



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Τμήμα
Πολιτικών Μηχανικών



Υπολογιστική Μηχανική Ρευστών

Θεωρία και Εφαρμογές για Πολιτικούς Μηχανικούς

Εξάμηνο: **9^ο**

Κωδικός: **TMB329**

Μάθημα: **Επιλογής ΤΥΕ**

Διάλεξη **Δ.4. Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους (PDEs)**

Διδάσκων υπεύθυνος μαθήματος:

Χρήστος Β. Μακρής

Επίκουρος Καθηγητής (επί θητεία)

ΔΠΘ

Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ

Ειδίκευση: Υδραυλική & Περιβαλλοντική Τεχνική

ΜΔΕ Τεχνολογία Υδατικών Πόρων ΕΜΠ

Ειδίκευση: Διαχείριση Παράκτιας Ζώνης

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ

Ειδίκευση: Υπολογιστική Ρευστοδυναμική - Κυματομηχανική

Αίθουσα Η/Υ - Ισόγειο Κτιρίου Α' Πολ. Μηχ. ΔΠΘ - Ξάνθη, 14-21 Νοεμβρίου 2024

Δ.4. Διάρθρωση Παρουσίασης (α)

1. Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους

Partial Differential Equations – PDEs

- Τύποι εξισώσεων PDEs
- Τάξη, γραμμικές και μη γραμμικές εξισώσεις
- Ελλειπτικές
- Παραβολικές
- Υπερβολικές

2. Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (Finite Differences Method)

- Επανάληψη εννοιών

3. Χωρική Διακριτοποίηση – Κάνναβος και Πλέγμα

- Έκκεντροι κάνναβοι
- Δομημένα πλέγματα
- Αδόμητα πλέγματα
- Αρχικές και οριακές συνθήκες

Δ.4. Διάρθρωση Παρουσίασης (β)

4. Επίλυση ΜΔΕ

- Κριτήριο ευστάθειας (Courant-Friedrichs-Lewy, CFL)
- Κριτήριο ακρίβειας
- Κριτήριο σύγκλισης

5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

- Ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές διαφορές
 - Εξίσωση Laplace
 - Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel για λύση γραμμικού αλγεβρικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων
 - Προσέγγιση Οριακών Συνθηκών
- Παραβολικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές διαφορές
 - Εξίσωση διάχυσης
 - Σχήμα με Εμπρόσθιες στο χρόνο – Κεντρικές στο χώρο διαφορές (Forward in time, central in space, FTCS)
 - Αριθμητικό σχήμα Crank-Nicolson

Δ.4. Διάρθρωση Παρουσίασης (Υ)

5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

- Υπερβολικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές διαφορές
 - Εξίσωση διάδοσης κύματος
 - Ασταθές σχήμα Euler
 - Αριθμητικό σχήμα τύπου Godunov
 - Αριθμητικό σχήμα τύπου Lax
 - Αριθμητικό σχήμα τύπου Fromm
 - Αριθμητικό σχήμα Μείωσης Συνολικής Διακύμανσης (ΜΣΔ) – Total Variation Diminishing (TVD)

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Συμβολισμοί

Γενικά ισχύει:

$$\begin{array}{lll} \partial u / \partial t, \partial^2 u / \partial t^2, \partial^3 u / \partial t^3 & u_t = \partial u / \partial t, u_{tt} = \partial^2 u / \partial t^2, u_{ttt} = \partial^3 u / \partial t^3 & \text{όπου } u \equiv u(x, t) \\ \partial u / \partial x, \partial^2 u / \partial x^2, \partial^3 u / \partial x^3 & u_x = \partial u / \partial x, u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2, u_{xxx} = \partial^3 u / \partial x^3 & \text{όπου } u \equiv u(x, t) \end{array}$$

Θεωρούμε ότι, ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται οι μερικές παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης είναι προφανής. Το ίδιο προφανές θα πρέπει να είναι και το γεγονός ότι, τα σύμβολα που χρησιμοποιήσαμε γι' αυτές τις παραγώγους δεν είναι και τόσο απλά. Γι' αυτό, από τούτο το σημείο και πέρα, θα υιοθετήσουμε δύο άλλους, αρκετά απλούστερους, συμβολισμούς, που ο καθένας τους έχει ειδικότερα πλεονεκτήματα.

Συγκεκριμένα, τις πρώτες μερικές παραγώγους τις $u(x, y)$ ως προς τις μεταβλητές x, y θα τις συμβολίζουμε με $u_x(x, y)$ και $u_y(x, y)$, αντίστοιχα. Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης ως προς τις ίδιες μεταβλητές θα συμβολίζονται με $u_{xx}(x, y)$ και $u_{yy}(x, y)$. Για τις μικτές παραγώγους δεύτερης τάξης θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $u_{xy}(x, y)$ και $u_{yx}(x, y)$ και μάλιστα χωρίς διάκριση, αφού κυρίως θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις της κλάσης $C^2(U)$. Είναι φανερό ότι, τα σύμβολα για τις μερικές παραγώγους μεγαλύτερης τάξης απλώς έχουν κάτω δείχτες με τόσες θέσεις, όσες και η τάξη της παραγώγου, τις οποίες καταλαμβάνουν τα γράμματα x και y .

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Συμβολισμοί

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, ακόμα και όταν και οι δύο από τις μικτές παραγώγους που μόλις ορίσαμε υπάρχουν σε κάποιο σημείο (a, b) του πεδίου ορισμού U της $u(x, y)$, δεν είναι υποχρεωτικά ίσες. Όμως, αν οι μικτές παράγωγοι ορίζονται σε κάθε σημείο του ανοιχτού σύνολου U και αποτελούν συνεχείς συναρτήσεις, τότε τα πράγματα αλλάζουν. Σ' αυτή την περίπτωση, λέμε ότι η συνάρτηση $u(x, y)$ ανήκει στην κλάση $C^2(U)$ και τότε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) \text{ για κάθε } (x, y) \in U.$$

Για παράδειγμα, οι μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης συμβολίζονται με $u_{xxx}(x, y)$, $u_{xxy}(x, y)$, $u_{xyy}(x, y)$ και $u_{yyx}(x, y)$ κλπ. Και πάλι, όταν η $u(x, y)$ ανήκει στην κλάση $C^3(U)$, όταν δηλαδή όλες οι μερικές της παράγωγοι τρίτης τάξης ορίζονται παντού στο U και είναι συνεχείς συναρτήσεις, τα παραπάνω τέσσερα σύμβολα αρκούν, αφού τότε, για παράδειγμα, $u_{xxy}(x, y) = u_{xyx}(x, y) = u_{yxx}(x, y)$.

Ο δεύτερος τρόπος αναπαράστασης των μερικών παραγώγων που θα χρησιμοποιούμε πολλές φορές στηρίζεται στη χρήση του σύμβολου ∂ . Έτσι, η πρώτη μερική παράγωγος της $u(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή x θα συμβολίζεται με $\partial_x u(x, y)$, εκείνη ως προς τη μεταβλητή y θα τη συμβολίζουμε με $\partial_y u(x, y)$, την δεύτερης τάξης μερική παράγωγο ως προς x θα τη γράφουμε σαν $\partial_x^2 u(x, y)$ κλπ. Με άλλα λόγια,

$$\partial_x u \equiv u_x, \quad \partial_y u \equiv u_y,$$

$$\partial_x^2 u \equiv u_{xx}, \quad \partial_{xy}^2 u \equiv u_{xy}, \quad \partial_{yy}^2 u \equiv u_{yy}$$

$$\partial_x^3 u \equiv u_{xxx}, \quad \partial_{xxy}^3 u \equiv u_{xxy}, \quad \partial_{xyy}^3 u \equiv u_{xyy}, \quad \partial_{yyy}^3 u \equiv u_{yyy},$$

όπου, για συντομία, παραλείψαμε την παρένθεση (x, y) που προσδιορίζει τις ανεξάρτητες μεταβλητές.

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Συμβολισμοί

$$\mathbf{E}(x, y, z) := (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} := X_x + Y_y + Z_z.$$

$$\nabla \times \mathbf{E} := (Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y).$$

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = (X(x, y, z, t), Y(x, y, z, t), Z(x, y, z, t)),$$

τότε το νόημα του τελεστή $\mathbf{v} \cdot \nabla$ δεν αργεί να γίνει ξεκάθαρο. Γιατί, ως κλίση μιας συνάρτησης F ορίζεται το διανυσματικό πεδίο

$$(5.18) \quad \nabla F := (F_x, F_y, F_z).$$

Από τον ορισμό (5.18) είναι φανερό ότι η ∇F , που συχνά γράφεται και ως $\text{grad } F$, μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της δράσης του διανυσματικού τελεστή

$$(5.19) \quad \nabla := (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

πάνω στη συνάρτηση F . Τότε το νόημα του τελεστή $\mathbf{v} \cdot \nabla$ γίνεται αμέσως σαφές:

$$(5.20) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla = X \partial_x + Y \partial_y + Z \partial_z.$$

Μένει να εξηγήσουμε το νόημα του τελεστή ∇^2 που, μάλιστα, είναι και επώνυμος. Λέγεται *τελεστής (του) Laplace* κι αποτελεί τη σύνθεση του τελεστή της απόκλισης, με τον τελεστή της κλίσης. Δηλαδή,

$$(5.21) \quad \nabla^2 F := \nabla \cdot (\nabla F).$$

Το μόνο που δεν μπορούμε να εξηγήσουμε είναι το γιατί οι μαθηματικοί προτιμούν να συμβολίζουν τον τελεστή του Laplace με Δ , ενώ οι φυσικοί προτιμούν το σύμβολο ∇^2 . Εμείς, για να κρατάμε ίσες αποστάσεις και από τα δύο ... αντιμαχόμενα μέρη, θα χρησιμοποιούμε και τα δύο σύμβολα αδιακρίτως. Απλώς θα σημειώσουμε πως, ο συνδυασμός των (5.11) και (5.18) δείχνει αμέσως ότι

$$(5.22) \quad \nabla^2 F \equiv \Delta F = F_{xx} + F_{yy} + F_{zz}.$$

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Τάξη, γραμμικές και μη γραμμικές εξισώσεις

Πριν γίνει ο χαρακτηρισμός των ειδών των μερικών διαφορικών εξισώσεων ως **ελλειπτικές, παραβολικές και υπερβολικές**, χαρακτηρισμός αναγκαίος για την εφαρμογή των αριθμητικών σχημάτων, αξίζει να σημειωθεί ότι όλες οι μερικές διαφορικές εξισώσεις δεν επιλύονται με την ίδια τεχνική. **Τάξη μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι ο βαθμός της μεγαλύτερης μερικής παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση.** Αριθμός των μεταβλητών είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών της εξίσωσης, π.χ. η εξίσωση δύο μεταβλητές x, t και είναι 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{έχει}$$

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι δυνατό να είναι **γραμμικές ή μη γραμμικές**. Στις γραμμικές εξισώσεις ο αριθμός των εξαρτημένων μεταβλητών και όλων των αναφερόμενων παραγώγων αυτής εμφανίζονται με γραμμική μορφή, για παράδειγμα δεν εμφανίζονται πολλαπλασιαζόμενες μεταξύ τους ή δεν εμφανίζονται σε κάποια δύναμη. Η εξίσωση $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ είναι γραμμική, ενώ η εξίσωση $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ είναι μη γραμμική.

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Τάξη, γραμμικές και μη γραμμικές εξισώσεις

Για παράδειγμα, μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών χαρακτηρίζεται ως γραμμική εάν και μόνο όταν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(1.25) \quad a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u + d(x, y) = 0,$$

Ανάλογα, μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών θα πρέπει να είναι της μορφής

$$(1.26) \quad a(x, y) u_{xx} + b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + d(x, y) u_x + e(x, y) u_y + f(x, y) u + g(x, y) = 0$$

για να πούμε ότι είναι γραμμική. Διαφορετικά, την χαρακτηρίζουμε ως μη γραμμική.

Παράδειγμα 1.3

(i) Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

$$(1.6) \quad x u_y + y u_x - 2 u = 0,$$

$$(1.9) \quad x y + u_x + u_y = 0,$$

$$(1.11) \quad x u_x + y u_y + z u_z = 0,$$

είναι γραμμικές. Οι

$$(1.10) \quad u_x + u u_y = 0,$$

$$(1.12) \quad u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 0,$$

είναι μη γραμμικές.

Άσκηση

(ii) Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Γραμμική (1.16) $u_{xy} = 0.$

Γραμμική (1.17) $u_{xx} + u_{yy} = 0,$

Γραμμική (1.18) $y u_x + x u_y + u_{xx} + u_{yy} + u_{xy} = 0,$

Γραμμική (1.20) $\sin(x + y) + u_y - u_{xx} = 0.$

Γραμμική (1.21) $u_{xx} - y u_{yy} = 0.$

Μη Γραμμική (1.22) $u u_x + u_y - u_{xx} = 0.$

Μη Γραμμική (1.23) $(1 + u_y^2) u_{xx} - 2 u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0$

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Τάξη, γραμμικές και μη γραμμικές εξισώσεις

Άσκηση

Να προσδιοριστεί η τάξη κάθε μιας από τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις για τη συνάρτηση $u: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Σε κάθε περίπτωση, να εξεταστεί αν η αντίστοιχη εξίσωση είναι γραμμική ή όχι.

(i) $u_x + u + (x + y)^2 = 0$, $u = u(x, y)$.

(Γράφοντας $u = u(x, y)$, εννοούμε ότι οι ανεξάρητες μεταβλητές συμβολίζονται με x και y , αντίστοιχα. Ο ίδιος συμβολισμός ακολουθείται και στις επόμενες.)

(ii) $u_x u_y - u = 0$, $u = u(x, y)$.

(iii) $u_x + u u_y - u^2 = \sin(x y)$, $u = u(x, y)$.

(iv) $u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0$, $u = u(x, y, t)$.

(v) $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$, $u = u(r, \theta)$.

(vi) $u_{xx} - u_{tt} = \sin(u)$, $u = u(x, t)$.

