (χωρίς αναπλήρωση)
- Διόδευση πλημμύρας/υπερχείλισης υδατοδεξαμενής – φράγματος
- Διαχείριση ποιότητας νερού σε λιμνοθάλασσα συνδεδεμένης μέσω οπής/εισόδου με υδάτινο σώμα άπειρου όγκου νερού (π.χ. ανοιχτή θάλασσα)

5. Επίλογος

- Προβλήματα κώδικες για εργασία/εξάσκηση

Εισαγωγή και βασικές έννοιες

Η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων είναι πολύ σημαντική διότι μοντελοποιεί πλήθος φυσικών προβλημάτων μέσω μιας εξίσωσης ή και ενός συστήματος εξισώσεων που περιλαμβάνει άγνωστες συναρτήσεις καθώς και παραγώγους αυτών των συναρτήσεων.

Ένα απ' τα χαρακτηριστικότερα παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, σύμφωνα με τον οποίο η συνισταμένη δύναμη που δρα σ' ένα σώμα ισούται με το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την επιτάχυνσή του. Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι:

$$m \cdot \mathbf{r}''(t) = \Sigma \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

όπου m είναι η (σταθερή) μάζα του σώματος, \mathbf{r} είναι το διάνυσμα θέσης του σώματος τη χρονική στιγμή t και $\Sigma \mathbf{F}$ είναι το διάνυσμα της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα συναρτήσει του χρόνου, της θέσης και της ταχύτητάς του $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t)$. Αν η δύναμη $\Sigma \mathbf{F}$ οφείλεται μόνον στη βαρύτητα, τότε:

$$m \cdot \mathbf{r}''(t) = -m \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{k}$$

Επιπλέον, αν είναι γνωστή τόσο η θέση $\mathbf{r}(t_0)$ όσο και η ταχύτητα $\mathbf{r}'(t_0)$ του σώματος κάποια χρονική στιγμή t_0 , τότε η θέση του σώματος προσδιορίζεται μονοσήμαντα κάθε χρονική στιγμή t .

Δ.3.1. Εισαγωγή στις ΣΔΕ – ΟΔΕs

Συμβολισμοί

Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή παριστάνει χρόνο, συμβολίζεται συχνά με t και για τις παραγώγους χρησιμοποιούνται **τελείες αντί τόνων**. Έτσι π.χ. γράφουμε

$\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$ $dy/dt, d^2y/dt^2, d^3y/dt^3$ $y_t=dy/dt, y_{tt}=d^2y/dt^2, y_{ttt}=d^3y/dt^3$ όπου $y \equiv y(t)$

αντί

y', y'', y''' $dy/dx, d^2y/dx^2, d^3y/dx^3$ $y_x=dy/dx, y_{xx}=d^2y/dx^2, y_{xxx}=d^3y/dx^3$ όπου $y \equiv y(x)$

	\mathbf{r}	Θέση Position
$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$		Ταχύτητα Velocity (speed)
$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}$		Επιτάχυνση Acceleration
$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \dddot{\mathbf{r}}$		Εκτίναξη Jerk
$\frac{d^4\mathbf{r}}{dt^4} = \overset{\cdot\cdot\cdot}{\mathbf{r}}$		Τράνταγμα Snap (jounce)
$\frac{d^5\mathbf{r}}{dt^5} = \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathbf{r}}$		Τριγμός Crackle
$\frac{d^6\mathbf{r}}{dt^6} = \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\mathbf{r}}$		Κρότος Pop

Ορισμός 2.1 Μια εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον μια από τις παραγώγους μια άγνωστης συνάρτησης y όπως παραπάνω, καλείται (συνήθως) διαφορική εξίσωση.

Οι ακόλουθες είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

- | | |
|--------------------------------|---|
| (i) $y' = 3x^2 + 5x + 6.$ | (v) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 5x.$ |
| (ii) $e^{y'} y + 2(y')^2 = 4.$ | (vi) $2y''' - 3y = x^2 + 1.$ |
| (iii) $y' + 2xy = x^2.$ | (vii) $x^2 y'' - xy' + y = 2.$ |
| (iv) $2x dx + y dy = 0.$ | (viii) $\cos(y') y' = x \sin(x^2).$ |

Δ.3.1. Εισαγωγή στις ΣΔΕ – ODEs

Τάξη της ODE

Καλούμε **τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης** την **τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου** που εμφανίζεται στην εξίσωση. Έτσι, οι διαφορικές εξισώσεις (i), (iii), (iv) και (viii) είναι 1^{ης} τάξης, οι (ii), (v) και (vii) είναι 2^{ης} τάξης και η (vi) είναι 3^{ης} τάξης.

Μια διαφορική εξίσωση n-τάξης περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

όπου F είναι μια συνάρτηση n+2 μεταβλητών που εν γένει εξαρτάται απ' όλες (ή κάποιες) από τις παραμέτρους $x, y, y', y'' \dots y^{(n)}$

Η F καλείται πλεγμένη μορφή της ODE αν η εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς $y^{(n)}$ τότε η μορφή

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

καλείται κανονική μορφή της διαφορικής εξίσωσης.

Σημείωση: Ο όρος ΣΔΕ χρησιμοποιείται σε αντιδιαστολή με τον όρο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, η οποία είναι μια εξίσωση που περιλαμβάνει μια άγνωστη συνάρτηση πολλών μεταβλητών και κάποια/κάποιες από τις μερικές παραγώγους αυτής.

Π.χ. $3z_x - 2z_y = 2(x + y)$

είναι μια μερική διαφορική εξίσωση.

Δ.3.1. Εισαγωγή στις ΣΔΕ – ODEs

Βαθμός της ODE

Η μέγιστη δύναμη (φυσικός αριθμός) της μέγιστης τάξης παραγώγου μιας πολυωνυμικής ΣΔΕ (δηλ. μιας ΣΔΕ όπου όλες οι παράγωγοι εμφανίζονται να είναι υψωμένες μόνον σε δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό $1, 2, 3, \dots$) καλείται **βαθμός της ΣΔΕ**.

Αν η ΣΔΕ δεν είναι πολυωνυμική, τότε δεν ορίζεται βαθμός.

Για παράδειγμα οι ΣΔΕ (i), (iii), (iv), (vi) και (vii) είναι 1^{ου} βαθμού, η (v) είναι 3^{ου} βαθμού, ενώ για τις (ii) και (viii) δεν ορίζεται βαθμός.

Γραμμικές και μη γραμμικές ODEs

Υπάρχουν δυο βασικές κατηγορίες ΣΔΕ: οι γραμμικές και οι μη γραμμικές.

Καλούμε γραμμική ΣΔΕ n-τάξης κάθε ΣΔΕ της μορφής:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x),$$

όπου $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ είναι γνωστές πραγματικές συναρτήσεις.

$$\text{IF } a_0(x) = a_0, a_1(x) = a_1, \dots, a_{n-1}(x) = a_{n-1} \quad \forall x,$$

όπου a_0, \dots, a_{n-1} είναι σταθερές $\in \mathbb{R}$, γραμμική

ΣΔΕ με σταθερούς συντελεστές

Δ.3.1. Εισαγωγή στις ΣΔΕ – ΟΔΕs

Λύση – Ολοκλήρωση ΟΔΕs

Ορισμός 2.5 Καλούμε *λύση* (ή *ολοκλήρωμα*) της δ.ε. (2.1) (ή της (2.2)), κάθε συνάρτηση $y = y(x)$ που την επαληθεύει ταυτοτικά. Η γραφική παράσταση της y είναι μια καμπύλη στο επίπεδο που καλείται **ολοκληρωτική καμπύλη** της δ.ε.

Τονίζουμε εδώ ότι οι λύσεις μιας δ.ε. (αν υπάρχουν) είναι πάντα **συναρτήσεις** σε αντίθεση με τις λύσεις μιας αλγεβρικής εξίσωσης που είναι αριθμοί.

Συνήθως μια δ.ε. έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Για παράδειγμα οι λύσεις της δ.ε.

$$y' = x$$

είναι οι συναρτήσεις

$$y = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

όπως προκύπτει εύκολα με απλή ολοκλήρωση. Ομοίως οι λύσεις της δ.ε.

$$y'' = x$$

προκύπτουν εύκολα με δυο ολοκληρώσεις:

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Στα παραπάνω παραδείγματα βλέπουμε ότι όταν η λύση μιας δ.ε. προέρχεται από n -ολοκληρώσεις τότε η λύση εξαρτάται από n -αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης. Είναι λογικό να αναρωτηθούμε αν αυτός ο κανόνας μπορεί να γενικευθεί, δηλ. αν η λύση όλων των δ.ε. 1^{ης} τάξης εξαρτάται από μια αυθαίρετη σταθερά, των δ.ε. 2^{ης} τάξης από δυο αυθαίρετες σταθερές κλπ. Δυστυχώς μια τέτοια γενίκευση δεν ισχύει. Κάλιστα μπορεί μια δ.ε. να έχει μόνον

μια πραγματική λύση, όπως π.χ. η δ.ε. 1^{ης} τάξης $(y')^2 + 3y^2 = 0$ που έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική συνάρτηση και δεν εξαρτάται καν από σταθερά. Επίσης η δ.ε. 1^{ης} τάξης

$$(y' - 1)(y - y) = 0$$

έχει λύση $(y - c_1)(y - c_2 e^x) = 0$ που εξαρτάται από δυο (και όχι μια) σταθερές. Αναφέρουμε επίσης ότι μια δ.ε. μπορεί να μην έχει λύση στο \mathbb{R} , όπως π.χ. η $(y')^2 + 3y^2 = -1$.