(vii) $u_{xx} u_{yy} - u_x^2 = 0$, $u = u(x, y)$.

(viii) $u_t + u u_x + u_{xxx} = 0$, $u = u(x, t)$.

Λύση

(i) Πρώτης τάξης, γραμμική.

(ii) Πρώτης τάξης, μη γραμμική.

(iii) Πρώτης τάξης, μη γραμμική.

(iv) Δεύτερης τάξης, γραμμική.

(v) Δεύτερης τάξης, γραμμική.

(vi) Δεύτερης τάξης, μη γραμμική.

(vii) Δεύτερης τάξης, μη γραμμική.

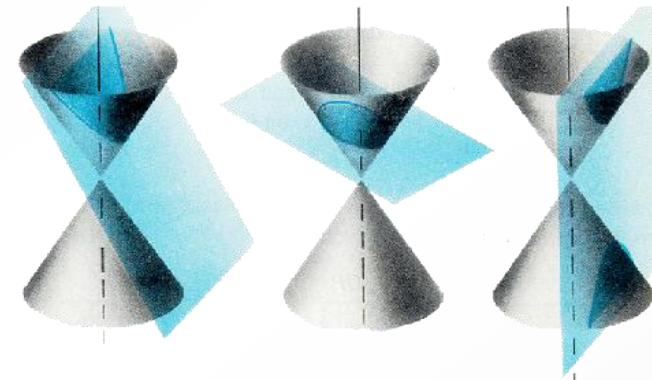
(viii) Τρίτης τάξης, μη γραμμική.

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Τύποι εξισώσεων PDEs

Προκειμένου για τη μερική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης της μορφής:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Delta \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Z u + H = 0$$



Παραβολή

$$y = \frac{1}{4f} x^2.$$

$$x^2 = 2py.$$

Έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Υπερβολή

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

όπου οι συντελεστές **A, B, Γ, Δ, E, Z, H** είναι δυνατόν να είναι συναρτήσεις της **εξαρτημένης μεταβλητής u** ή **όχι**.

Εάν **$B^2 - 4A\Gamma < 0$** η εξίσωση είναι **ελλειπτικού τύπου**

Εάν **$B^2 - 4A\Gamma = 0$** η εξίσωση είναι **παραβολικού τύπου**

Εάν **$B^2 - 4A\Gamma > 0$** η εξίσωση είναι **υπερβολικού τύπου**

Να σημειωθεί ότι ο χαρακτηρισμός βασίζεται στους συντελεστές της παραγώγου με τον μεγαλύτερο βαθμό και μόνο.

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΜΔΕ – PDEs

Μία διαφορική εξίσωση είναι ελλειπτικού τύπου, εάν ισχύει $B^2 - 4AG < 0$ σε κάθε σημείο του πεδίου ροής. Στο Σχήμα οι οριακές συνθήκες εφαρμόζονται σε θεωρητικά άπειρη απόσταση από το σημείο των διαταραχών.

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0,$$

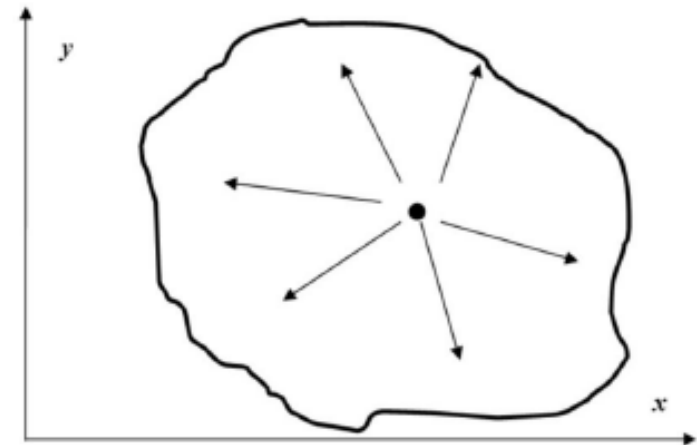
Παράδειγμα ελλειπτικών εξισώσεων είναι η **εξίσωση Laplace**:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad \nabla^2 \Phi = 0 \text{ και } \Delta \Phi = 0$$

όπου Φ μπορεί να είναι π.χ. η **συνάρτηση δυναμικού της ροής** και η **εξίσωση Poisson**:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = f \quad \nabla^2 \Phi = f \text{ και } \Delta \Phi = f$$

Στο όριο πρέπει να προσδιοριστούν ή οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής (Φ) ή η κάθετη προς το όριο μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής ή συνδυασμός των ανωτέρω δύο περιπτώσεων



Σχήμα 1.15 Χώρος επιρροής ελλειπτικών εξισώσεων.

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Παραβολικές

Μία διαφορική εξίσωση είναι παραβολικού τύπου, εάν ισχύει $\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{A}\mathbf{\Gamma} = 0$ σε κάθε σημείο του χώρου ροής. Στο Σχήμα δείχνεται η περιοχή επιδράσεων, όπου τα αποτελέσματα των διαταραχών γίνονται αισθητά σε άπειρη θεωρητικά απόσταση από τον χώρο εισαγωγής αυτών, αλλά μόνο προς τον κατάντη υπολογιστικό χώρο. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται παραβολικές.

$$\mathbf{A}u_{xx} + 2\mathbf{B}u_{xy} + \mathbf{C}u_{yy} + \mathbf{D}u_x + \mathbf{E}u_y + \mathbf{F} = 0,$$

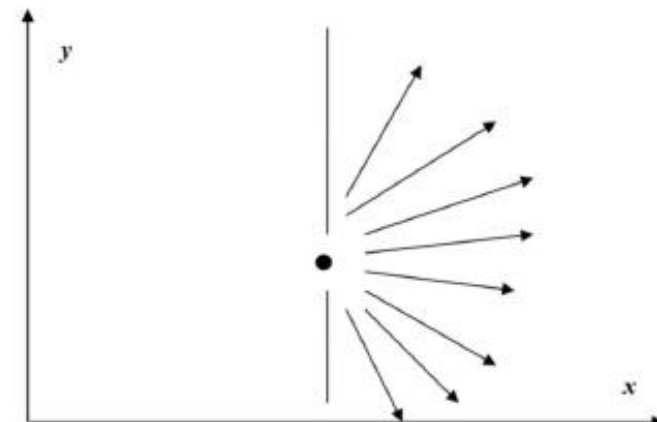
Παράδειγμα παραβολικής εξίσωσης είναι η εξίσωση διαχύσεως:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

όπου ν το κινηματικό ιξώδες και u ταχύτητα ροής.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = N \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{1-D}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = N \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad \text{2-D}$$



Σχήμα 1.16 Χώρος επιρροής παραβολικών εξισώσεων.

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Υπερβολικές

Μια διαφορική εξίσωση είναι υπερβολικού τύπου, εάν ισχύει $B^2 - 4AG > 0$ σε κάθε σημείο του χώρου ροής (Hoffmann & Chiang, 1993). Στο Σχήμα απεικονίζεται η περιοχή επιδράσεων, όπου τα αποτελέσματα των διαταραχών γίνονται αισθητά σε άπειρη θεωρητικά απόσταση από τη θέση εισαγωγής τους, αλλά μόνον κατάντη και μέσα σε συγκεκριμένο χώρο που περικλείεται από γραμμές προς τα κατάντη (2D, Mach υπερηχητική ροή). Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται υπερβολικές. Παράδειγμα υπερβολικών εξισώσεων είναι η εξίσωση κύματος δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{1-D}$$

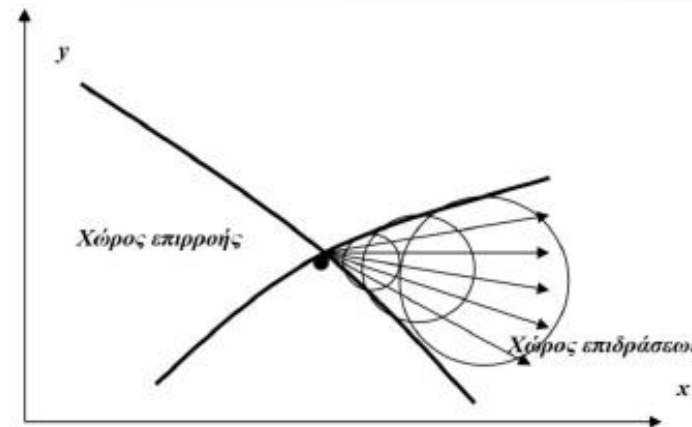
$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\text{lower order derivative terms}) = 0$$

όπου a η ταχύτητα μετάδοσης του κύματος, ενώ οι αρχικές συνθήκες είναι δυνατόν να έχουν τη μορφή

$$\Phi(x, 0) = f_1(x) \text{ και } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = f_2(x).$$

Άλλο παράδειγμα είναι η εξίσωση κύματος πρώτης τάξης, εξίσωση χρώματος ή εξίσωση του Burgers:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$



$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

2-D

Σχήμα 1.17 Χώρος επιρροής υπερβολικών εξισώσεων. Υπερηχητική ταχύτητα για αέρια ή υπερκρίσιμη ταχύτητα για ροή ελεύθερης επιφάνειας.

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Πρόβλημα αρχικών τιμών

Δοθέντων πραγματικών αριθμών x_0, y_0, \dots, y_{n-1} η εύρεση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης (στα προηγούμενα) που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

καλείται **πρόβλημα αρχικών τιμών ΠΑΤ** και οι παραπάνω σχέσεις καλούνται **αρχικές συνθήκες**.

Πρόβλημα οριακών τιμών

Name	Form on 1st part of boundary	Form on 2nd part of boundary
Dirichlet	$y = f$	
Neumann	$\frac{\partial y}{\partial n} = f$	
Robin	$c_0 y + c_1 \frac{\partial y}{\partial n} = f$	
Mixed	$y = f$	$c_0 y + c_1 \frac{\partial y}{\partial n} = f$
Cauchy	both $y = f$ and $c_0 \frac{\partial y}{\partial n} = g$	

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Πρόβλημα οριακών τιμών (συνθηκών)

Dirichlet

$$y = f$$

PDE [[edit](#)]

For a [partial differential equation](#), for example,

$$\nabla^2 y + y = 0,$$

where ∇^2 denotes the [Laplace operator](#), the Dirichlet boundary conditions on a domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ take the form

$$y(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

where f is a known [function](#) defined on the boundary $\partial\Omega$.

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Πρόβλημα οριακών τιμών (συνθηκών)

Neumann

$$\frac{\partial y}{\partial n} = f$$

PDE [edit]

For a partial differential equation, for instance,

$$\nabla^2 y + y = 0,$$

where ∇^2 denotes the [Laplace operator](#), the Neumann boundary conditions on a domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ take the form

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

where \mathbf{n} denotes the (typically exterior) [normal](#) to the [boundary](#) $\partial\Omega$, and f is a given scalar function.

The [normal derivative](#), which shows up on the left side, is defined as

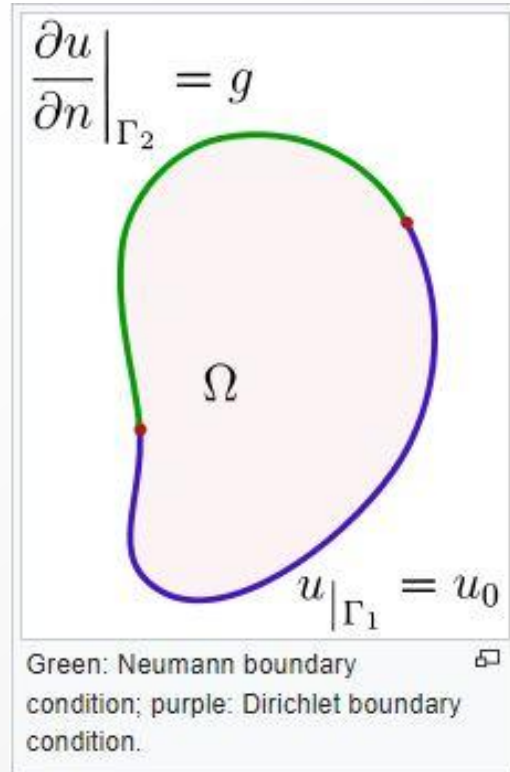
$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \nabla y(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}),$$

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Πρόβλημα οριακών τιμών (συνθηκών)

Ακριβώς, σε ένα πρόβλημα μικτής οριακής τιμής, η λύση απαιτείται για να ικανοποιήσει μια συνοριακή συνθήκη Dirichlet ή Neumann με αμοιβαία αποκλειστικό τρόπο σε ασύνδετα μέρη του ορίου.

Mixed	$y = f$	$c_0 y + c_1 \frac{\partial y}{\partial n} = f$
-------	---------	-------------------------------------------------



Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Πρόβλημα οριακών τιμών (συνθηκών)

Robin

$$c_0 y + c_1 \frac{\partial y}{\partial n} = f$$

Οι οριακές συνθήκες Robin είναι ένας σταθμισμένος συνδυασμός οριακών συνθηκών Dirichlet και οριακών συνθηκών Neumann. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις μικτές οριακές συνθήκες, οι οποίες είναι οριακές συνθήκες διαφορετικών τύπων που καθορίζονται σε διαφορετικά υποσύνολα του ορίου. Οι οριακές συνθήκες Robin ονομάζονται επίσης οριακές συνθήκες σύνθετης αντίστασης, από την εφαρμογή τους σε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα, ή συνοριακές συνθήκες συναγωγής, από την εφαρμογή τους σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας (Hahn, 2012).