Δ.3.1. Εισαγωγή στις ΣΔΕ – ΟΔΕs

Πρόβλημα αρχικών τιμών

Δοθέντων πραγματικών αριθμών x_0, y_0, \dots, y_{n-1} η εύρεση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης (στα προηγούμενα) που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

καλείται **πρόβλημα αρχικών τιμών ΠΑΤ** και οι παραπάνω σχέσεις καλούνται **αρχικές συνθήκες**.

Πρόβλημα οριακών τιμών

Name	Form on 1st part of boundary	Form on 2nd part of boundary
Dirichlet	$y = f$	
Neumann	$\frac{\partial y}{\partial n} = f$	
Robin	$c_0 y + c_1 \frac{\partial y}{\partial n} = f$	
Mixed	$y = f$	$c_0 y + c_1 \frac{\partial y}{\partial n} = f$
Cauchy	both $y = f$ and $c_0 \frac{\partial y}{\partial n} = g$	

Δ.3.1. Εισαγωγή στις ΣΔΕ – ODEs

Πρόβλημα οριακών τιμών (συνθηκών)

Dirichlet

$$y = f$$

ODE [\[edit \]](#)

For an [ordinary differential equation](#), for instance,

$$y'' + y = 0,$$

the Dirichlet boundary conditions on the interval $[a,b]$ take the form

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

where α and β are given numbers.

PDE [\[edit \]](#)

For a [partial differential equation](#), for example,

$$\nabla^2 y + y = 0,$$

where ∇^2 denotes the [Laplace operator](#), the Dirichlet boundary conditions on a domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ take the form

$$y(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

where f is a known [function](#) defined on the boundary $\partial\Omega$.

Δ.3.1. Εισαγωγή στις ΣΔΕ – ODEs

Πρόβλημα οριακών τιμών (συνθηκών)

Neumann

$$\frac{\partial y}{\partial n} = f$$

ODE [edit]

For an ordinary differential equation, for instance,

$$y'' + y = 0,$$

the Neumann boundary conditions on the interval $[a,b]$ take the form

$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta,$$

where α and β are given numbers.

PDE [edit]

For a partial differential equation, for instance,

$$\nabla^2 y + y = 0,$$

where ∇^2 denotes the [Laplace operator](#), the Neumann boundary conditions on a domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ take the form

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

where \mathbf{n} denotes the (typically exterior) [normal](#) to the [boundary](#) $\partial\Omega$, and f is a given [scalar function](#).

The [normal derivative](#), which shows up on the left side, is defined as

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \nabla y(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}),$$

Δ.3.1. Εισαγωγή στις ΣΔΕ – ΟΔΕs

Πρόβλημα οριακών τιμών (συνθηκών)

Cauchy

$$\text{both } y = f \text{ and } c_0 \frac{\partial y}{\partial n} = g$$

Second-order ordinary differential equations [\[edit \]](#)

Cauchy boundary conditions are simple and common in second-order [ordinary differential equations](#),

$$y''(s) = f(y(s), y'(s), s),$$

where, in order to ensure that a unique solution $y(s)$ exists, one may specify the value of the function y and the value of the derivative y' at a given point $s = a$, i.e.,

$$y(a) = \alpha,$$

and

$$y'(a) = \beta,$$

where a is a boundary or initial point. Since the parameter s is usually time, Cauchy conditions can also be called *initial value conditions* or *initial value data* or simply *Cauchy data*. An example of such a situation is Newton's laws of motion, where the acceleration y'' depends on position y , velocity y' , and the time s ; here, Cauchy data corresponds to knowing the initial position and velocity.

Δ.3.1. Εισαγωγή στις ΣΔΕ – ΟΔΕs

Παράδειγμα (Αραίωση διαλυμάτων). Ένα δοχείο έχει $V_0 \text{ m}^3$ διάλυμα νερού με $s_0 \text{ kg}$ ζάχαρη (θεωρούμε ότι η ζάχαρη είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάλυμα). Ένα άλλο διάλυμα με $a \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ζάχαρη χύνεται στο δοχείο με ρυθμό $f \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ ενώ ταυτόχρονα από το δοχείο απομακρύνονται $g \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ διαλύματος. Πόση ζάχαρη έχει το δοχείο τη χρονική στιγμή t ;

Λύση. Εστω $s(t)$ είναι η ποσότητα ζάχαρης τη χρονική στιγμή t (t σε min). Τότε:

$$s(t + \Delta t) - s(t) = \text{ζάχαρη που εισέρχεται στο δοχείο} - \text{ζάχαρη που εξέρχεται απ' το δοχείο.}$$

Αλλά η ζάχαρη που εισέρχεται στο δοχείο σε χρόνο Δt ισούται με $a \cdot f \cdot \Delta t \frac{\text{kg}}{\text{min}}$. Για να βρούμε τη ζάχαρη που εξέρχεται σε χρόνο Δt απ' το δοχείο πρέπει να βρούμε πρώτα τον όγκο του δοχείου τη χρονική στιγμή t . Ο όγκος αυτός είναι $V_0 + (f - g) \cdot t$, οπότε η περιεκτικότητα σε ζάχαρη/ m^3 τη χρονική στιγμή t είναι

Δ.3.1. Εισαγωγή στις ΣΔΕ – ΟΔΕs

Παράδειγμα – Αραίωση διαλυμάτων

$\frac{s(t)}{V_0 + (f - g) \cdot t} \frac{kg}{m^3}$ και συνεπώς η ζάχαρη που εξέρχεται απ' το

δοχείο σε χρόνο Δt ισούται με $g \cdot \frac{s(t) \cdot \Delta t}{V_0 + (f - g) \cdot t} \frac{kg}{min}$. Άρα:

$$s(t + \Delta t) - s(t) = a \cdot f \cdot \Delta t - g \cdot \frac{s(t) \cdot \Delta t}{V_0 + (f - g) \cdot t}$$

$$\Rightarrow \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = a \cdot f - g \cdot \frac{s(t)}{V_0 + (f - g) \cdot t}$$

και για $\Delta t \rightarrow 0$ έχουμε

$$s'(t) + \frac{g}{V_0 + (f - g) \cdot t} \cdot s(t) = a \cdot f$$

η οποία είναι μια γραμμική δ.ε. 1ης τάξης με αρχική συνθήκη $s(0) = s_0$, η λύση της οποίας προκύπτει από την (2.10). \square

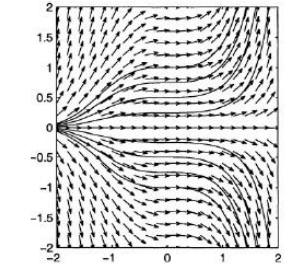
$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left(c + \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx \right). \quad (2.10)$$

Δ.3.2. Πρόβλημα Cauchy για ΣΔΕ – ODEs

1ης τάξης εξισώσεις

Όπου $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$



The flow field generated by the equation $\frac{dy}{dt} = t^2 y$

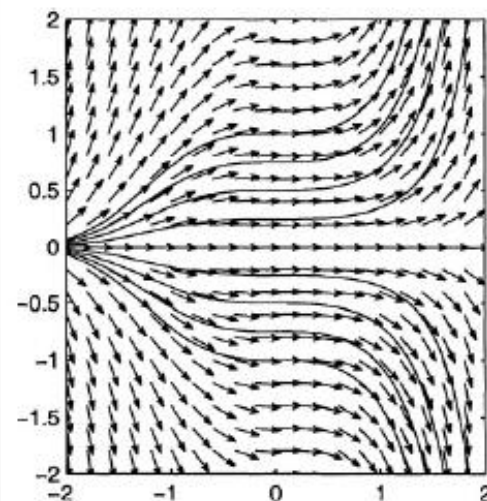
Η γεωμετρική ερμηνεία μιας τέτοιας εξίσωσης βασίζεται στην ιδέα ότι για μια δεδομένη συνάρτηση η παράγωγός της αντιπροσωπεύει την κλίση της εφαπτομένης στη γραφική της παράσταση στο σημείο t . Εάν σε οποιοδήποτε σημείο (t,y) στον χώρο \mathbf{IR}^2 (ή από το πεδίο ορισμού της εξίσωσης), σχεδιάσουμε ένα διάνυσμα κλίσης $f(t,y)$, λαμβάνουμε ένα διανυσματικό πεδίο και επομένως η διαφορική εξίσωση ορίζει μια οικογένεια καμπυλών (τροχιών) που εφάπτονται σε κάθε σημείο του αντίστοιχου διανύσματος του πεδίου.

Για παράδειγμα, για τη διαφορική εξίσωση $dy/dt=t^2y$, λαμβάνουμε το παραπάνω σχήμα όπου η αναφερόμενη οικογένεια καμπυλών (τροχιών) είναι προφανής. Από το σχήμα, το πεδίο ροής που δημιουργείται από την εξίσωση εδώ προκύπτει επίσης από την έννοια του πεδίου ροής που δημιουργείται από τη διαφορική εξίσωση, επειδή η εικόνα είναι παρόμοια με την κίνηση των σωματιδίων κάποιας ροής ρευστού.

1^ης τάξης εξισώσεις

Είναι «προφανές» από την εικόνα ότι μπορούμε να επιλέξουμε μια μοναδική λύση επιλέγοντας ένα σημείο στην αντίστοιχη καμπύλη, δηλ. επιβάλλοντας μια συνθήκη της μορφής $y(t_0) = y_0$ που ονομάζεται επίσης συνθήκη Cauchy. Οι δύο σχέσεις σχηματίζουν ένα πρόβλημα Cauchy. Υπάρχει μια φυσική τάση να υποθέσουμε «a priori» την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης ενός προβλήματος Cauchy αφού η διαφορική εξίσωση μοντελοποιεί ένα πραγματικό, φυσικό, παρατηρήσιμο φαινόμενο. Ωστόσο, η πραγματική διαδικασία και το μαθηματικό της μοντέλο είναι δύο διακριτές οντότητες. Το μοντέλο αντανακλά μόνο εν μέρει το φαινόμενο, επομένως είναι πιθανό ορισμένα μοντέλα να μην έχουν είτε καμία λύση είτε πολλές λύσεις, μερικές από τις οποίες δεν έχουν φυσική συνάφεια.

Ο στόχος των θεωρημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας είναι να περιγράψουν οικογένειες εξισώσεων όσο το δυνατόν μεγαλύτερες για τις οποίες διασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα του προβλήματος Cauchy.



2. The flow field generated by the equation $\frac{dy}{dt} = t^2 y$

Δ.3.2. Πρόβλημα Cauchy για ΣΔΕ – ODEs

1^{ης} τάξης εξισώσεις

Για ορισμένα δύσκολα προβλήματα, συχνά δεν υπάρχουν σαφείς τύποι για τις λύσεις και πρέπει να χρησιμοποιούνται άρρητοι αριθμητικοί υπολογισμοί. Σε αυτές τις περιπτώσεις, είναι σημαντικό να γνωρίζετε ότι υπάρχει μια λύση πριν επενδύσετε χρόνο και υπολογιστική προσπάθεια για να αναζητήσετε κάτι που τελικά δεν μπορούσε να βρεθεί.

Ορισμός. Μια λύση του προβλήματος Cauchy είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $y(t)$ σε ένα διάστημα I που περιέχει το t_0 η οποία επαληθεύει:

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), \forall t \in I$$

$$y(t_0) = y_0.$$

Παρατηρούμε ότι αυτός ο ορισμός θα μπορούσε να αποδυναμωθεί, αποδεχόμενοι τη μη διαφορισιμότητα σε ένα «αρκετά μικρό» σύνολο σημείων.

Για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα πρέπει να επιβάλλουμε κάποιους περιορισμούς στη συνάρτηση f , δηλ. στις κλίσεις των τροχιών που δημιουργούνται από τη διαφορική εξίσωση.

Δ.3.2. Πρόβλημα Cauchy για ΣΔΕ – ODEs

Παράδειγμα 1^{ης} τάξης εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

two solutions on $I = (0, +\infty)$, $z(t) = 0$ and $w(t) = t^2$.

Οι συνήθεις απαιτήσεις που διασφαλίζουν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα είναι η συνέχεια της συνάρτησης f σε σχέση με το t και η ικανοποίηση της συνθήκης Lipschitz

$$\exists K > 0 : |f(t, z) - f(t, w)| \leq K |z - w|, \forall t, z, w$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

$$y_0(t) = y_0,$$

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds,$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds,$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds,$$

$$\vdots$$

2ο Παράδειγμα: Αριθμητικός Υπολογισμός

Ένα πρώτο πρόβλημα που πρέπει να λυθεί είναι να καθοριστεί τι υπολογίζει η αριθμητική μέθοδος. Καθώς ένας αλγόριθμος που εκτελεί ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα δίνει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό εξόδων, θα πρέπει να καθορίσουμε τι αντιπροσωπεύουν αυτές οι τιμές.

Θα μπορούσαν να είναι προσεγγίσεις των συντελεστών ορισμένων σειρών επέκταση (όπως στο προηγούμενο παράδειγμα) ή θα μπορούσαν να είναι προσεγγίσεις των τιμών της λύσης σε πεπερασμένο αριθμό σημείων, προαποφασισμένα ή ακόμη και επιλεγμένα κατά την εκτέλεση.

Επιπλέον, η αριθμητική μέθοδος θα πρέπει να επιτρέπει επίσης ορισμένες εκτιμήσεις των σφαλμάτων προσέγγισης.

Ένα δεύτερο πρόβλημα είναι να υπολογίσετε τις επόμενες τιμές από τις προηγούμενες, για παράδειγμα, να υπολογίσετε $y(t+h)$ μια φορά δεδομένου του $y(t)$. Αυτό υποδηλώνει την πεπερασμένη επέκταση της σειράς Taylor (από τον τύπο του Taylor) και γραμμικοποιημένα δίνει:

$$y(t+h) = y(t) + h \frac{dy(t)}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}y(\xi)}{dt^{n+1}}$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})$$

Δ.3.2. Πρόβλημα Cauchy για ΣΔΕ – ODEs

2ο Παράδειγμα: Αριθμητικός Υπολογισμός – Επίλυση με Μέθοδο Runge Kutta

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h,$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

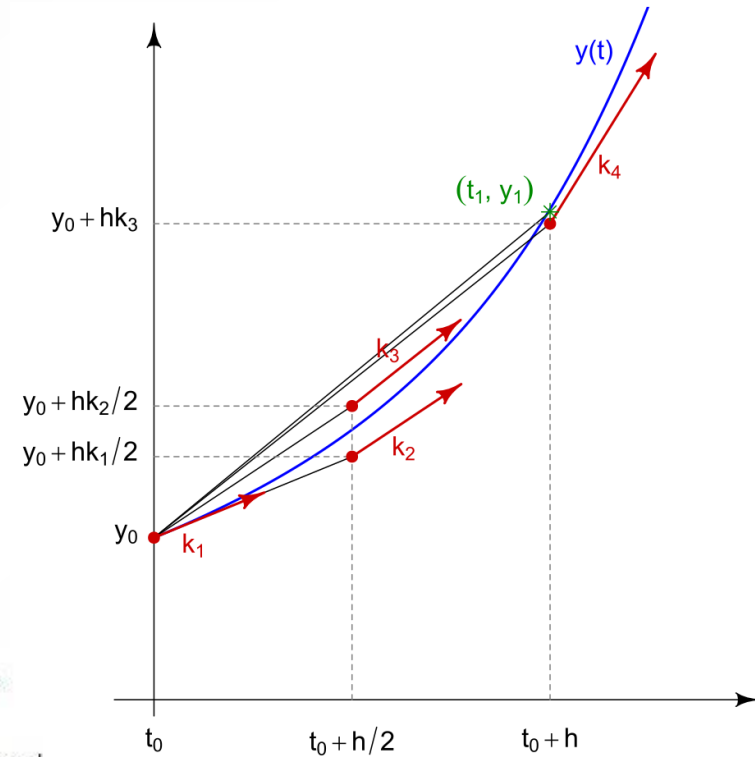
for $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, using^[3]

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3).$$



Here y_{n+1} is the RK4 approximation of $y(t_{n+1})$, and the next value (y_{n+1}) is determined by the present value (y_n) plus the **weighted average** of four increments, where each increment is the product of the size of the interval, h , and an estimated slope specified by function f on the right-hand side of the differential equation.

- k_1 is the slope at the beginning of the interval, using y (Euler's method);
- k_2 is the slope at the midpoint of the interval, using y and k_1 ;
- k_3 is again the slope at the midpoint, but now using y and k_2 ;
- k_4 is the slope at the end of the interval, using y and k_3 .

In averaging the four slopes, greater weight is given to the slopes at the midpoint. If f is independent of y , so that the differential equation is equivalent to a simple integral, then RK4 is Simpson's rule.^[5]

The RK4 method is a fourth-order method, meaning that the local truncation error is on the order of $O(h^5)$, while the total accumulated error is on the order of $O(h^4)$.

Δ.3.2. Πρόβλημα Cauchy για ΣΔΕ – ODEs

Εφαρμογή: Διάδοση ωστικού κύματος σε συνεκτικό ρευστό

Σε μια πραγματική ροή ρευστού, η ταχύτητα και η πίεση ποικίλλουν ομαλά μέσω μιας λεπτής περιοχής διάδοσης ωστικού (κρουστικού) κύματος αντί να κάνουν αναπήδηση (απτότομη μεταβολή) των τιμών τους, όπως περιγράφεται στη μη συνεκτική θεωρία.

Ας μελετήσουμε τώρα αριθμητικά τη δομή ενός κραδασμού παρουσία του ιξώδους, για ένα απλοποιημένο πρόβλημα. Ας υποθέσουμε ότι το κυματικό σοκ (ωστικό κύμα) διαδίδεται με σταθερή υπερηχητική ταχύτητα κατά μήκος της αρνητικής κατεύθυνσης του άξονα $O-x$. Ας αφήσουμε το σύστημα συντεταγμένων να **κινηθεί με την ταχύτητα του ωστικού/κρουστικού κύματος**, έτσι ώστε να γίνει σταθερό ως προς αυτό το πλαίσιο κίνησης. Ας χρησιμοποιήσουμε τους δείκτες 1 και 2 για μακρινό ανάντη και κατόντη σημείο, αντίστοιχα.

όπου $\mu' = 2\mu + \lambda$ ενώ μ και λ είναι οι συντελεστές ιξώδους του ρευστού, c_p είναι η ειδική θερμότητα σταθερής πίεσης και k είναι η θερμική αγωγιμότητα.