Δ.4.1. Εισαγωγή στις ΔΕΜΠ/ΜΔΕ – PDEs

Πρόβλημα οριακών τιμών (συνθηκών)

Cauchy

$$\text{both } y = f \text{ and } c_0 \frac{\partial y}{\partial n} = g$$

Για μερικές διαφορικές εξισώσεις, οι οριακές συνθήκες Cauchy καθορίζουν τόσο τη συνάρτηση όσο και την εγκάρσια παράγωγο στο όριο. Για να κάνετε τα πράγματα απλά και συγκεκριμένα, σκεφτείτε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης στο επίπεδο: $\psi(x, y) = \alpha(x, y), \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \psi = \beta(x, y)$

$$A(x, y)\psi_{xx} + B(x, y)\psi_{xy} + C(x, y)\psi_{yy} = F(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y),$$

Παρατηρήστε τη διαφορά μεταξύ μιας οριακής συνθήκης Cauchy και μιας οριακής συνθήκης Robin. Στην πρώτη, καθορίζουμε και τη συνάρτηση και την εγκάρσια κλίση/παράγωγο. Στη δεύτερη, προσδιορίζουμε έναν σταθμισμένο μέσο όρο των δύο. Θα θέλαμε οι οριακές συνθήκες να διασφαλίζουν ότι υπάρχει ακριβώς μία (μοναδική) λύση, αλλά για μερικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης, δεν είναι τόσο απλό να διασφαλιστεί η ύπαρξη και η μοναδικότητα όσο για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Τα δεδομένα τύπου Cauchy είναι πιο σχετικά με προβλήματα υπερβολικών ΜΔΕ (π.χ. η εξίσωση κύματος) σε ανοιχτά πεδία (για παράδειγμα, επερχόμενοι κυματισμοί από την ανοιχτή θάλασσα).

Δ.4.2. Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

Επανάληψη εννοιών

Η αρχή των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών είναι η ίδια για τις ΜΔΕ όπως και για τις ΣΔΕ, ωστόσο οι ΜΔΕ είναι πιο πολύπλοκες στην επίλυση από τις ΣΔΕ, επειδή η άγνωστη συνάρτηση που πρέπει να προσδιοριστεί διαφοροποιείται τόσο ως προς το χρόνο όσο και ως προς το χώρο (σύνθετη συνάρτηση μικτών συντεταγμένων στο χώρο και το χρόνο). Τα όρια, και οι συνθήκες που πρέπει να πληρούν οι λύσεις στα όρια, έχουν σημαντική επίδραση στη λύση μιας ΜΔΕ. Η επιρροή των συνοριακών συνθηκών στη λύση των ΜΔΕ είναι πολύ σημαντική επειδή μια ΜΔΕ μπορεί να έχει λύσεις για ένα συγκεκριμένο σύνολο συνοριακών συνθηκών και μπορεί να είναι ανεπίλυτη για ένα άλλο σύνολο.

Λόγω της ιδιαίτερης σημασίας των υπερβολικών και παραβολικών εξισώσεων στη ρευστοδυναμική, δίνεται έμφαση σε αυτά τα δύο είδη εξισώσεων. Η αρχή της προσέγγισης ΜΠΔ–FDM αποδεικνύεται σε 1-D τύπους εξισώσεων, η οποία μπορεί να επεκταθεί και για 2-D και 3-D. Στην περίπτωση των ΜΔΕ, το 1-D αναφέρεται αυστηρά στη συνιστώσα του χώρου, η ανεξάρτητη μεταβλητή χρόνου είναι η δεύτερη ανεξάρτητη μεταβλητή ως προς την οποία ορίζεται η άγνωστη συνάρτηση.

Δ.4.2. Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

ΜΠΔ για ΜΔΕ πρώτης τάξης

Η λύση μιας ΜΔΕ δεν μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά, εάν η ΜΔΕ ορίζεται σε ένα πεπερασμένο πεδίο. Οι αριθμητικές μέθοδοι προσδιορίζουν μια λύση μιας ΜΔΕ αντικαθιστώντας τις συνεχείς παραγώγους άγνωστης συνάρτησης με διακριτές προσεγγίσεις της. Η λύση βρίσκεται σε έναν αριθμό σημείων πλέγματος διακριτοποίησης στο χώρο και στο χρόνο. Η αριθμητική λύση μιας συνάρτησης $u(x,t)$, που μεταβάλλεται στο μονοδιάστατο χώρο και στο χρόνο, προσδιορίζεται στα σημεία του πλέγματος $x_i=i\cdot\Delta x$ και χρονικά σημεία $t^n=n\cdot\Delta t$.

$$u_i^n = u(i\Delta x, n\Delta t) = u(x_i, t^n).$$

Οποιαδήποτε προσέγγιση που χρησιμοποιείται, προκειμένου να καθοριστεί μια λύση για τα μηχανικά προβλήματα θα πρέπει να είναι καλή, επομένως πρέπει να είναι συνεπής, σταθερή και συγκλίνουσα με την αναλυτική λύση.

Η αρχή των ΜΠΔ για τις ΜΔΕ επιδεικνύεται λαμβάνοντας υπόψη την απλή ΜΔΕ της εξίσωσης για βαθμωτή γραμμικής μεταγωγής (linear advection equation), η οποία είναι υπερβολικού τύπου:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

όπου a είναι η ταχύτητα μεταγωγής, υποτιθέμενη σταθερή και θετική. Οι κατάλληλες οριακές συνθήκες θεωρείται ότι καθορίζονται στο ανάντη όριο. Η άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ είναι μονοδιάστατη στο χώρο. Η εξίσωση είναι γραμμική επειδή αποτελείται από ένα άθροισμα χωριστών όρων που περιλαμβάνουν την μεταφερόμενη (μεταγωγική) ποσότητα, u .

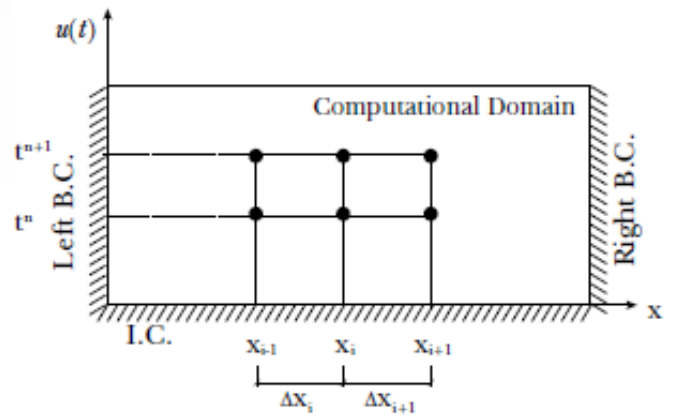
Δ.4.2. Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t^n}$$

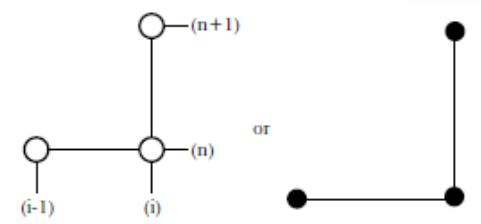
$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad u_i^{n+1} = Cr_i^n \cdot u_{i-1}^n + (1 - Cr_i^n) \cdot u_i^n$$

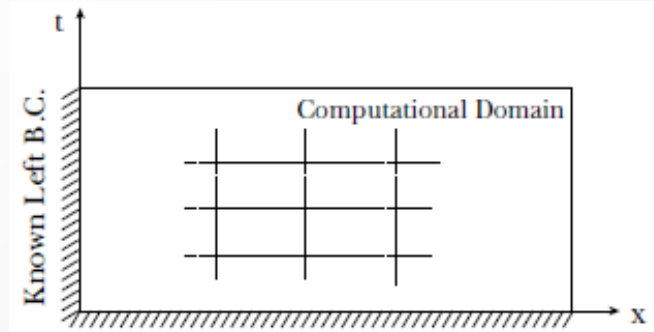
$$Cr_i^n = a \cdot \frac{\Delta t^n}{\Delta x_i}$$



B.C. - Boundary Conditions
 I.C. - Initial Conditions



Example of a stencil for a numerical scheme.



B.C. - Boundary Conditions
 I.C. - Initial Conditions

Δ.4.3. Χωρική Διακριτοποίηση

Κάνναβος και Πλέγμα

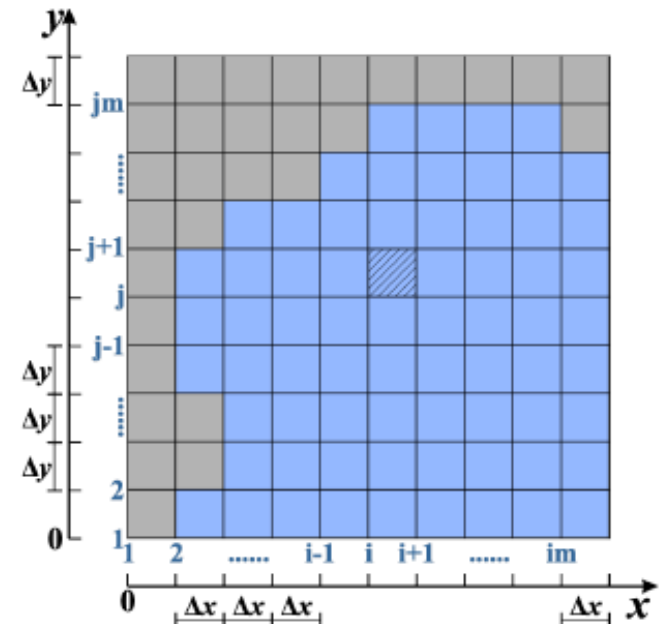
Διακριτοποίηση και αριθμητική επίλυση μαθηματικών/αριθμητικών μοντέλων

Στα αριθμητικά μοντέλα οι εξισώσεις που ισχύουν αναδιατυπώνονται κατά προσέγγιση, ήτοι οι διαφορικές εξισώσεις γράφονται ως εξισώσεις διαφοράς, μέσω κάποιας αριθμητικής μεθόδου.

Η περιοχή λύσεων διακριτοποιείται επίσης κατάλληλα σε 1D, 2D ή 3D κελιά και η λύση προσεγγίζεται στους (γωνιακούς/τεμνόμενους) κόμβους (nodes), στις πλευρές (faces/sides) ή στο εσωτερικό (interior/center) των κελιών.

Η διακριτοποίηση των συνεχών ανεξάρτητων μεταβλητών x , y , z και t σε μικρά βήματα Δx , Δy , Δz και Δt σε συνδυασμό με την προσέγγιση των εξισώσεων που διέπουν οδηγεί σε σφάλματα περικυκλής.

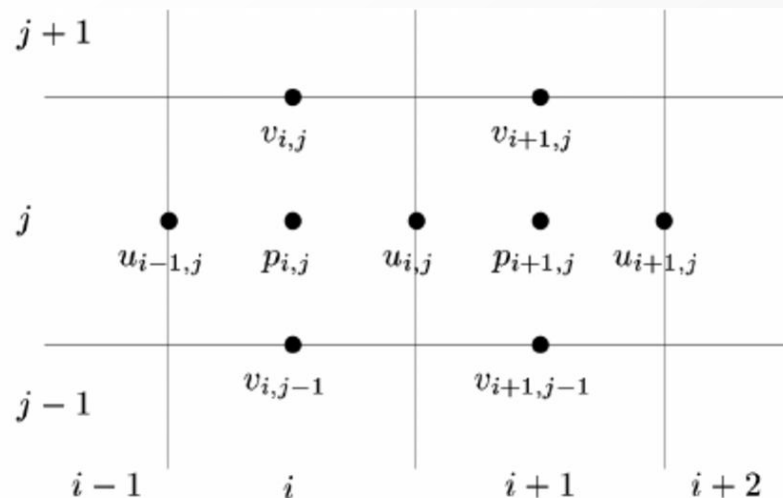
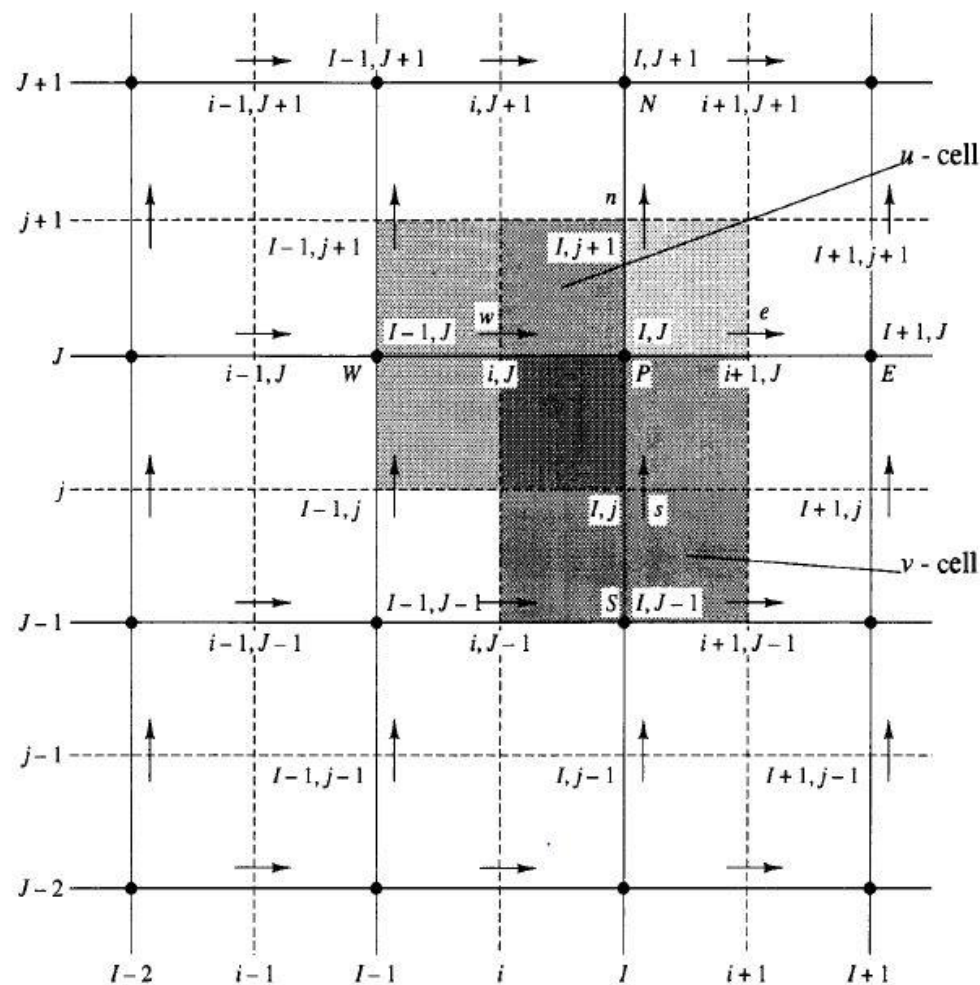
Θεωρητικά, το σφάλμα περικυκλής εξαλείφεται όταν τα Δx , Δy , Δz και $\Delta t \rightarrow 0$ (τείνουν στο μηδέν).



Δ.4.3. Χωρική Διακριτοποίηση

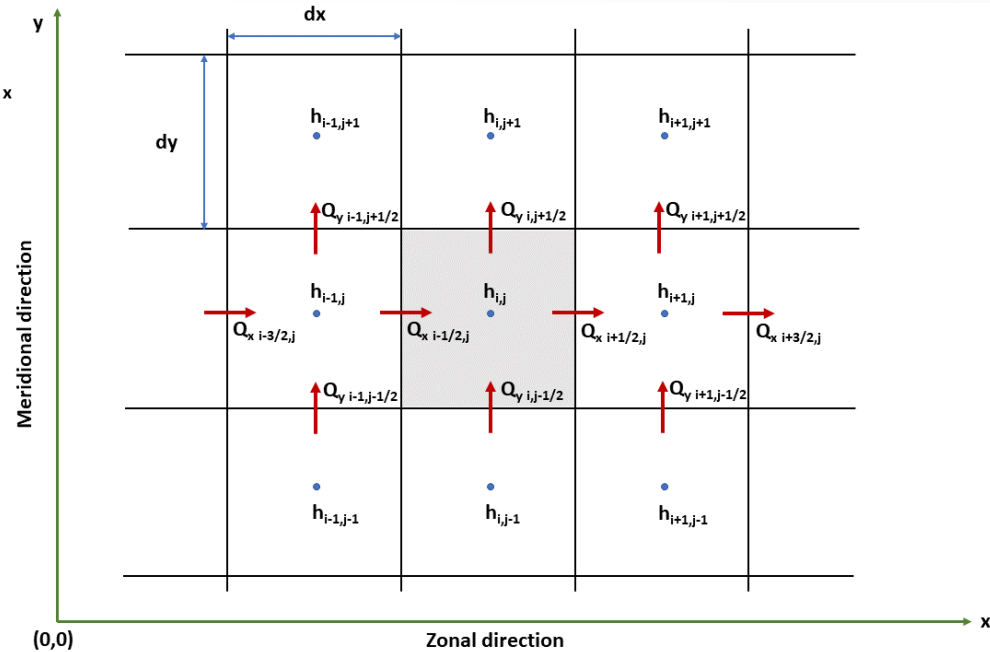
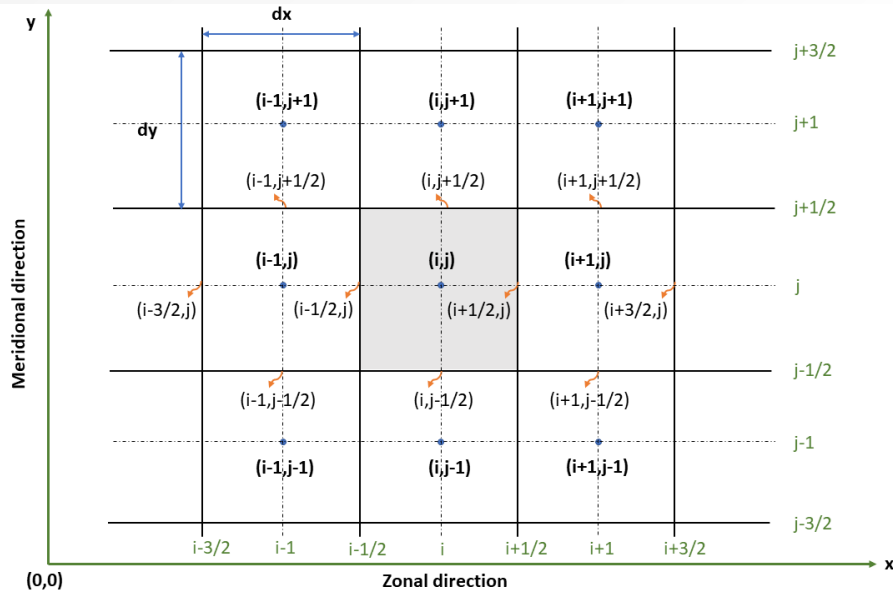
Διακριτοποίηση Υπολογιστικών πλεγμάτων και καννάβων

Σταυροειδές(ής) ή Έκκεντρο(ς) πλέγμα (κάνναβος)



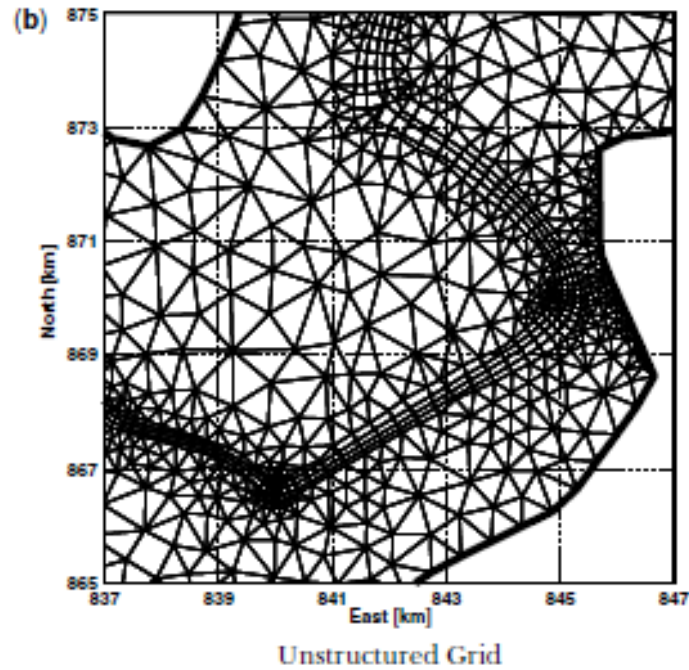
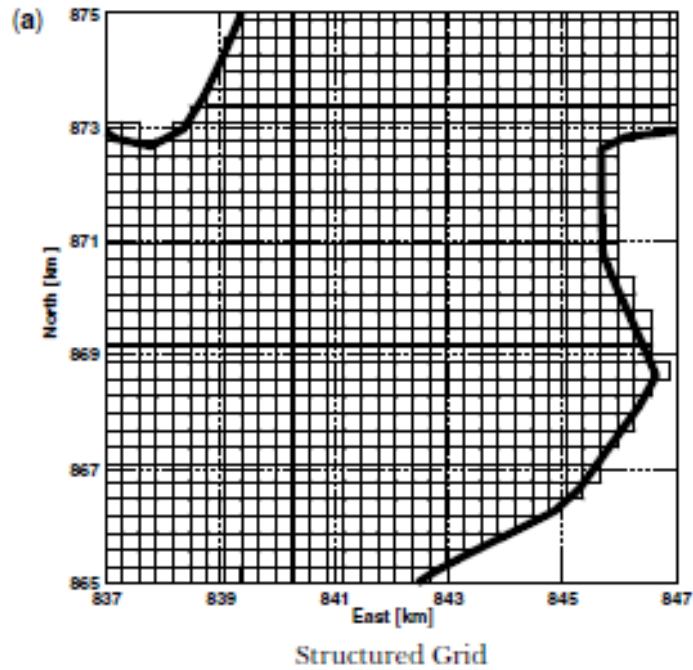
Δ.4.3. Χωρική Διακριτοποίηση

Διακριτοποίηση Υπολογιστικών πλεγμάτων και καννάβων
 Σταυροειδές(ής) ή Έκκεντρο(ς) πλέγμα (κάνναβος)



Δ.4.3. Χωρική Διακριτοποίηση

Δομημένα και Αδόμητα πλέγματα



Δ.4.4. Επίλυση ΜΔΕ στην Υδραυλική

Οι λύσεις των ΜΔΕ που θα δούμε περιορίζονται σε εφαρμογές που περιλαμβάνουν μία ή δύο χωρικές διαστάσεις (1-D ή 2-D).

Το πρώτο βήμα για την αριθμητική λύση είναι η διακριτοποίηση του χωροχρονικού πεδίου λύσης μέσω ενός ορθοκανονικού πλέγματος (καννάβου) με μεγέθη κελιών Δx - Δy και Δt . Στην περίπτωση ενός 2-D χώρου, οι υπολογιστικοί κάρναβοι που χρησιμοποιούνται, είναι τετράγωνα πλέγματα ($\Delta x = \Delta y$). Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η αριθμητική λύση ορίζεται ως ο αριθμητικός υπολογισμός των τιμών συνάρτησης $f(x,y,t)$ ενός φυσικού μεγέθους του προβλήματος σε ορισμένα προκαθορισμένα σημεία του πλέγματος διακριτοποίησης όπως οι κόμβοι (nodes), οι πλευρές (faces) ή τα κέντρα (centers) των κελιών (cells).

Αυτός ο υπολογισμός επιτυγχάνεται με τη διακριτοποίηση της διαφορικής εξίσωσης και την επίλυση της προκύπτουσας αλγεβρικής εξίσωσης (**ρητό σχήμα**) ή συστήματος εξισώσεων (**άρρητο/πεπλεγμένο σχήμα**) για τις άγνωστες τιμές της συνάρτησης στα σημεία του πλέγματος.

Δ.4.4. Επίλυση ΜΔΕ στην Υδραυλική

Οριακές και αρχικές συνθήκες: γνωστές οι τιμές της συνάρτησης $f(x,t)$ που αντιστοιχούν σε αυτές τις συνθήκες.

Για 1-D χρονικά εξαρτώμενη ροή, οι **οριακές συνθήκες (τύπου *Dirichlet*)** δίνονται ως γνωστές τιμές των $f(x=0,t)$ και $f(x=L,t)$ για όλους τους χρόνους t , όπου $x=0$ και $x=L$ είναι τα δύο άκρα του χωρικού υπολογιστικού πεδίου.

Οι **αρχικές συνθήκες** δίνονται ως γνωστές τιμές του $f(x,t=0)$ για οποιοδήποτε σημείο στον άξονα x .

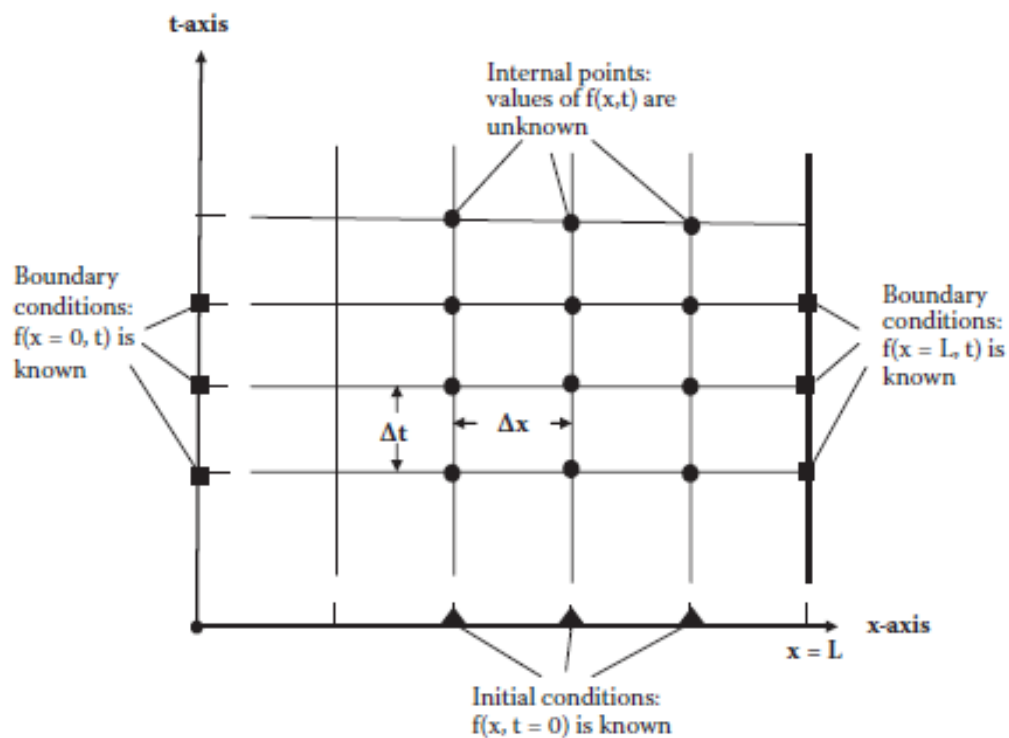


Figure 3.2 Discretization of the solution domain.

Δ.4.4. Επίλυση ΜΔΕ στην Υδραυλική

Κριτήριο ευστάθειας (Von Neumann stability)

Στην αριθμητική ανάλυση, η **ανάλυση ευστάθειας von Neumann** (γνωστή και ως **ανάλυση ευστάθειας Fourier**) είναι μια διαδικασία που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της ευστάθειας των σχημάτων πεπερασμένων διαφορών όπως εφαρμόζονται σε γραμμικές ΜΔΕ. Η ανάλυση βασίζεται στην **απόσβεση του αριθμητικού σφάλματος Fourier** και αναπτύχθηκε στο Εθνικό Εργαστήριο του Λος Άλαμος αφού είχε περιγραφεί εν συντομία σε ένα άρθρο του 1947 από τους Βρετανούς ερευνητές **Crank και Nicolson**.

Αυτή η μέθοδος είναι ένα παράδειγμα **ρητής χρονικής ολοκλήρωσης** όπου η συνάρτηση που ορίζει την εξίσωση που διέπει αξιολογείται την τρέχουσα στιγμή. Αργότερα, η μέθοδος έλαβε μια πιο αυστηρή αντιμετώπιση σε ένα άρθρο του von Neumann.