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0,$$

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\mu' \frac{du}{dx} \right),$$

$$\rho u \frac{d}{dx} \left(c_p T + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{d}{dx} \left(u \mu' \frac{du}{dx} + k \frac{dT}{dx} \right)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x σε ένα διάστημα που περιέχει το ωστικό κύμα:

Δ.3.2. Πρόβλημα Cauchy για ΣΔΕ – ODEs

Εφαρμογή: Διάδοση ωστικού κύματος σε συνεκτικό ρευστό

$$\rho u = \rho_1 u_1 = m,$$

$$\mu' \frac{du}{dx} - mu - p = -mu_1 - p_1,$$

$$u\mu' \frac{du}{dx} + k \frac{dT}{dx} - m \left(c_p T + \frac{u^2}{2} \right) = -m \left(c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} \right)$$

όπου m είναι η ροή μάζας μέσω του κραδασμού. Οι αριστερές πλευρές των παραπάνω εξισώσεων γίνονται, πολύ κατάντη (όπου η ταχύτητα και η θερμοκρασία είναι ομοιόμορφες),

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1,$$

$$m(u_1 - u_2) = p_2 - p_1,$$

$$c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} = c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2},$$

Που αντιπροσωπεύουν τις εξισώσεις των νόμων διατήρησης της μάζας (συνέχειας), ορμής (ποσότητας κίνησης), και ενέργειας.

The effective integration of the above equations may be generally performed only by numerical methods, after some simplifications. Let us replace the pressure in the state equation (the Clapeyron relation)

$$p = \rho RT = mR \frac{T}{u}$$

where R is the gas constant. Let us replace $\mu' \frac{du}{dx}$ from the obtained equation into the energy equation. Using the dimensionless variables

$$U = \frac{m}{mu_1 + p_1} u, \quad T' = \frac{m^2 R}{(mu_1 + p_1)^2} T,$$

Δ.3.2. Πρόβλημα Cauchy για ΣΔΕ – ODEs

Εφαρμογή: Διάδοση ωστικού κύματος σε συνεκτικό ρευστό

$$\frac{dU}{dx} = \frac{m}{\mu'} \left(U + \frac{T'}{U} - 1 \right),$$

$$\frac{dT'}{dx} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{m}{\mu} \text{Pr} \left(\frac{1}{\gamma - 1} T' - \frac{1}{2} U^2 + U - \frac{\alpha}{2} \right),$$

where $\text{Pr} = \mu c_p / k$ is the *Prandtl number* and α is the dimensionless parameter

$$\alpha = \frac{2m^2 \left(c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} \right)}{(m u_1 + p_1)^2}.$$

The boundary conditions at the end of the shock are

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=\pm\infty} = 0, \quad \left. \frac{dT'}{dx} \right|_{x=\pm\infty} = 0,$$

Διαχείριση Αποθήκευσης Νερού σε Δεξαμενή

Η πρώτη εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών (FD) παρέχεται για τη λύση μιας ΣΔΕ (ODE) που περιγράφει μαθηματικά το γέμισμα και το άδειασμα μιας δεξαμενής νερού, όπως μια τεχνητή λίμνη πίσω από ένα φράγμα. Ο ταμιευτήρας γεμίζει από εισροές λεκάνης απορροής ανάντη, ενώ ταυτόχρονα εκκενώνεται από σχεδιασμένες εκροές από υπερχειλιστή φράγματος, από θυρόφραγμα ή μέσω ενός στομίου.

Η διαχείριση του ταμιευτήρα περιλαμβάνει διάφορες επιχειρησιακές πρακτικές ασφάλειας. Αυτές οι πρακτικές περιλαμβάνουν αλλά δεν περιορίζονται σε (1) τη διατήρηση μιας προκαθορισμένης μέγιστης ανύψωσης του νερού για την αποφυγή της υπέρβασης της κορυφής, (2) τη ρύθμιση των εκροών νερού για την αποφυγή διάβρωσης ή πλημμύρας κατόντη, (3) εκτίμηση του υδρογραφήματος εκροής για εκκένωση έκτακτης ανάγκης ή/και λόγους μετριασμού κινδύνου, και (4) αξιολόγηση των συνολικών αποκρίσεων αποθήκευσης εισροής-εκροής της δεξαμενής για διάφορες υδρολογικές συνθήκες (Singh and Scarlatos 1988). Η χωρητικότητα αποθήκευσης μιας δεξαμενής εξαρτάται από την εξαρτώμενη από το χρόνο ανύψωση του νερού, $z(t)$ και την αντίστοιχη οριζόντια επιφάνεια νερού, $S(z)$. Η ογκομετρική αποθήκευση νερού, $V(z)$, της δεξαμενής μπορεί να ποσοτικοποιηθεί με το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$V(z) = \int_0^z S(\zeta) d\zeta$$

Στην οριακή περίπτωση μιας κυλινδρικής δεξαμενής, $S(z) = S$ είναι σταθερά και ο όγκος του νερού υπολογίζεται ως $V(z) = S \cdot z(t)$.

Διαχείριση Αποθήκευσης Νερού σε Δεξαμενή

Ωστόσο, για ένα φράγμα που φράζει μια κοιλάδα ποταμού, η συνάρτηση αποθήκευσης $S(z)$ συνήθως περιγράφεται από έναν αριθμό $S(z)$ ή για διακριτές τιμές z που λαμβάνονται από τοπογραφικούς χάρτες της περιοχής. Στην περίπτωση αυτή, ο όγκος της δεξαμενής υπολογίζεται αριθμητικά χρησιμοποιώντας τον τραπεζοειδή κανόνα ολοκλήρωσης, δηλαδή από το άθροισμα των μεγεθών $S(z) \cdot \Delta z$ για έναν αριθμό $N+1$ τιμών z , από $z_0=0\text{m}$ (πυθμένας) στην κορυφαία ανύψωση του νερού $z_N=N \cdot \Delta z$ (Εικόνα 2.1). Η γραφική παράσταση $V(z_i)$ ως προς z_i είναι γνωστή ως καμπύλη διατίμησης.

$$V(z_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} [S(z_{i-1}) + S(z_i)] \Delta z$$

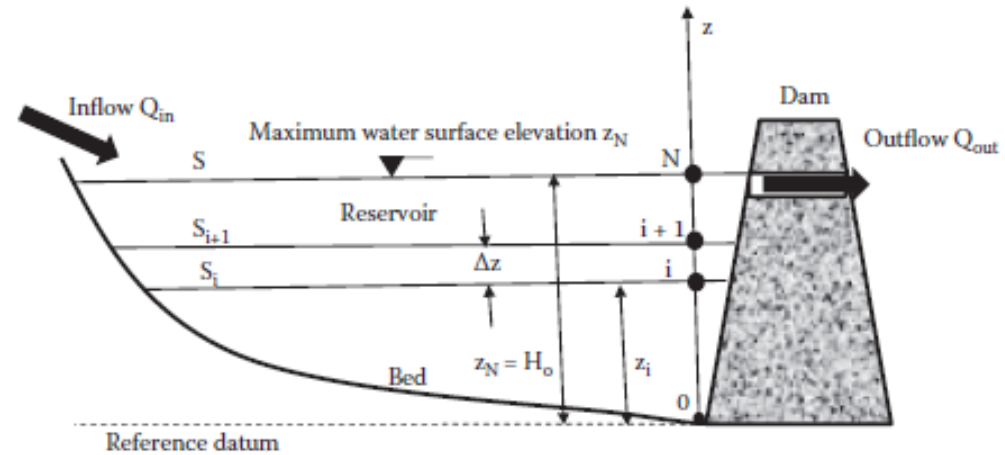


Figure 2.1 Schematic representation of reservoir operation.

Διαχείριση Αποθήκευσης Νερού σε Δεξαμενή

Η διαμόρφωση του μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει τις ογκομετρικές μεταβολές του νερού της δεξαμενής ως αποτέλεσμα των εκκενώσεων εισροής και εκροής μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας και μια σχέση σταδιακής εκφόρτισης για την εκροή σχεδιασμού. Η εξίσωση συνέχειας υποδηλώνει ότι για έναν απειροελάχιστο χρόνο (Δt) η διαφορά μεταξύ του όγκου εισροής ($Q_{in}\Delta t$) και του όγκου εκροής ($Q_{out}\Delta t$) του νερού θα αντιπροσωπεύει οποιαδήποτε συσσώρευση ή εξάντληση της αποθήκευσης νερού της δεξαμενής.

$$S(z)\Delta z = Q_{in}\Delta t - Q_{out}\Delta t$$

Υποθέτοντας ότι η εκροή λαμβάνει χώρα μέσω ενός στομίου επιφάνειας A , τότε σύμφωνα με τον τύπο του Torricelli, η εκροή εξαρτάται από το υδραυλικό (πιεζομετρικό) φορτίο (z) που μετρείται από το κέντρο του στομίου ως την επιφάνεια του νερού,

$$Q_{out}^{orifice} = C_o A \sqrt{2gz}$$

όπου C_o είναι ο συντελεστής εκροής με μέση τιμή 0,7.

Εάν η εκροή λαμβάνει χώρα πάνω από ένα φράγμα υπερχείλισης, τότε:

$$Q_{out}^{weir} = C_w B(z - z_w)^{1.5} \text{ for } z > z_w, \text{ and } Q_{out}^{weir} = 0 \text{ for } z < z_w$$

όπου C_w είναι ο συντελεστής εκκένωσης με μέση τιμή 1,5 και z_w είναι το υψόμετρο της στέψης του φράγματος που μετρείται από το ίδιο σημείο αναφοράς με το υψόμετρο του νερού z .