Η **ευστάθεια των αριθμητικών σχημάτων** συνδέεται στενά με το **αριθμητικό σφάλμα**. Ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών είναι **ευσταθές** εάν τα **σφάλματα που έγιναν σε ένα χρονικό βήμα του υπολογισμού δεν προκαλούν τη μεγέθυνση των σφαλμάτων καθώς συνεχίζονται οι υπολογισμοί**. Ένα **ουδέτερο σταθερό σχήμα** είναι αυτό στο οποίο τα σφάλματα παραμένουν σταθερά καθώς οι υπολογισμοί συνεχίζονται. Εάν τα **σφάλματα εξασθενήσουν και τελικά εξαφανιστούν**, το **αριθμητικό σχήμα λέγεται ότι είναι ευσταθές**. Αν, αντίθετα, τα **σφάλματα αυξάνονται με το χρόνο**, το **αριθμητικό σχήμα λέγεται ότι είναι ασταθές**.

Για προβλήματα που εξαρτώνται από το χρόνο, η ευστάθεια εγγυάται ότι η αριθμητική μέθοδος παράγει μια φραγμένη λύση (πεδίο τιμών λύσεων) όποτε η λύση της ακριβούς διαφορικής εξίσωσης είναι φραγμένη.

Δ.4.4. Επίλυση ΜΔΕ στην Υδραυλική

Κριτήριο ευστάθειας (Von Neumann stability)

Σε ορισμένες περιπτώσεις, η **ευστάθεια von Neumann** είναι απαραίτητη και επαρκής για την **ευστάθεια τύπου Lax–Richtmyer** (όπως χρησιμοποιείται στο θεώρημα της ισοδυναμίας Lax), όταν:

- Οι **ΜΔΕ** και τα μοντέλα πεπερασμένων διαφορών είναι γραμμικά.
- Η **ΜΔΕ** είναι σταθερού συντελεστή με περιοδικές οριακές συνθήκες και έχει μόνο δύο ανεξάρτητες μεταβλητές.
- Το σχήμα χρησιμοποιεί όχι περισσότερα από δύο χρονικά επίπεδα.

Η ευστάθεια Von Neumann είναι απαραίτητη σε μια πολύ μεγαλύτερη ποικιλία περιπτώσεων. Συχνά χρησιμοποιείται αντί για μια πιο λεπτομερή ανάλυση ευστάθειας για να παρέχει μια καλή εικασία για τους περιορισμούς (εάν υπάρχουν) στα μεγέθη βημάτων που χρησιμοποιούνται στο σχήμα λόγω της σχετικής απλότητάς του.

Η μέθοδος von Neumann βασίζεται στην απόσβεση των σφαλμάτων σε σειρές Fourier.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \longrightarrow u_j^{n+1} = u_j^n + r (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \longrightarrow r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

Η εξίσωση δίνει την **απαίτηση ευστάθειας** για το **σχήμα FTCS** όπως εφαρμόζεται στη μονοδιάστατη εξίσωση θερμότητας. Λέει ότι για ένα δεδομένο Δx η μειωμένη τιμή του Δt πρέπει να είναι αρκετά μικρή ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση. Παρόμοια ανάλυση δείχνει ότι ένα σχήμα FTCS για γραμμική κίνηση είναι άνευ όρων ασταθές.

Δ.4.4. Επίλυση ΜΔΕ στην Υδραυλική

Κριτήριο ακρίβειας (συνέπειας)

$\{S_k\}$ has order of accuracy p if

$$\|u(t+k) - S_k u(t)\| = O(k^{p+1}) \quad \text{as } k \rightarrow 0 \quad (4.2.4)$$

for any $t \in [0, T]$, where $u(t)$ is any sufficiently smooth solution to the initial-value problem (4.2.1). It is **consistent** if it has order of accuracy $p > 0$.

Formula	order of accuracy	CFL stability restriction	Exact stability restriction
(EU _x = Euler)	1	$\lambda \leq 1$	unstable
(BE _x = Backward Euler)	1	none	none
(CN _x = Crank-Nicolson)	2	none	none
LF = Leap frog	2	$\lambda \leq 1$	$\lambda < 1$
BOX _x = Box	2	none	none
LF4 = Fourth-order Leap frog	2	$\lambda \leq 2$	$\lambda < 0.728\dots^*$
LXF = Lax-Friedrichs	1	$\lambda \leq 1$	$\lambda \leq 1$
UW = Upwind	1	$\lambda \leq 1$	$\lambda \leq 1$
LW = Lax-Wendroff	2	$\lambda \leq 1$	$\lambda \leq 1$

Table 4.4.1. Orders of accuracy and stability limits for various finite difference approximations to the wave equation $u_t = u_x$, with $\lambda = k/h = \text{constant}$ (see Table 3.2.1).

Formula	order of accuracy	CFL stability restriction	Exact stability restriction
EU _{xx} = Euler	1†	none	$\sigma \leq \frac{1}{2}$
BE _{xx} = Backward Euler	1	none	none
CN = Crank-Nicolson	2	none	none
(LF _{xx} = Leap frog)	2	none	unstable
BOX _{xx} = Box	2	none	none
CN4 = Fourth-order CN	2	none	none
DF = DuFort-Frankel	2**	none	none**

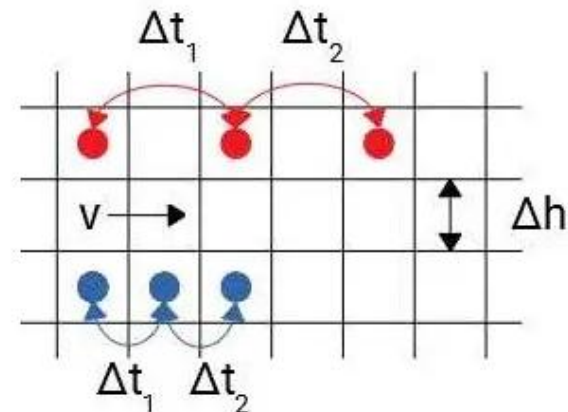
Table 4.4.2. Orders of accuracy and stability limits for various finite difference approximations to the heat equation $u_t = u_{xx}$, with $\sigma = k/h^2 = \text{constant}$ (see Table 3.2.2). (The orders of accuracy are with respect to h , not k as in (4.2.4).)

Δ.4.4. Επίλυση ΜΔΕ στην Υδραυλική

Κριτήριο σύγκλισης (Courant-Friedrichs-Lewy, CFL)

Στην αριθμητική ανάλυση, η συνθήκη σύγκλισης των **Courant–Friedrichs–Lewy CFL** είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τη σύγκλιση κατά την επίλυση ορισμένων ΜΔΕ (συνήθως υπερβολικών) αριθμητικά. Προκύπτει στην αριθμητική ανάλυση σχημάτων ρητής ολοκλήρωσης χρόνου. Κατά συνέπεια, **το χρονικό βήμα πρέπει να είναι μικρότερο από έναν ορισμένο χρόνο σε πολλές προσομοιώσεις υπολογιστών με ρητό σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης**, διαφορετικά η προσομοίωση παράγει εσφαλμένα αποτελέσματα.

Η αρχή πίσω από την συνθήκη είναι ότι, για παράδειγμα, εάν $CFL > 1$ πλέγμα και θέλουμε να υπολογίσουμε το πλάτος του σε διακριτή διάρκεια πρέπει να είναι μικρότερη από τον χρόνο που αι παρακείμενων κελιών/σημείων του πλέγματος. $CFL < 1$



Ως συνέπεια, όταν ο διαχωρισμός των σημείων πλέγματος μειώνεται, μειώνεται και το ανώτατο όριο για το χρονικό βήμα. Στην ουσία, το αριθμητικό πεδίο εξάρτησης οποιουδήποτε σημείου στο χώρο και το χρόνο (όπως καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες και τις παραμέτρους του σχήματος προσέγγισης) πρέπει να περιλαμβάνει το αναλυτικό πεδίο εξάρτησης (όπου οι αρχικές συνθήκες επηρεάζουν την ακριβή τιμή του λύση σε εκείνο το σημείο) για να διασφαλιστεί ότι το σύστημα μπορεί να έχει πρόσβαση στις πληροφορίες που απαιτούνται για τη διαμόρφωση της λύσης.

$$C = \frac{u \Delta t}{\Delta x} \leq C_{\max}$$

$$C = \frac{u_x \Delta t}{\Delta x} + \frac{u_y \Delta t}{\Delta y} \leq C_{\max}$$

Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές διαφορές

Εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Η διακριτοποίηση της Εξίσωσης επιτυγχάνεται με προσέγγιση των παραγώγων από κεντρικές πεπερασμένες διαφορές. Το πεδίο λύσεων διακριτοποιείται με ένα κάνναβο μεγεθών κελιού Δx , Δy (συνήθως $\Delta x = \Delta y$) και η λύση υπολογίζεται στους κόμβους του πλέγματος, που προσδιορίζονται από τους ακέραιους δείκτες i, j , όπου $f_{i,j} = f(x_i, y_j) = f((i-1)\Delta x, (j-1)\Delta y)$, βλ. Εικόνα. Στην περίπτωση κοινού βήματος χωρικής διακριτοποίησης ($\Delta x = \Delta y$), η προσέγγιση των παραγώγων με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης οδηγεί στην αλγεβρική προσέγγιση της διαφορικής εξίσωσης

$$f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j} = 0$$

$$f_{i,j} = \frac{1}{4} (f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1})$$

Το σχήμα της αριθμητικής λύσης είναι άρρητο, και απαιτεί τη σύνθεση και την αριθμητική λύση ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων, που αναφέρονται σε όλες τις θέσεις (i, j) μέσα στο πεδίο λύσεων. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του προκύπτοντος συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων είναι η αραιότητα του πίνακα σταθερών συντελεστών.

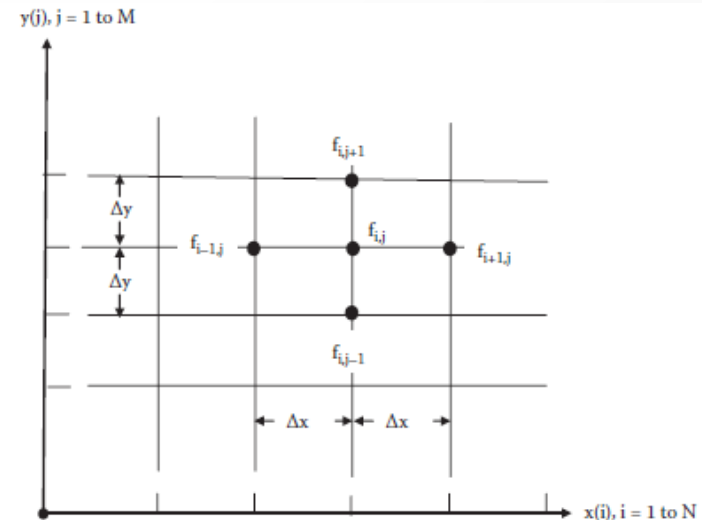


Figure 3.3 Identification of discretized function values.

Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

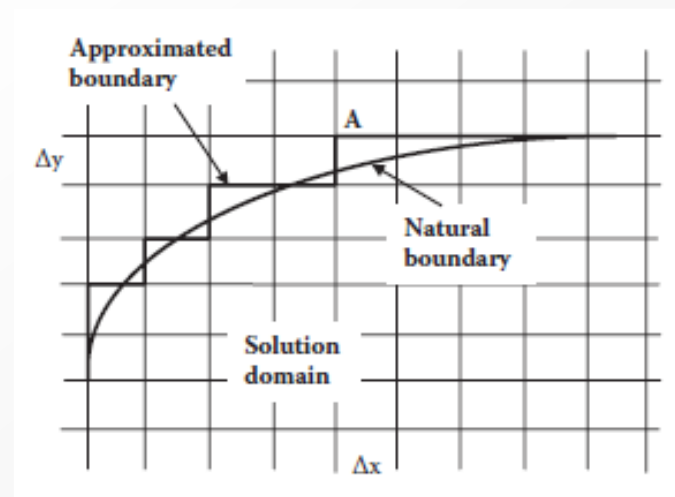
Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel

για λύση γραμμικού αλγεβρικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$\max |f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k| < \epsilon \text{ for all } i,j$$

$$f_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} (f_{i,j+1}^{k+1} + f_{i-1,j}^k + f_{i+1,j}^{k+1} + f_{i,j-1}^k)$$

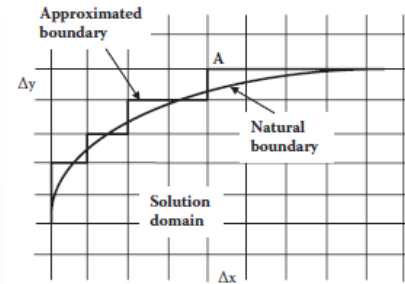
Από την εξίσωση είναι προφανές ότι για τον υπολογισμό του $f_{i,j}^{k+1}$ το πεδίο της λύσης σαρώνεται από τις μικρότερες προς τις μεγαλύτερες τιμές i,j χρησιμοποιώντας τις πιο πρόσφατα διορθωμένες τιμές της συνάρτησης $f(x,y)$. Αυτή είναι μια εύκολα προγραμματιζόμενη διαδικασία που χαρακτηρίζεται από σύγκλιση στη σωστή τιμή του f , χωρίς να υπολογίζονται τα αριθμητικά σφάλματα, αλλά με άγνωστο αριθμό επαναλήψεων. Η σύγκλιση εξασφαλίζεται όταν ο διαγώνιος συντελεστής είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το άθροισμα των υπολοίπων συντελεστών κατά μήκος μιας γραμμής του πίνακα συντελεστών. Στην υπό εξέταση περίπτωση ο συντελεστής 4 είναι ίσος με το άθροισμα $1+1+1+1$.



Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

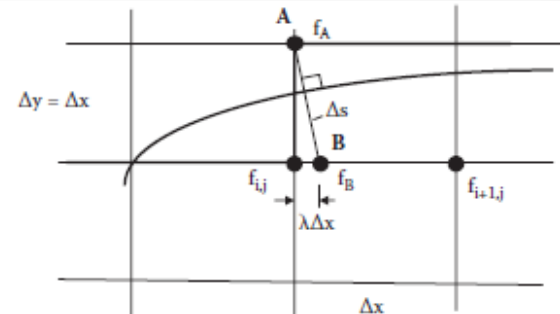
Προσέγγιση Οριακών Συνθηκών

Η κύρια πρόκληση στην αριθμητική λύση των ελλειπτικών εξισώσεων είναι η προσέγγιση των οριακών συνθηκών που περιλαμβάνουν σημεία λύσης πάνω ή κοντά στα όρια. Η υπολογιστική ταχύτητα των σύγχρονων υπολογιστών επιτρέπει τη διακριτοποίηση της περιοχής λύσης χρησιμοποιώντας ένα μικρό βήμα διακριτοποίησης, επομένως η προσέγγιση των ορίων της σύνθετης γεωμετρίας δεν παρουσιάζει πρόβλημα.



Δίνεται τιμή της συνάρτησης $f(x,y)$ στο όριο ή προσδιορίζεται η εγκάρσια της παράγωγος df/dn . Κάτω από ορισμένες φυσικές συνθήκες, προκύπτει μια κατάσταση όπου για μέρος των οριακών τιμών δίνονται οι τιμές του $f(x,y)$, ενώ για το υπόλοιπο όριο καθορίζεται η κάθετη παράγωγος. Στην περίπτωση μιας δεδομένης εγκάρσιας παραγώγου df/dn και σύμφωνα με το Σχήμα, η μαθηματική σχέση προσεγγίζεται:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{f_A - f_B}{\Delta s} = \frac{f_A - f_B}{\Delta x \sqrt{1 + \lambda^2}} \quad f_B = \lambda f_{i,j} + (1 - \lambda) f_{i+1,j}$$



Approximation of von Neumann boundary conditions.

Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Παράδειγμα (2-D ροή σε αγωγό με ελεύθερη έξοδο)

Ένα υγρό εισέρχεται σε έναν 2-D ορθογώνιο αγωγό και εξέρχεται από ένα άνοιγμα στο ανάντη (αριστερή πλευρά) άκρο. Η τιμή του δυναμικού ταχύτητας (f) δίνεται στα ανάντη και κατόντη όρια (τύπος Dirichlet), ενώ για τα όρια του τοίχου εφαρμόζεται συνθήκη μηδενικής ροής εγκάρσια (τύπος Von Neumann) (βλ. Εικόνα). Λαμβάνοντας υπόψη μια πηγή (SS) που βρίσκεται στο κέντρο του αγωγού, ο σκοπός αυτής της άσκησης είναι να υπολογίσει την κατανομή του δυναμικού ταχύτητας σε όλο το πεδίο της λύσης:

Δυναμικό στο άνω άκρο = 10

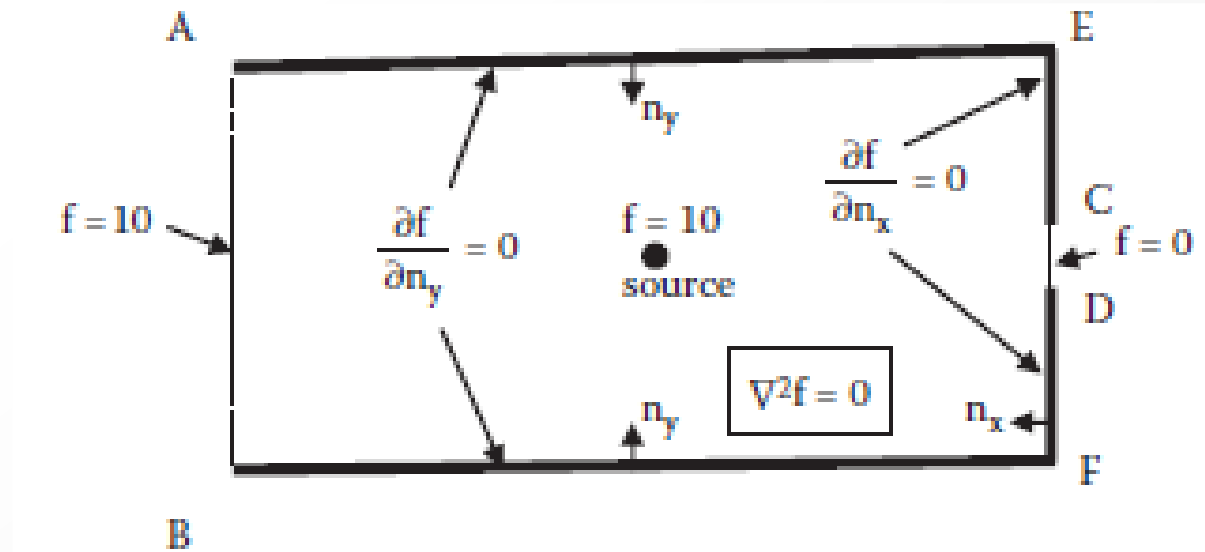
Δυναμικό στο άνοιγμα κατόντη = 0

Δυναμικό στην πηγή = 10

Άνοιγμα ανάντη = 30 m

Άνοιγμα κατόντη = 5 m (το άνοιγμα είναι κεντραρισμένο)

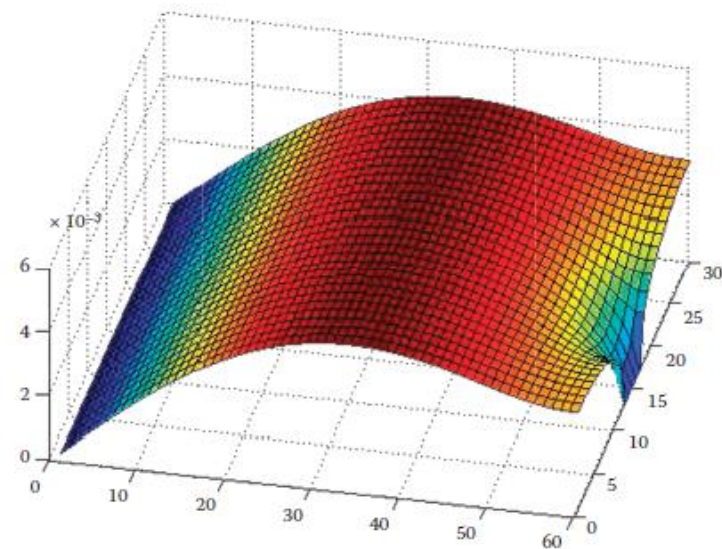
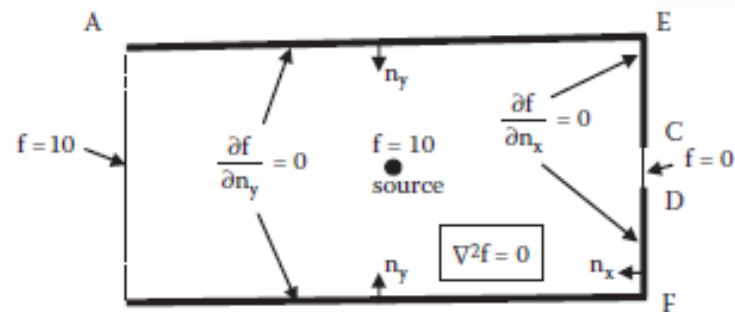
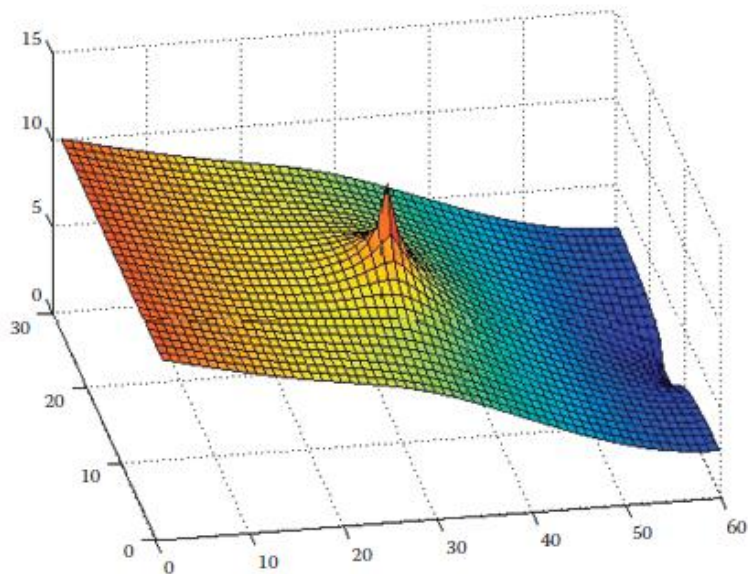
Μήκος αγωγού = 60 m



Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Παράδειγμα (2-D ροή σε αγωγό με ελεύθερη έξοδο)

Το φυσικό φαινόμενο διέπεται από την εξίσωση Laplace. Έτσι ο αριθμητικός αλγόριθμος που χρησιμοποιείται είναι αυτός των προηγούμενων. Το υπολογιστικό πλέγμα ορίζεται ως 30×60 και ο αριθμός των επαναλήψεων ορίζεται ίσος με 1000. Η κατανομή του δυναμικού ταχύτητας μαζί με τις επιδράσεις του δυναμικού της πηγής και των οριακών συνθηκών απεικονίζονται στο Σχήμα. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα της προσομοίωσης είναι πώς το υπολογιστικό σφάλμα αυξάνεται με την αύξηση της απόστασης από τις οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet.



Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Παράδειγμα (2-D ροή σε αγωγό με ελεύθερη έξοδο)

Κώδικας

Computer code 3.1

1

```
% Example 3.1 Two-Dimensional Potential Flow in a
Rectangular Conduit
% f(i,j) = Velocity potential;
% SS = Potential source;
% im = Number of vertical nodes;
% jm = Number of horizontal nodes;
% iter = Number of iterations;
% fer = Difference in potential values between two
subsequent iterations;
clc; clear all; close all;
% Input data;
```

3

```
f(k1,k2)=(f(k1+1,k2)+f(k1-1,k2)+f(k1,k2-
1)+f(k1,k2+1)+S(k1,k2))/4;
end
```

```
end
% Von Neumann boundary conditions at the upper and
lower conduit walls;
for j1=1:jm
    f(1,j1)=f(2,j1);
    f(im,j1)=f(im-1,j1);
end
% Von Neumann boundary conditions at the end wall of
the conduit;
for j2=1:(is-3)
    f(j2,jm)=f(j2,jm-1);
end
for j2=is+3 : im
    f(j2,jm)=f(j2,jm-1);
end
% Estimation of the error between two consecutive
iterations;
fnew=f;
fer=fnew-fold;
```

2

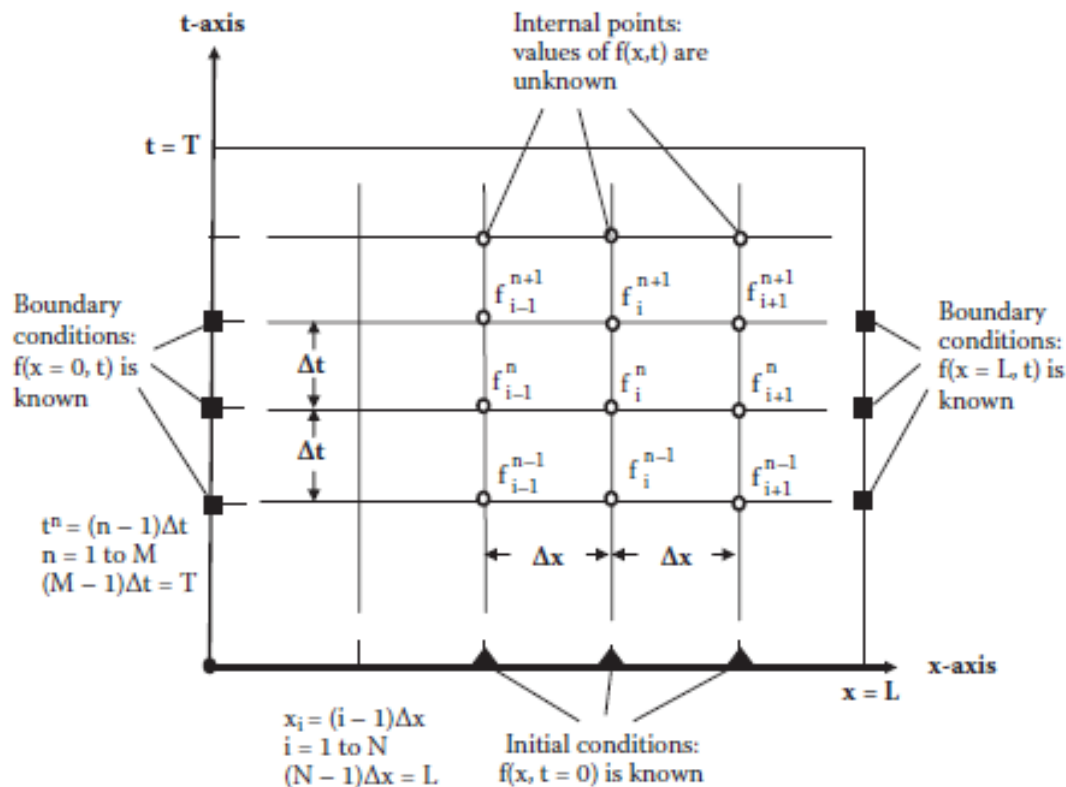
```
im=30;
jm=60;
SS=10;
iter=1000;
% Initialization of the grid with zero potential values;
f(1:im,1:jm)=0;
is=im/2;
js=jm/2;
% Dirichlet type boundary conditions at the entrance and
exit of the conduit;
f(1:im,1)=10;
f(is-1:is+1,jm)=0;
k1=0;
k2=0;
% Spatial allocation of the potential source;
S(im,jm)=0;
S(15,30)=SS;
% Main program;
k=0;
for kk=1:iter
    k=1+kk;
    fold=f;
    % Estimation of the potential values;
    for k1=2:im-1
        for k2=2:jm-1
```

```
end
i=1:k1+1;
j=1:k2+1;
fpp=fnew(i,j);
error=fer(i,j);
% Plot of the potential distribution;
surf(j,i,fpp);
figure
% Plot of the computational error distribution;
surf(j,i,error);
```

Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Παραβολικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές διαφορές

Σε αντίθεση με τις ελλειπτικές ΜΔΕ που περιγράφουν συνθήκες ισορροπίας, οι παραβολικές είναι εξαρτώμενες από το χρόνο, επομένως για την 1-D περίπτωση το πεδίο της λύσης είναι το επίπεδο $x-t$. Θεωρώντας ένα πεδίο λύσης που οριοθετείται από τις ανισότητες ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$), όπου L είναι το συνολικό μήκος και T ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος, η διακριτοποίηση ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα $\Delta x-\Delta t$ (Εικόνα). Με την προϋπόθεση ότι δίνονται οι αρχικές και οριακές συνθήκες, οι άγνωστες τιμές του $f(x,t)$ μπορούν να υπολογιστούν για τους εσωτερικούς κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος. Οι τιμές του $f(x,t)$ στα υπολογιστικά σημεία συμβολίζονται με τους δύο ακέραιους δείκτες.