Δ.3.3. Προβλήματα ODEs στην Υδραυλική

Διαχείριση Αποθήκευσης Νερού σε Δεξαμενή

Η εξίσωση 2.3 οδηγεί σε μια σχέση με διαφορική μορφή, όπου η εκροή ορίζεται από τις προηγούμενες Εξισώσεις :

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{Q_{in}(t) - Q_{out}(t)}{S(z)}$$

Για $\Delta z \rightarrow 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$, η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως μια ΣΔΕ:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_{in}(t) - Q_{out}(t)}{S(z)}$$

Η εξαρτημένη μεταβλητή $z(t)$ εκφράζεται άρρητα στην Εξίσωση αφού τόσο η $S(z)$ όσο και η $Q_{out}(t)$ είναι συναρτήσεις του z . Για την επίλυση της ΣΔΕ, απαιτείται να είναι γνωστά τα ακόλουθα δεδομένα:

- Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δεξαμενής, $S(z)$
- Υδρογράφημα εισροής, $Q_{in}(t)$
- Γεωμετρικά χαρακτηριστικά και συντελεστής εκροής του στομίου ή του φράγματος υπερχείλισης
- Αρχική ανύψωση νερού $z(t=0)=H_0$

Δ.3.3. Προβλήματα ODEs στην Υδραυλική

Διαχείριση Αποθήκευσης Νερού σε Δεξαμενή

Η επίτευξη αναλυτικής λύσης για την Εξίσωση είναι πολύ απίθανη, καθώς τα περισσότερα από τα δεδομένα εισόδου δεν μπορούν να εκφραστούν σε μαθηματικούς τύπους κλειστής μορφής. Έτσι χρησιμοποιείται η λύση της εξίσωσης επιτυγχάνεται αριθμητικά. Για το σκοπό αυτό, η ανεξάρτητη μεταβλητή t διακρίνεται μέσω ενός χρονικού βήματος Δt . Κάθε διακριτή τιμή χρόνου $t_n = n\Delta t$ περιγράφεται από τον δείκτη n , ενώ οι τιμές των άλλων μεταβλητών που αντιστοιχούν σε αυτόν τον συγκεκριμένο χρόνο περιγράφονται από τον εκθέτη n , ως:

$$z^n = z(t_n) \text{ and } Q_{in}^n = \dot{Q}_{in}(t_n).$$

Αριθμητικές λύσεις διόδευσης νερού από ταμιευτήρα/δεξαμενή

Χρησιμοποιώντας εν εμπρόσθιο σχήμα διαφορών και θεωρώντας την περίπτωση αδειάσματος της υδατοδεξαμενής μέσω στομιού:

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta t} = \frac{Q_{in}^n}{S(z^n)} - \frac{C_o A \sqrt{2gz^n}}{S(z^n)} \quad \rightarrow \quad z^{n+1} = z^n + \Delta t \left[\frac{Q_{in}^n}{S(z^n)} - \frac{C_o A \sqrt{2gz^n}}{S(z^n)} \right]$$

Η προσέγγιση της ΣΔΕ-ODE από την Εξίσωση για το χρονικό επίπεδο $n+1$ είναι συνεπής και συσχετίζει μια νέα τιμή της στάθμης του νερού z^{n+1} με μια προηγούμενη τιμή z^n , σχηματίζοντας έτσι ένα ρητό σχήμα αριθμητικής λύσης γνωστό ως σχήμα Euler.

Αριθμητικές λύσεις διόδευσης νερού από ταμιευτήρα/δεξαμενή

Μια βελτιωμένη αριθμητική προσέγγιση είναι το σχήμα Heun όπου η πρόοδος από χρόνο t^n σε χρόνο t^{n+1} υπολογίζεται σε δύο βήματα. Εάν οι ποσότητες στη δεξιά πλευρά συντομεύονται συλλογικά ως $F(z)$, τότε η μέθοδος προχωρά ως εξής:

$$z^{n+1} = z^n + \frac{\Delta t}{2} [F(z^n) + F(z^*)]$$

Εκτός από τα σχήματα Euler και Heun υπάρχει μια πληθώρα άλλων αριθμητικών τεχνικών, συμπεριλαμβανομένων κυρίως των μεθόδων Runge-Kutta.

Εφόσον η αρχική τιμή του $z(t=0)=z^1$ είναι γνωστή, η αριθμητική λύση εξελίσσεται στο χρόνο με διαδοχικούς υπολογισμούς του z^{n+1} . Ταυτόχρονα, οι αντίστοιχες τιμές $S(z^{n+1})$ βρίσκονται χρησιμοποιώντας την καμπύλη επίπεδου-επιφάνειας (z - S) για τη δεδομένη δεξαμενή.

Αριθμητικές λύσεις διόδευσης νερού από ταμιευτήρα/δεξαμενή

Δεδομένου ότι τις περισσότερες φορές η καμπύλη z - S διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας ένα προκαθορισμένο βήμα Δz (Εικόνα 2.2), η τιμή του $S(z^{n+1})$ υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή

ως:

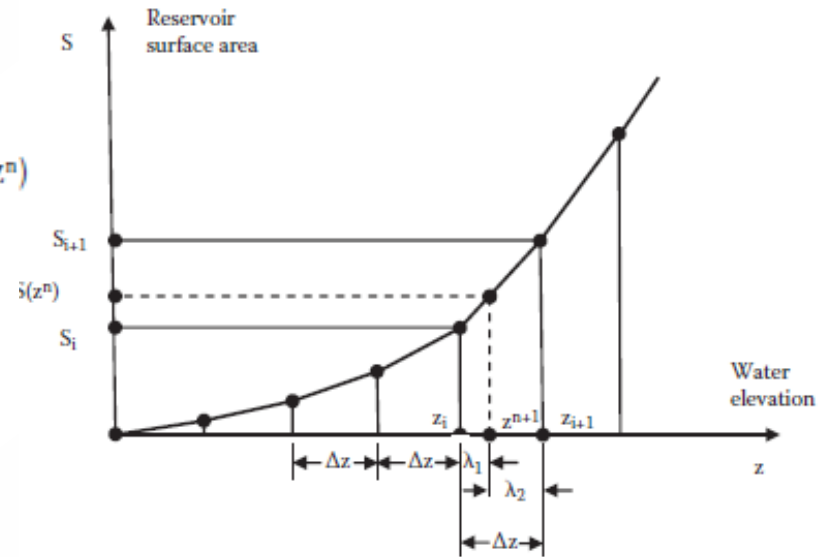
$$\frac{S_{i+1} - S_i}{z_{i+1} - z_i} = \frac{S(z^n) - S_i}{z^{n+1} - z_i}$$

Setting $\Delta z = z_{i+1} - z_i$ and $\lambda_1 = z^{n+1} - z_i$, the interpolated value of $S(z^n)$

$$S(z^n) = S_i + \frac{\lambda_1}{\Delta z} (S_{i+1} - S_i)$$

Σε κάθε χρονικό βήμα, η αριθμητική ολοκλήρωση εκτιμά μια νέα τιμή z^{n+1} , με βάση την προηγούμενη υπολογισμένη τιμή του z^n , καθώς και τις γνωστές τιμές

των $S(z^n)$ και $Q_{in}(t^n)$. Έτσι, η λύση παράγει μια διακριτή χρονοσειρά τιμών $z(t)$ και, στη συνέχεια, τις τιμές της παροχής εκροής Q_{out} και της επιφάνειας της δεξαμενής $S(z)$. Οι υπολογισμένες τιμές για όλα τα χρονικά επίπεδα αποτελούν τις χρονοσειρές, άμεσα εφαρμόσιμες για λειτουργική χρήση. Έτσι, το μέγιστο επιτευχθέν επίπεδο ελεύθερης επιφάνειας του νερού στη δεξαμενή κατά τη διαδικασία πλήρωσης-εκκένωσης, η μέγιστη τιμή της παροχής εκροής, ο όγκος αποθήκευσης νερού που απομένει, και άλλες κρίσιμες ποσότητες μπορούν εύκολα να εκτιμηθούν ώστε να λαμβάνονται αποφάσεις διαχείρισης



2.2 Interpolation from the stage–surface area curve.

Δ.3.3. Προβλήματα ODEs στην Υδραυλική

Αριθμητικές λύσεις διόδευσης νερού από ταμιευτήρα/δεξαμενή

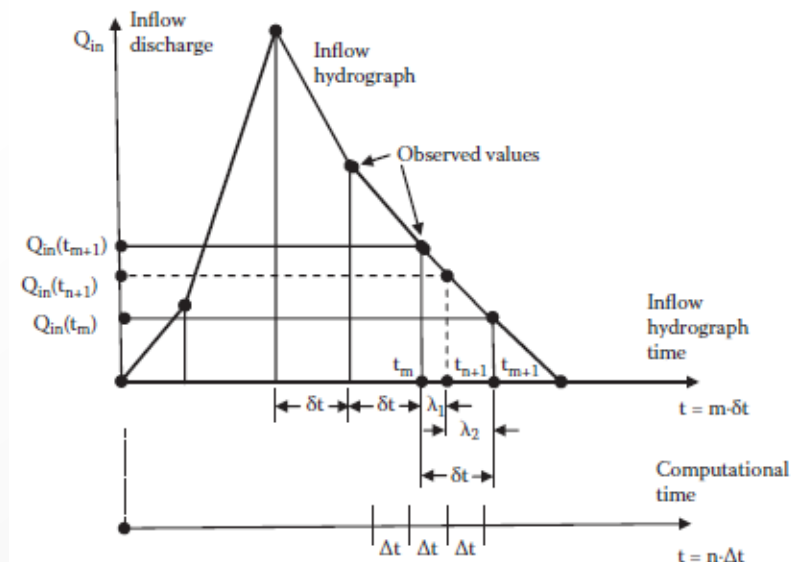
Μπορεί να απαιτηθεί μια διαδικασία παρεμβολής για την εκτίμηση του $Q_{in}(t^{n+1})$ εάν το υδρογράφημα εισροής παρέχεται σε διακριτά χρονικά βήματα δt , διαφορετικά από το υπολογιστικό χρονικό βήμα Δt (Εικόνα). Στη συνέχεια, η τιμή του $Q_{in}(t^{n+1})$ υπολογίζεται με βάση τις μετρούμενες τιμές $Q_{in}(t^{m+1})$ και $Q_{in}(t^m)$:

$$Q_{in}(t_{n+1}) = Q_{in}(t_m) + \frac{\lambda_1}{\Delta t} [Q_{in}(t_{m+1}) - Q_{in}(t_m)]$$

where $\lambda_1 = t_{n+1} - t_m$.