Ο κατώτερος δείκτης i αναφέρεται στη θέση στον άξονα x ($f_i=f(x_i)$, όπου $x_i=(i-1)\Delta x$) και ο ανώτερος δείκτης n αναφέρεται στη θέση στον άξονα t ($f^n=f(t^n)$, όπου $t^n=(n-1)\Delta t$).

Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Σχήμα με Εμπρόσθιες στο χρόνο – Κεντρικές στο χώρο διαφορές (Forward in time, central in space, FTCS)

Ο δείκτης i κυμαίνεται από 1 έως N , $(N - 1)\Delta x=L$ και ο δείκτης n από 1 έως M , $(M-1)\Delta t=T$

Εμπρόσθιο σχήμα ΠΔ 1^{ης} τάξης για τη χρονική παράγωγο

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_i^n = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + \text{Truncation error } O(\Delta t)$$

και κεντρικό σχήμα ΠΔ 2^{ης} τάξης για τη χωρική Παράγωγο

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_i^n = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + \text{Truncation error } O(\Delta x^2)$$

Αυτός ο αριθμητικός αλγόριθμος είναι ρητός και είναι γνωστός ως σχήμα FTCS.

Σημειώστε ότι στην παρακάτω εξίσωση N είναι ο συντελεστής διάχυσης, διαφορετικός από το ανώτερο όριο N του δείκτη n . Το σχήμα FTCS είναι συνεπές και συγκλίνον, αλλά η θεωρητική ανάλυση και οι πρακτικές εφαρμογές δείχνουν ότι για να εξασφαλιστεί μια σταθερή αριθμητική λύση (χωρίς ανεξέλεγκτη αύξηση των αριθμητικών σφαλμάτων που οδηγεί σε τερματισμό των υπολογισμών), πρέπει να ικανοποιηθεί η ακόλουθη ανισότητα:

$$N \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}$$

Δεδομένης της τιμής του συντελεστή διάχυσης N και του βήματος διακριτοποίησης χώρου Δx , το χρονικό βήμα Δt πρέπει να επιλεγεί σύμφωνα με την ανισότητα, διαφορετικά οι αριθμητικοί υπολογισμοί θα έκαναν overflow.

$$f_i^{n+1} = f_i^n + N \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n)$$

Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Αριθμητικό σχήμα Crank-Nicolson

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_i^n = \frac{(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n) + (f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1})}{2(\Delta x)^2}$$

$$-Rf_{i+1}^{n+1} + (1 + 2R)f_i^{n+1} - Rf_{i-1}^{n+1} = Rf_{i+1}^n + (1 - 2R)f_i^n + Rf_{i-1}^n$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \longrightarrow \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} = \frac{\nu}{\delta y^2} \left[\theta (u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) + (1-\theta)(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \right] \quad R = \frac{N\Delta t}{2(\Delta x)^2} \quad (3.10)$$

όπου ο συντελεστής θ παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1 . Η ανωτέρω εξίσωση είναι η γενική περίπτωση. Ειδικά στην περίπτωση κατά την οποία $\theta=0$, η ανωτέρω εξίσωση δίνει τη ρητή μέθοδο, ενώ στην περίπτωση κατά την οποία $\theta=1$, δίνει την πλήρως πεπλεγμένη μέθοδο. Η αριθμητική προσέγγιση θα συγκλίνει κάτω από οποιεσδήποτε συνθήκες, εφόσον $1/2 < \theta < 1$. Στην περίπτωση όπου $\theta < 1/2$, για να υπάρξει ευστάθεια, πρέπει:

$$\frac{\nu \delta t}{\delta y^2} < \frac{1}{2(1-2\theta)}$$

Αριθμητικό σχήμα DuFort-Frankel (3 επιπέδων)

$$u_i^{n+1} = \left(\frac{2r}{1+2r} \right) (u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) + \left(\frac{1-2r}{1+2r} \right) u_i^{n-1}$$

$$u_i^{n+1} = \left(\frac{1+2\gamma}{1+\gamma} \right) u_i^n - \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right) u_i^{n-1} + \left(\frac{r}{1+r} \right) L_{xx}((1-\beta)u_i^n + \beta u_i^{n-1})$$

with coefficients $\gamma \beta L_{xx}$ given by:

$$\beta = -0.5 - \gamma - \frac{1}{12r}$$

$$L_{xx} \cdot u_i^n = u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n$$

Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Υπερβολικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές διαφορές

Η γραμμική υπερβολική εξίσωση 2^{ης} τάξης περιγράφει φυσικά τη διάδοση ενός κύματος ή κάποιου άλλου περιοδικού σήματος. Το σήμα εισάγεται τη χρονική στιγμή $t=0$, κινούμενο κατά και τις δύο κατευθύνσεις (θετική και αρνητική) του άξονα x (στην περίπτωση του μονοδιάστατου χώρου) με ταχύτητα (συχνότητα κύματος) ίση με c_0 . Η αριθμητική λύση βασίζεται στην προσέγγιση των πεπερασμένων διαφορών των δεύτερων παραγώγων (τόσο χωρικών όσο και χρονικών) με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές ακρίβειας 2^{ης} τάξης $O(\Delta x^2)$, $O(\Delta t)^2$. Χρησιμοποιώντας τα ίδια σύμβολα σχετικά με τις τιμές f στο πεδίο της διακριτοποιημένης λύσης (Εικόνα), η ΜΔΕ προσεγγίζεται σε ένα σημείο (i,n) , δηλαδή σε ένα σημείο με συντεταγμένες x_i , t^n , ως εξής:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{(f_i^{n+1} - 2f_i^n + f_i^{n-1}))}{(\Delta t)^2} = c_0^2 \frac{(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2}$$

$$f_i^{n+1} = 2f_i^n - f_i^{n-1} + c_0^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n)$$

Το αριθμητικό σχήμα γνωστό ως Leap-Frog

άλμα-βάτραχου, επιλύεται χρησιμοποιώντας έναν

αλγόριθμο παρόμοιο με αυτόν που χρησιμοποιείται

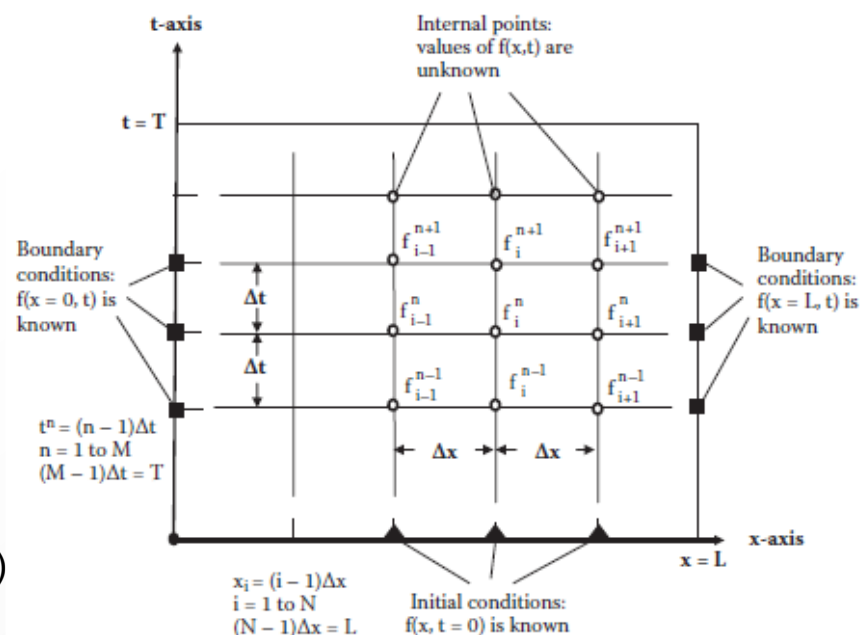
για FTCS της παραβολικής εξίσωσης. Ο αλγόριθμος

ξεκινά από δύο αρχικά χρονικά επίπεδα, με γνωστές

τιμές της συνάρτησης $f(x,t)$ (αρχικές συνθήκες δύο επιπέδων)

Ο υπολογισμός προχωρά από το ένα χρονικό επίπεδο

στο επόμενο, ρητά, καθώς οι όροι μπορούν να αναδιαταχθούν αφήνοντας LHS μόνο άγνωστο όρο f_i^{n+1}



Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Εξίσωση διάδοσης κύματος

Η εξίσωση είναι άμεσα εφαρμόσιμη για **χρονικά επίπεδα $n > 2$** σε όλα τα εσωτερικά σημεία πεδίου, καθώς οι τιμές τελικού σημείου των $f(x_i, t^n)$, (για $i=1$ και $i=N$) είναι οι γνωστές οριακές συνθήκες. Εφόσον η αριθμητική λύση είναι σαφής, για να αποφευχθεί η αριθμητική αστάθεια η τιμή για το χρονικό βήμα Δt περιορίζεται σύμφωνα με τις δεδομένες τιμές των Δx και c_0 . Έτσι, το κριτήριο σταθερότητας CFL που πρέπει να ικανοποιηθεί:

$$c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Μια καλύτερη εικόνα της αριθμητικής λύσης των υπερβολικών εξισώσεων και των συνοδευτικών αριθμητικών σφαλμάτων μπορεί να επιτευχθεί με την αριθμητική λύση $c_0 = \frac{dx}{dt}$ βολικής εξίσωσης 1ης τάξης που είναι γνωστή ως εξίσωση επαγωγικής μεταφοράς:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_0 \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Είναι προφανές ότι η λύση της Εξίσωσης του c_0 είναι μια οικογένεια ευθειών $x = x_0 + c_0 t$, με κλίση c_0 και τιμή x σε $t=0$ ίση με $x=x_0$. Ο συνδυασμός των εξισώσεων δίδει:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{Df}{Dt} = 0$$

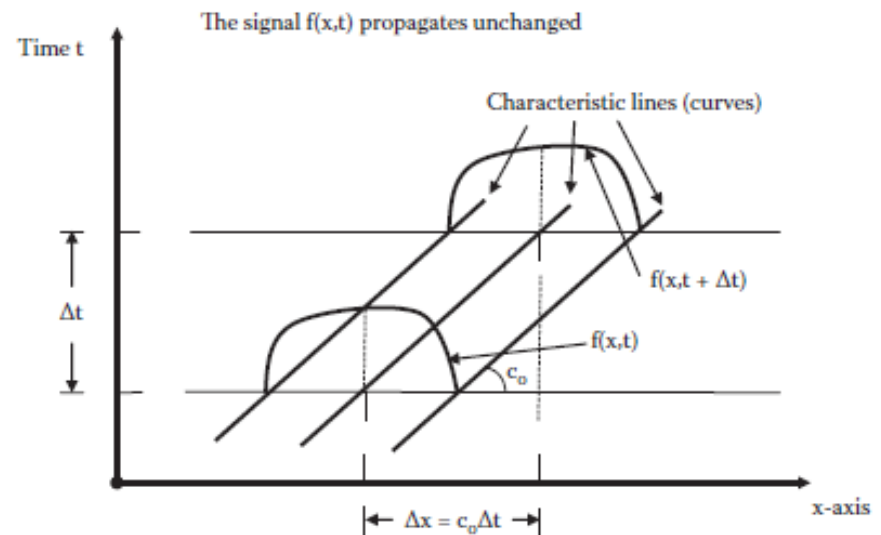
όπου D/Dt είναι το υλικό διαφορικό ή η ολική παράγωγος του $f(x,t)$. Αυτή η μορφή υποδηλώνει ότι η $f(x,t)$ είναι σταθερή κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης $c_0 = dx/dt$.

Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Όπως φαίνεται στο σχήμα, η λύση αποτελείται από μια απλή μετάφραση της αρχικής μορφής του f (αρχική συνθήκη $f(x,t=0)$) κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x με ταχύτητα ίση με c_0 .

Έτσι, από φυσική άποψη, η εξίσωση περιγράφει τη διάδοση με την ταχύτητα c_0 ενός παλμού – σήματος (κύματος) μόνο στη θετική κατεύθυνση του άξονα x , καθώς και την εξάρτηση της συνάρτησης $f(x,t)$ από τις τιμές της ίδιας συνάρτησης στα προηγούμενα χωροχρονικά βήματα.

Έχοντας τις λεπτομέρειες της αναλυτικής λύσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και να αναλυθούν κριτικά διαφορετικά σχήματα αριθμητικής λύσης.



Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Ασταθές σχήμα Euler

Όταν η παράγωγος χρόνου προσεγγίζεται με μια εμπρόσθια ΠΔ και η παράγωγος του χώρου με μια κεντρική ΠΔ (FTCS), η αλγεβρική προσέγγιση της υπερβολικής εξίσωσης 1^{ης} τάξης στο σημείο (i,n) είναι γνωστή ως το σχήμα του Euler:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + c_o \frac{(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)}{2\Delta x} = 0$$

Αναδιάταξη για το άγνωστο f_i^{n+1} , η ρητή λύση διαβάζεται:

$$f_i^{n+1} = f_i^n - c_o \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)$$

Το αριθμητικό σχήμα που προκύπτει είναι συνεπές, αλλά η λύση, για οποιονδήποτε συνδυασμό τιμών Δx και Δt , είναι ασταθής. Η αστάθεια είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι αν και η αναλυτική λύση εξαρτάται μόνο από τις προηγούμενες τιμές στο χώρο και στο χρόνο της συνάρτησης $f(x,t)$, το παραπάνω σχήμα περιλαμβάνει μια προηγούμενη τιμή στο χώρο που είναι f_{i+1}^n .

Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Αριθμητικό σχήμα τύπου Godunov

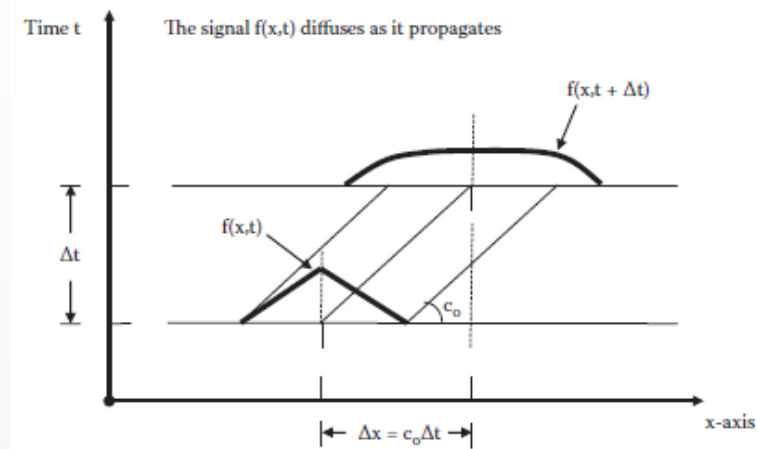
Χρησιμοποιώντας τις εμπρόσθιες διαφορές για την παράγωγο χρόνου και τις προς τα πίσω διαφορές για την παράγωγο χώρου (προς τα εμπρός στο χρόνο, πίσω χώρο FTBS), το αριθμητικό σχήμα που είναι γνωστό ως το σχήμα Godunov (upwind) γράφεται ως:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + c_o \frac{(f_i^n - f_{i-1}^n)}{\Delta x} = 0 \quad \longrightarrow \quad f_i^{n+1} = f_i^n - c_o \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_i^n - f_{i-1}^n)$$

Η εξίσωση παράγει μια αριθμητική λύση όπου η αρχική μορφή του $f(x,t)$ μεταφέρεται/μετάγεται με ταχύτητα c_o , αλλά οι τιμές του $f(x,t)$ υφίστανται έναν ορισμένο βαθμό διάχυσης (μείωση του μεγέθους με ταυτόχρονη εξάπλωση στο χώρο), σαν να ελέγχονταν από μια παραβολική εξίσωση.

Έτσι η λύση παρουσιάζει μια συμπεριφορά διάχυσης, όπως φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα. Ωστόσο, η αλγεβρική προσέγγιση της εξίσωσης μπορεί να ξαναγραφεί, μετά από πρόσθεση και αφαίρεση πανομοιότυπων όρων ως:

$$f_i^{n+1} = f_i^n - c_o \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \left(c_o \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n)$$



Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Αριθμητικό σχήμα τύπου Godunov

Αυτή είναι μια αλγεβρική προσέγγιση ΠΔ μιας εξίσωσης μικτού τύπου (άρρητη/πεπλεγμένη μορφή), που περιέχει τόσο τους όρους της υπερβολικής 1^{ης} τάξης όσο και των παραβολικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης. Τόσο το υπερβολικό όσο και το παραβολικό μέρος προσεγγίζονται με τις εμπρόσθιες στο χρόνο και τις κεντρικές στο χώρο ΠΔ (FTBS).

Ο συντελεστής τεχνητής διάχυσης του παραβολικού μέρους της εξίσωσης είναι ίσος με $c_0 \frac{\Delta x}{2}$

Έτσι, όταν χρησιμοποιούμε εμπρόσθιες διαφορές χρόνου και οπίσθιες διαφορές χώρου, αντί να λύνουμε την υπερβολική εξίσωση, λύνουμε στην πραγματικότητα μια διαφορετική εξίσωση και αυτό το γεγονός εισάγει ένα αριθμητικό σφάλμα γνωστό ως αριθμητική διάχυση.

Η άρρητη και απαραίτητη εισαγωγή, μέσω του επιλεγμένου συνεπούς σχήματος ΠΔ, ενός όρου διάχυσης μπορεί να καταστείλει την αναμενόμενη αριθμητική αστάθεια, αλλά το φαινόμενο είναι τόσο κυρίαρχο που προκαλεί διάχυση των τιμών $f(x,t)$ μη συμβατή με την αναλυτική λύση της υπερβολικής εξίσωσης.

Συγκεκριμένα, αυτό το σχήμα αριθμητικής λύσης, αν και ανακριβές, είναι σταθερό και ικανό. Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι το αριθμητικό σχήμα υπόκειται στο κριτήριο σταθερότητας Courant CFL. Όταν ο όρος λάβει την οριακή του τιμή (CFL=1), τότε η αριθμητική λύση είναι σταθερή και συμπίπτει με την αναλυτική λύση (η αριθμητική διάχυση εξαφανίζεται).

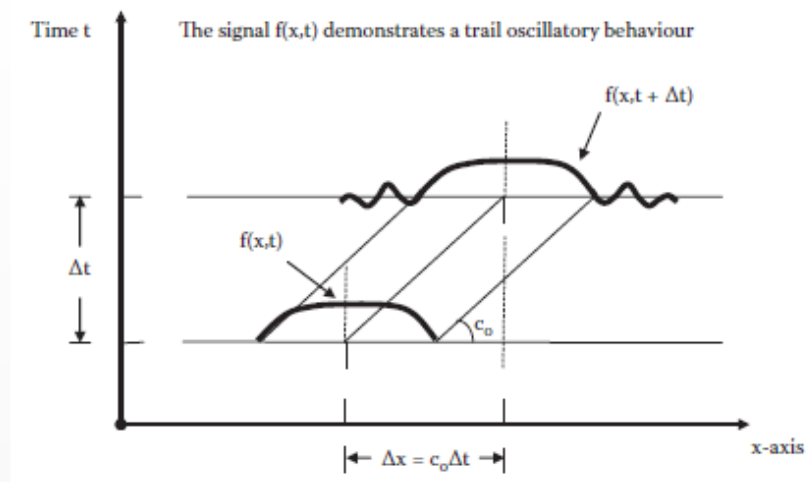
Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Αριθμητικό σχήμα τύπου Lax

Για να αποφευχθεί η αστάθεια που προκαλείται από τη 2^{ης} τάξης κεντρική ΠΔ της χωρικής παραγώγου, ένας αριθμός αριθμητικών σχημάτων εισήγαγε μια τεχνητή ελεγχόμενη αριθμητική διάχυση. Μία από αυτές τις μεθόδους είναι το σχήμα Lax, το οποίο είναι γραμμένο με την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = -c_0 \frac{(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta t} \right) \quad \longrightarrow \quad f_i^{n+1} = \frac{1}{2} (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n) - c_0 \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n)$$

Η εξίσωση εισάγει έναν όρο **τεχνητής διάχυσης**, ο οποίος σε συνδυασμό με την κεντρική ΠΔ για την παράγωγο χώρου παράγει μια σταθερή αριθμητική λύση εφόσον ικανοποιείται το κριτήριο ευστάθειας CFL. Η εφαρμογή του σχήματος Lax έχει ως αποτέλεσμα τη διάδοση ενός σήματος με τη σωστή ταχύτητα αλλά με το σχηματισμό δευτερευουσών ταλαντώσεων (υστέρησης) που ακολουθούν το κύριο σήμα (Εικόνα). Αυτός ο τύπος αριθμητικού σφάλματος είναι γνωστός ως αριθμητική διασπορά και το όνομα προέρχεται από το γεγονός ότι υπάρχει διαφορετικός ρυθμός διάδοσης σημάτων με διαφορετικές συχνότητες.

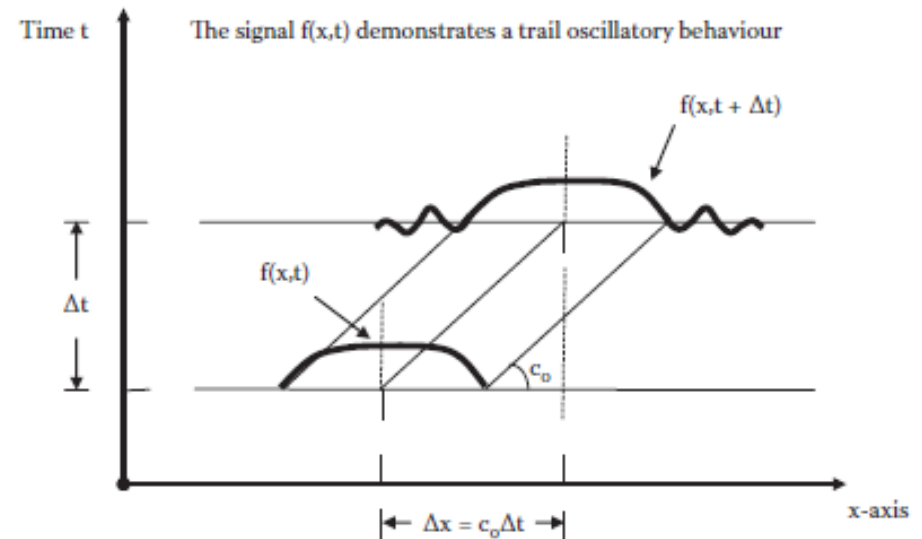


Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Αριθμητικό σχήμα τύπου Lax

Αυτό μπορεί να επαληθευτεί χρησιμοποιώντας ένα σύνθετο σήμα που μπορεί να αναλυθεί σε έναν αριθμό από στοιχεία Fourier (ημιτονοειδή). Έτσι η διασπορά θα έδειχνε μέσω της διαφοροποίησης της ταχύτητας διάδοσης των διαφόρων συνιστωσών διαφορετικές συχνότητες. Τα στοιχεία υψηλότερης συχνότητας (μικρά μήκη κύματος) θα διαδίδονταν σε χαμηλότερες ταχύτητες, σχηματίζοντας ένα ίχνος υψηλής συχνότητας.

Δεδομένου ότι το σήμα με την υψηλότερη περιγραφόμενη συχνότητα είναι το κύμα με μήκος $2\Delta x$, το ίχνος έχει τη μορφή ψευδών ταλαντώσεων αυτού του μικρότερου μήκους κύματος που ακολουθούν το κύριο σήμα.



Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Αριθμητικό σχήμα τύπου Fromm

Μια άλλη κλασική μέθοδος είναι το σχήμα Fromm, το οποίο περιλαμβάνει αριθμητική διασπορά αλλά ελαχιστοποιεί την αριθμητική διάχυση. Αυτό είναι ένα ρητό σχήμα που χρησιμοποιείται συχνά στο παρελθόν για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν τη ρευστοδυναμική σε βιομηχανικού τύπου ροές. Το σχήμα του Fromm είναι ένα σχήμα πέντε σημείων γραμμένο ως:

$$f_i^{*n+1} = f_i^n - c_o \frac{\Delta t}{4\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n + f_i^n - f_{i-2}^n)$$

$$f_i^{n+1} = f_i^{*n+1} - \left(c_o \frac{\Delta t}{2\Delta x} \right)^2 (f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n) \\ + \left(c_o \frac{\Delta t}{2\Delta x} \right) \left[\left(c_o \frac{\Delta t}{2\Delta x} \right) - 1 \right] (f_i^n - 2f_{i-1}^n + f_{i-2}^n)$$

Δ.4.5. Τεχνικές αριθμητικής επίλυσης

Αριθμητικό σχήμα Μείωσης Συνολικής Διακύμανσης (ΜΣΔ) – Total Variation Diminishing (TVD)

Εκτός από τα προαναφερθέντα αριθμητικά σχήματα, υπάρχει μια ποικιλία άλλων σχημάτων ανώτερης τάξης. Ένα τέτοιο σχήμα, το οποίο εφαρμόζεται στην αριθμητική λύση της υπερβολικής εξίσωσης 1^{ης} τάξης, είναι το σχήμα TVD:

$$f_i^{n+1} = f_i^n - c_o \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_i^n - f_{i-1}^n) - \left(K_{i+\frac{1}{2}} - K_{i-\frac{1}{2}} \right)$$

where the parameters involved are defined as

$$K_{i+\frac{1}{2}} = c_o \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(1 - c_o \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (f_{i+1}^n - f_i^n) \varphi(R_i)$$

$$K_{i-\frac{1}{2}} = c_o \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(1 - c_o \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (f_i^n - f_{i-1}^n) \varphi(R_i)$$

$$R_i = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{f_{i+1}^n - f_i^n}$$

while $\varphi(R_i) = \min(2R_i, 2)$ for $R_i > 0$ and $\varphi(R_i) = 0$ for $R_i < 0$. It should be noted that if the parameters K are set equal to zero, then the TVD scheme coincides with the Godunov scheme.

Δ.4.6. Βιβλιογραφία

Κουτίτας ΧΓ (2005). Υπολογιστική Υδραυλική, Εκδ. Επίκεντρο, Σελ.: 199, ISBN:9789606645501

Κεφάλαιο 3

Koutitas C.G., Scarlatos P.D. (2016). Computational Modelling in Hydraulic and Coastal Engineering. CRC Press, Taylor & Francis Group. Κεφάλαιο 3

Σούλης, Ι. (2015). Υπολογιστικές τεχνικές υδραυλικής μηχανικής. Kallipos, Open Academic Editions. <http://hdl.handle.net/11419/3997> Κεφάλαια 2, 3, 4

Κρεστενίτης Γ.Ν., Κομπιάδου Κ.Δ., Μακρής Χ.Β., Ανδρουλιδάκης Γ.Σ., Καραμπάς Θ.Β. (2015). Παράκτια Μηχανική – Θαλάσσια Περιβαλλοντική Υδραυλική, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα, Κάλλιπος, Αθήνα. Link: <https://repository.kallipos.gr/handle/11419/2789?locale=en>

Κεφάλαιο 8 (Κάνναβοι – Αριθμητικά Σχήματα)