Συνοψίζοντας, το αριθμητικό μοντέλο αποτελείται από τη ΣΔΕ-ODE, τις παραμέτρους εισόδου, και την τιμή αρχικής συνθήκης για το z . Ο αλγόριθμος επίλυσης αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

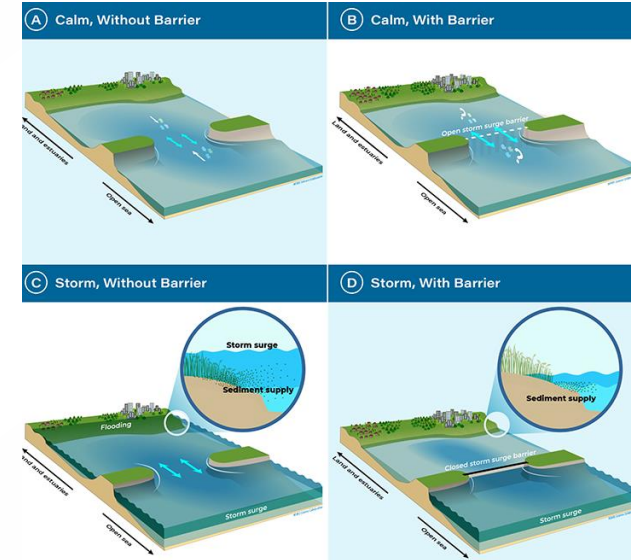
1. Δώσε τιμές εισόδου για
 - Αρχικό βάθος z_0
 - Συντελεστή εκροής C_o (ή C_w)
 - Υδρογράφημα εισροής $Q_{in}(t_m)$, για $t_m = m \cdot \delta t$
 - Σχέση στάθμης-επιφάνειας δεξαμενής $S(z_i)$, για $z_i = n \cdot \Delta z$
 - Υπολογιστικό χρονικό βήμα Δt
2. Εκτέλεση υπολογισμών εκτίμησης σειράς τιμών z^n $n=1-n_{max}$
 Και εκτίμηση εξαρτώμενων παραμέτρων S και Q_{out}
3. Αποθήκευση τιμών z , S και Q_{out} σε αρχεία εξόδου 4. Τέλος



Δ.3.3. Προβλήματα ODEs στην Υδραυλική

Διαχείριση ποιότητας νερού σε λιμνοθάλασσα

2^η εφαρμογή αριθμητικής λύσης ΣΔΕ-ODE: διαχείριση ποιότητας νερού σε λιμνοθάλασσα που συνδέεται μέσω μικρής εισόδου με ένα τεράστιο υδάτινο σώμα (ανοιχτή θάλασσα).



Ο όγκος νερού της λιμνοθάλασσας V ανανεώνεται μέσω μιας χρονικά εξαρτώμενης εκροής νερού, $Q(t)$. Αυτή η εισροή και η (ίση) εκροή οφείλεται σε διάφορες φυσικές αιτίες, όπως ο άνεμος, η παλίρροια, η απορροή της λεκάνης και η άμεση βροχόπτωση, καθώς και οι ανθρώπινες δραστηριότητες (π.χ. άντληση).

Λαμβάνοντας υπόψη μια μέση χρονική εκροή ανανέωσης \bar{Q} ή Q_{mean} τότε ο χρόνος ανανέωσης (ή έκπλυσης) της λιμνοθάλασσας ορίζεται ως $T_f = V/Q_{\text{mean}}$. Η ποιότητα του νερού στη λιμνοθάλασσα θα μπορούσε να περιγραφεί γνωρίζοντας τα επίπεδα συγκέντρωσης διαφόρων ουσιών, όπως το διαλυμένο οξυγόνο (DO), η βιοχημικά απαιτούμενο οξυγόνο (BOD), τα θρεπτικά συστατικά, τα βαρέα μέταλλα και οι τοξικές οργανικές ενώσεις. Στη συνέχεια, για λόγους απλότητας και χωρίς απώλεια γενικότητας, θα εξεταστεί ένας μόνο ρύπος.

Δ.3.3. Προβλήματα ODEs στην Υδραυλική

Διαχείριση ποιότητας νερού σε λιμνοθάλασσα

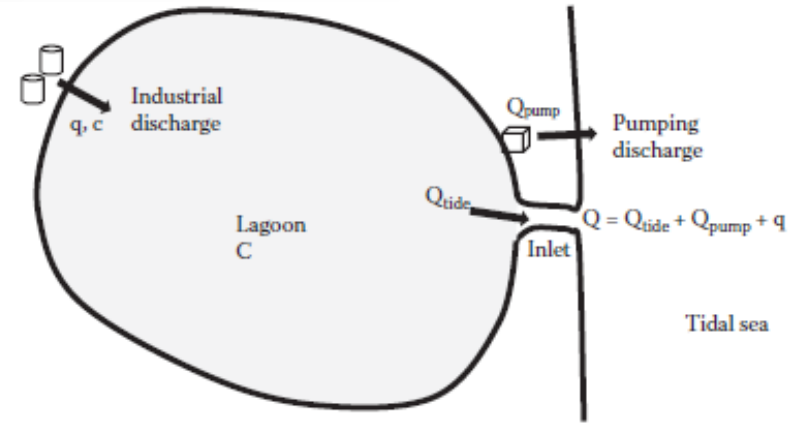


Figure 2.6 Water volume exchanges in the lagoon system.

Έτσι, η ποιότητα του νερού θα καθοριστεί από τη μέση τιμή συγκέντρωσης (C) ενός ρύπου που κατανέμεται ομοιόμορφα σε ολόκληρη την περιοχή της λιμνοθάλασσας. Οι ρύποι μπορεί να εισέλθουν στη λιμνοθάλασσα μέσω σημειακών πηγών (βιομηχανικές ή δημοτικές εκροές αγωγών) ή διάχυτων πηγών (γεωργική ή αστική απορροή). **Λαμβάνοντας υπόψη μια σημειακή πηγή με ρυθμό ροής (παροχή) q και συγκέντρωση ρύπων c** , θεωρείται ότι μόλις εκχυθεί στον αποδέκτη, ο ρύπος εξαπλώνεται και αναμιγνύεται στιγμιαία, ισότροπα και ομοιόμορφα σε ολόκληρη τη λιμνοθάλασσα. Προκειμένου να εκτιμηθεί **η συγκέντρωση ρύπων $C(t)$** στη λιμνοθάλασσα, μπορεί να εξαχθεί μια εξίσωση ισοζυγίου μάζας (συνέχεια) για τη συγκεκριμένη ουσία. Χρησιμοποιώντας την ογκομετρική προσέγγιση, σε ένα **πεπερασμένο χρονικό διάστημα Δt** , ο **όγκος του εισερχόμενου ρύπου είναι $cq\Delta t$** και **αυτός της εκροής είναι $C(Q+q)\Delta t$** , με την *προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει εισροή ρύπανσης από την ανοιχτή θάλασσα*. Η **διαφορά μεταξύ της ροής ρύπων εισροής και εκροής** καθορίζει τη **μεταβολή της συγκέντρωσης ρύπων μέσα στη λιμνοθάλασσα $V \cdot \Delta C$** . Εξίσωση συνέχειας:

$$V\Delta C = cq\Delta t - C(Q + q)\Delta t$$

Δ.3.3. Προβλήματα ODEs στην Υδραυλική

Διαχείριση ποιότητας νερού σε λιμνοθάλασσα

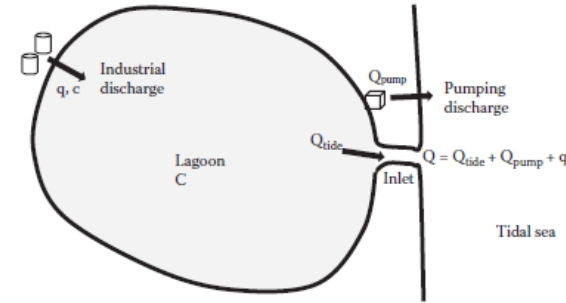


Figure 2.6 Water volume exchanges in the lagoon system.

Αφού ληφθούν τα όρια ($\lim \rightarrow$) των ΔC και ΔQ , η εξίσωση οδηγεί σε μια ΣΔΕ (ODE):

Αυτό είναι μια ανομοιογενής ΣΔΕ 1^{ης} τάξης αναλυτικά επιλυόμενη για σταθερά q $\frac{dC}{dt} = q \frac{c}{V} - (Q + q) \frac{C}{V}$; αριθμητική επίλυση στην περίπτωση μεταβλητής $Q(t)$ ή $q(t)$ (ή $c(t)$). Εάν και το q και το Q είναι σταθερά, μετά από αρκετό χρόνο (κατάσταση ευστάθειας), η αναλυτική λύση για τη συγκέντρωση C σταθεροποιείται σε:

$$C = \frac{cq}{Q + q}$$

Στη ΣΔΕ ο τελευταίος όρος δείχνει ξεκάθαρα τη σημασία του χρόνου έκπλυσης, T_f . Σε περ συντηρητικής (σε αποικοδόμηση) ουσίας (π.χ. μικροβιακή ρύπανση) ο **ρύπος βιοαποικοδομείται με ρυθμό $-\lambda C$** , όπου λ είναι συντελεστής διάσπασης με διαστάσεις [sec^{-1}] και η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dC}{dt} = q \frac{c}{V} - (Q + q) \frac{C}{V} - \lambda C$$

Η απλούστερη αριθμητική λύση είναι το σχήμα Euler, όπου η παράγωγος προπεπερασμένη διαφορά που οδηγεί στην έκφραση $\frac{dC}{dt} \approx \frac{C_{n+1} - C_n}{\Delta t}$ Επιλύοντας την άγνωστη τιμή της συγκέντρωσης τη χρονική στιγμή $n + 1$, η εξίσωση γράφεται ως $C_{n+1} = C_n + \Delta t \left(q \frac{c}{V} - (Q + q) \frac{C_n}{V} - \lambda C_n \right)$ Αυτό είναι ένα πρόβλημα αρχικής τιμής, επομένως απαιτεί γνώση των τιμών συγκέντρωσης C τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Δ.3.3. Προβλήματα ODEs στην Υδραυλική

Διαχείριση ποιότητας νερού σε λιμνοθάλασσα

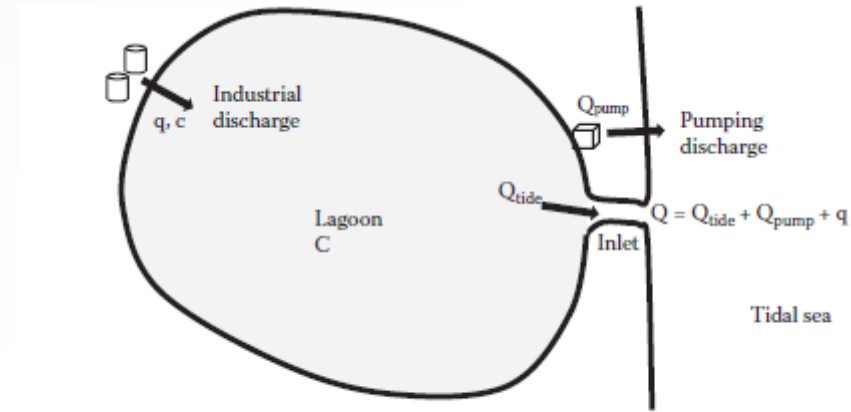


Figure 2.6 Water volume exchanges in the lagoon system.

Η απλούστερη αριθμητική λύση είναι το σχήμα Euler, όπου η παράγωγος προσεγγίζεται με μια εμπρόσθια πεπερασμένη διαφορά που οδηγεί στην έκφραση:

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} = q^n \frac{c}{V} - (Q^n + q^n) \frac{C^n}{V} - \lambda C^n$$

Επιλύοντας την άγνωστη τιμή της συγκέντρωσης τη χρονική στιγμή $n+1$, η εξίσωση γράφεται ως

$$C^{n+1} = C^n + q^n \frac{c}{V} \Delta t - (Q^n + q^n) \frac{C^n}{V} \Delta t - \lambda C^n \Delta t$$

Αυτό είναι ένα πρόβλημα αρχικής τιμής, επομένως απαιτεί γνώση των τιμών συγκέντρωσης ρύπων τη χρονική στιγμή $t=0$.

Δ.3.4. Παραδείγματα με κώδικες

Διαχείριση ποιότητας νερού σε λιμνοθάλασσα

Μια λιμνοθάλασσα συνδέεται μέσω μιας στενής εισόδου με μια παλιρροϊκή λεκάνη (θάλασσα). Η εκροή από ένα παρακείμενο βιομηχανικό αγωγό εκροής περιέχει μια ορισμένη συγκέντρωση ενός αποσυντιθέμενης ρυπαντικής ουσίας. Η λιμνοθάλασσα περιέχει ήδη κάποια επίπεδα συγκέντρωσης του ίδιου ρυπαντή. Προκειμένου να διευκολυνθεί η διαδικασία καθαρισμού, εκτός από τη διαδικασία φυσικής ανανέωσης (έκπλυσης), το νερό αντλείται από τη λιμνοθάλασσα στην ανοιχτή θάλασσα (προηγ. Εικόνα). Υποθέτοντας τα αποτελέσματα ανανέωσης των εισροών και εκροών υδάτων κατά τη διάρκεια του παλιρροϊακού κύκλου, η ροή έκπλυσης εκφράζεται ως:

$$Q = Q_0 \left[\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \text{ with } Q_{\max} = Q_0 \text{ and } Q_{\min} = 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα ακόλουθα δεδομένα, υπολογίστε τις επιπτώσεις τριών διαφορετικών ρυθμών άντλησης στη συγκέντρωση ρύπων που ποικίλλει από την παλίρροια στη λιμνοθάλασσα:

- Υδατικός όγκος λιμνοθάλασσας = 50.000 m³
- Αρχική συγκέντρωση ρύπων στη λιμνοθάλασσα = 1,0 g/m³
- Ρυθμός ροής στη βιομηχανική εγκατάσταση = 0,1 m³/s
- Συγκέντρωση ρύπων των βιομηχανικών λυμάτων = 500,0 g/m³
- Παλιρροϊακή περίοδος = 43.200 s (ημιημερήσια)
- Μέγιστη παλιρροϊακή ροή = 2,0 m³/s
- Ρυθμός άντλησης = 0, 1,0m³/s και 5,0m³/s
- Συντελεστής αποσύνθεσης = 10⁻⁶ s⁻¹

υπολογιστικό χρονικό βήμα Δt=300s n=2000 χρονικά βήματα

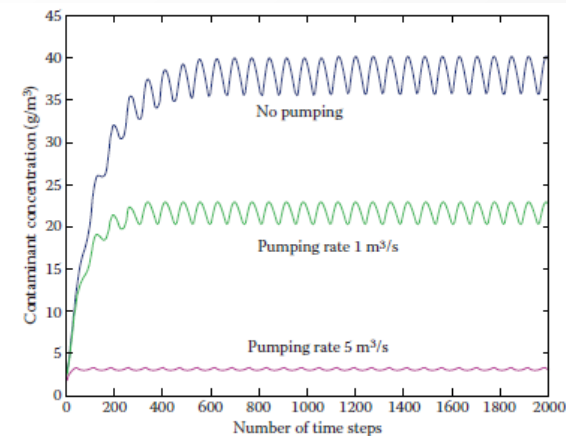


Figure 2.7 Pumping effects on contaminant concentration within the lagoon.

Δ.3.3. Προβλήματα ODEs στην Υδραυλική

Διαχείριση ποιότητας νερού σε λιμνοθάλασσα

```
% Example 2.3 Pollution in a Semi-enclosed Tidal Lagoon
% Qin = Pollutant discharge rate [m^3/s];
% Cin = Pollutant concentration rate at the source [g/m^3];
% Vol = Water volume of the lagoon [m^3];
% Qo = Maximum renewal discharge [m^3/s];
% Qout = Renewal discharge varying with the tide [m^3/s];
% Co = Initial pollutant concentration throughout the lagoon
[g/m^3];
```

```
% Rb = Biodegradation rate [1/s];
% Qp = Pump discharge rate [m^3/s];
% Tp = Tidal period [s];
% Dt = Time step [s];
```

```
clc; clear all; close all;
% Input data
Qin = 0.1;
Cin = 500;
Vol = 50000;
```

```
Qo = 2;
Co = 1;
Rb = 0.000001;
Qp0 = 0;
Qp1 = 1;
Qp5 = 5;
Tp = 43200;
Dt = 300;
C0 = Co;
C1 = Co;
C5 = Co;
```

```
% Main program;
for n = 1:2000;
    t = n*Dt;
    % Different outflow pumping rates;
    Qout0 = Qo*abs(cos((2*pi/Tp)*t))+Qp0;
    Qout1 = Qo*abs(cos((2*pi/Tp)*t))+Qp1;
    Qout5 = Qo*abs(cos((2*pi/Tp)*t))+Qp5;
    % Calculation of the contaminant concentrations;
    Cnew0 = C0 + (Cin*Dt*Qin/Vol) - (C0*Dt*Qout0/Vol)
    - (Rb*Dt*C0);
    Cnew1 = C1 + (Cin*Dt*Qin/Vol) - (C1*Dt*Qout1/Vol)
    - (Rb*Dt*C1);
    Cnew5 = C5 + (Cin*Dt*Qin/Vol) - (C5*Dt*Qout5/Vol)
    - (Rb*Dt*C5);
```

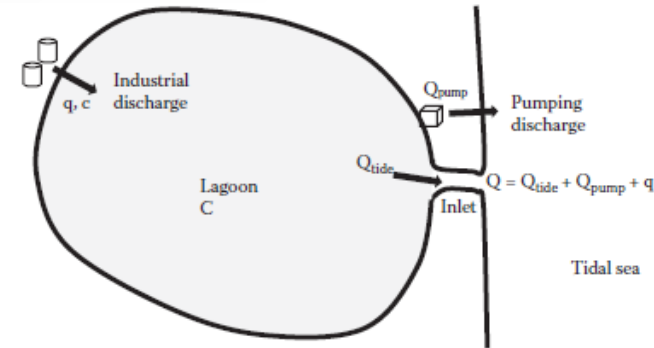


Figure 2.6 Water volume exchanges in the lagoon system.

```
% Renewal of the contaminant concentrations;
C0=Cnew0;
C1=Cnew1;
C5=Cnew5;
m=n;
Cplot0(m)=C0;
Cplot1(m)=C1;
Cplot5(m)=C5;
end
m=n;
Cplot0(m)=C0;
Cplot1(m)=C1;
Cplot5(m)=C5;
plot(1:m,Cplot0,'b')
hold on
plot(1:m,Cplot1,'g')
plot(1:m,Cplot5,'m')
xlabel('Number of time steps')
ylabel('Contaminant concentration [g/m^3]')
text(800,6, 'pumping rate 5 m^3/s')
text(800,18, 'pumping rate 1 m^3/s')
text(800,34, 'no pumping')
```

α

β

γ

Δ.3.4. Παραδείγματα με κώδικες

Διαχείριση Αποθήκευσης-Εκροής Νερού σε-από Δεξαμενή

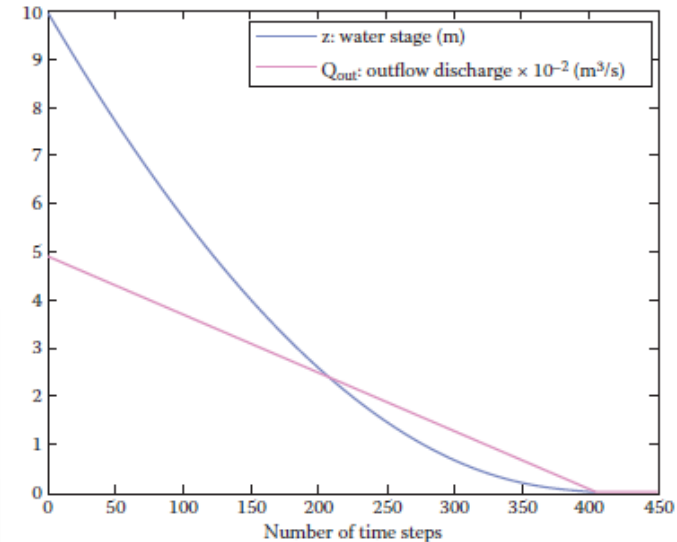
Μια κυλινδρικού σχήματος δεξαμενή γεμάτη με νερό αδειάζει μέσω ενός κυκλικού ανοίγματος στο κάτω μέρος.

Δεδομένων των παρακάτω τιμών εισόδου, ο σκοπός αυτής της άσκησης είναι η εκτίμηση του χρόνου που απαιτείται για να αδειάσει η δεξαμενή:

- Ύψος δεξαμενής = 10,0 m
- Οριζόντια επιφάνεια δεξαμενής = 5,0 m²
- Εμβαδόν διατομής στομίου = 0,005 m²
- Συντελεστής εκροής = 0,7.

Το αριθμητικό σχήμα δίνεται από την σχετική Εξίσωση χωρίς εισροή Q_{in} ($n=0$).

Για την αριθμητική λύση η δεξαμενή διακριτοποιείται κατακόρυφα σε $N=10$ στρώσεις ίσου πάχους. Κάθε στρώμα (n) περιορίζεται μεταξύ του οριζόντιου επιπέδου n και του επιπέδου $n+1$ ($n=1$ έως $N+1$). Το επίπεδο $n=1$ αντιστοιχεί στον πυθμένα και το επίπεδο $n=N+1$ στην ελεύθερη επιφάνεια.



Το υπολογιστικό βήμα χρόνου επιλέγεται ως $\Delta t = 5$ s. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης της υποχώρησης της ανύψωσης του νερού και της παροχής εκροής απεικονίζονται στο Σχήμα.

Δ.3.3. Προβλήματα ODEs στην Υδραυλική

Διαχείριση Αποθήκευσης-Εκροής Νερού σε-από Δεξαμενή

```

% Example 2.1 Cylindrical Reservoir with No Refilling
Emptying through an Orifice
% S = Reservoir surface area of a cylindrical tank [m^2];
% H = Reservoir initial depth [m];
% A = Orifice surface area [m^2];
% Co = Discharge coefficient [dimensionless];
% Dt = Computational time step [s];
% Dz = Computational depth step [m];
% Qout(z) = Outflow discharge [m^3/s];
% z(t) = Numerical solution for the water depth [m];
% ns = number of horizontal sections;
clc; clear all; close all;
% Input data;
g=9.81;
ns=10;
H=10;
Dz=H/ns;
A=0.005;
Co=0.7;
Dt=5;
S=[5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0];
% Initial conditions;
z=H;
k=0;
% Main program;
for k=1:10000;
    if z<0
        z=0;
    end
    Qout=Co*A*sqrt(2*g*z);
    j=1;
    if z>j*Dz; j=j+1;
    end
    dH=j*Dz-z;
    S1=S(j+1)+(S(j)-S(j+1))*dH/Dt;
    znew=z-Qout*Dt/S1;
    z=znew;
    Z(k)=znew;
    % To facilitate plotting take 100*Qout;
    Qp(k)=Qout*100; m=k;
end
plot(1:m,Z,'b','Linewidth',1.5)
hold on
plot(1:m,Qp,'m','Linewidth',1.5)
v=[0, 450, 0, 10];
axis(v)
xlabel('Number of time steps'), ylabel('')
legend('z: Water stage [m]','Qout: Outflow discharge x 10E-2
[m^3/s]')
    
```

α

β

Δ.3.4. Παραδείγματα με κώδικες

Διαχείριση Υδατοδεξαμενής – Υδραγωγείου

Για το εξωτερικό υδραγωγείο η χρήση δεξαμενών είναι ο πλέον αποδοτικός τρόπος για την συσσώρευση του ύδατος και την παροχή της ροής με σχετικά σταθερό φορτίο (Κουτίτας, 1982).

Η παροχή του ύδατος εντός αγωγού με εμβαδό διατομής a συνδεδεμένου με δεξαμενή είναι: $Q = C_d a U$

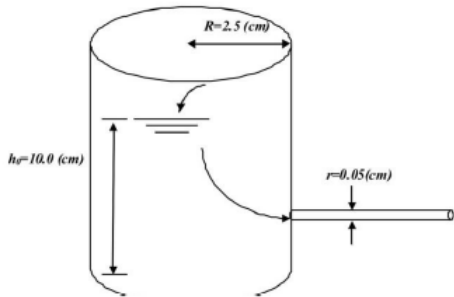
όπου Q η παροχή, C_d ο συντελεστής εκροής και U η μέση τιμή της ταχύτητας εντός του αγωγού. Από την εξίσωση του Bernoulli, η ταχύτητα εκροής U από τη δεξαμενή σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια, είναι:

$$U = (2.0 gh)^{1/2} \rightarrow Q = C_d a (2.0 gh)^{1/2}$$

Η παροχή, όμως, αυτή προήλθε από τον υποβιβασμό της στάθμης h του ύδατος εντός της δεξαμενής: $Q = -A(dh/dt)$

όπου A το εμβαδό της διατομής της δεξαμενής και dh/dt η ταχύτητα πτώσης της ελεύθερης επιφάνειας του ύδατος εντός της δεξαμενής. Επομένως:

$$A(dh/dt) = -C_d a (2.0 gh)^{1/2}$$



$$\frac{dh}{dt} = -C_d \left(\frac{a}{A} \right) (2.0 gh)^{1/2}$$

Απευθείας προσέγγιση της Εξίσωσης γίνεται με το να χρησιμοποιηθεί το παρακάτω αριθμητικό σχήμα ρητής τεχνικής, όπου j η χρονική στιγμή και δt το χρονικό βήμα. Αυτή, λοιπόν, η εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των τιμών της ταχύτητας κατά μήκος της πρώτης χρονοσειράς, αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες κατά μήκος της $t=0$ στο δεξιό μέρος της Εξίσωσης.

$$h_{j+\delta t} = h_j - C_d \frac{a \delta t}{A} (2.0 g)^{1/2} h_j^{1/2}$$

Κουτίτας ΧΓ (2005). Υπολογιστική Υδραυλική, Εκδ. Επίκεντρο, Σελ.: 199, ISBN:9789606645501

Κεφάλαιο 2 (τέλος)

Koutitas C.G., Scarlatos P.D. (2016). Computational Modelling in Hydraulic and Coastal Engineering. CRC Press, Taylor & Francis Group. Κεφάλαιο 2

Σούλης, Ι. (2015). Υπολογιστικές τεχνικές υδραυλικής μηχανικής. Kallipos, Open Academic Editions. <http://hdl.handle.net/11419/3997> Κεφάλαιο 5.1