



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Τμήμα  
Πολιτικών Μηχανικών



# Υπολογιστική Μηχανική Ρευστών

## Θεωρία και Εφαρμογές για Πολιτικούς Μηχανικούς

Εξάμηνο: **9<sup>ο</sup>**

Κωδικός: **TMB329**

Μάθημα: **Επιλογής ΤΥΕ**

### Διάλεξη **Δ.5. Μοντέλα 1-D Ροών με Ελεύθερη Επιφάνεια**

Διδάσκων υπεύθυνος μαθήματος:

**Χρήστος Β. Μακρής**

Πανεπιστημιακός Υπότροφος ΑΠΘ 2023 (Πρόγραμμα: ΕΔΒΜ191)

Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ

ΜΔΕ Τεχνολογία Υδατικών Πόρων ΕΜΠ

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ

Ειδίκευση: Υδραυλική & Περιβαλλοντική Τεχνική

Ειδίκευση: Διαχείριση Παράκτιας Ζώνης

Ειδίκευση: Υπολογιστική Ρευστοδυναμική - Κυματομηχανική

Αίθουσα Η/Υ - Ισόγειο Κτιρίου Α' Πολ. Μηχ. ΔΠΘ - Ξάνθη, 29 Νοεμβρίου 2024

## Δ.5. Διάρθρωση Παρουσίασης (α)

### 1. Εφαρμογές σε ροές (ανοιχτών αγωγών) με ελεύθερη επιφάνεια

- Ροή σε ποτάμια συστήματα
- Εξισώσεις Saint-Venant
- Μετάδοση πλημμυρικού κύματος

### 2. Ημι-οριζόντιες ροές με ελεύθερη επιφάνεια

### 3. Μονοδιάστατη ροή ανοιχτού αγωγού (καναλιού)

### 4. Σταδιακά μεταβαλλόμενη μη ομοιόμορφη ροή

- Μέθοδος Newton-Raphson
- Προφίλ επιφάνειας νερού

### 5. Μη μόνιμη ροή ανοιχτού αγωγού

- Βασικές εξισώσεις
- Αλγόριθμος αριθμητικής λύσης

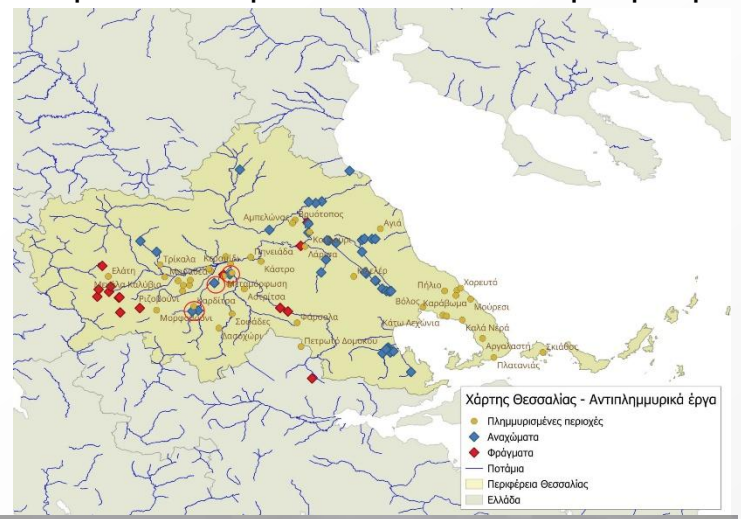
# Δ.5.1. Ροές (ανοιχτών αγωγών) με Ε.Ε.

## Μοντελοποίηση Συστημάτων Ποταμού

Η Υπολογιστική Υδραυλική είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για τους μελετητές μηχανικούς επειδή επιτρέπει την πρόβλεψη της ροής σε ποτάμια κάτω από συγκεκριμένες οριακές και αρχικές συνθήκες χωρίς να γίνονται μετρήσεις στο πεδίο.

Η εφαρμογή της Υπολογιστικής Υδραυλικής σε ζητήματα που σχετίζονται με τα ποτάμια καλύπτει ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων όπως:

ο μετριασμός των επιπτώσεων των πλημμυρών



## Δ.5.1. Ροές (ανοιχτών αγωγών) με Ε.Ε.

### Μοντελοποίηση Συστημάτων Ποταμού

Η Υπολογιστική Υδραυλική είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για τους μελετητές μηχανικούς επειδή επιτρέπει την πρόβλεψη της ροής σε ποτάμια κάτω από συγκεκριμένες οριακές και αρχικές συνθήκες χωρίς να γίνονται μετρήσεις στο πεδίο.

Η εφαρμογή της Υπολογιστικής Υδραυλικής σε ζητήματα που σχετίζονται με τα ποτάμια καλύπτει ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων όπως:

η αποκατάσταση των ποταμών (ποιότητα και ποσότητα νερού)



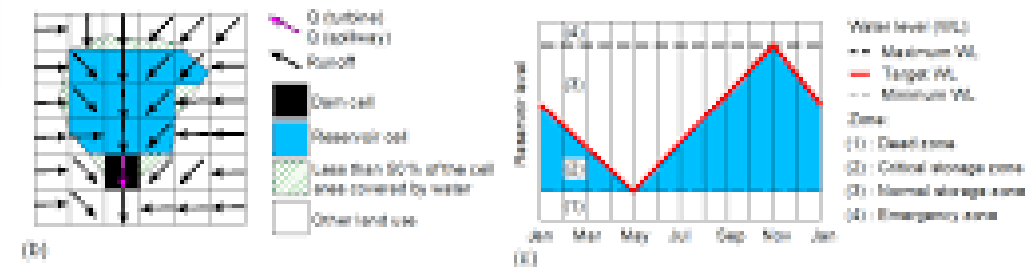
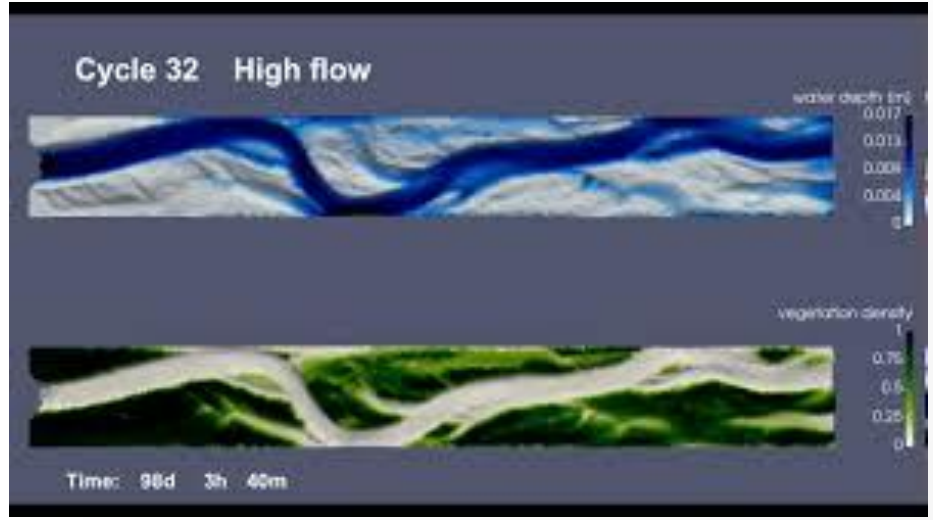
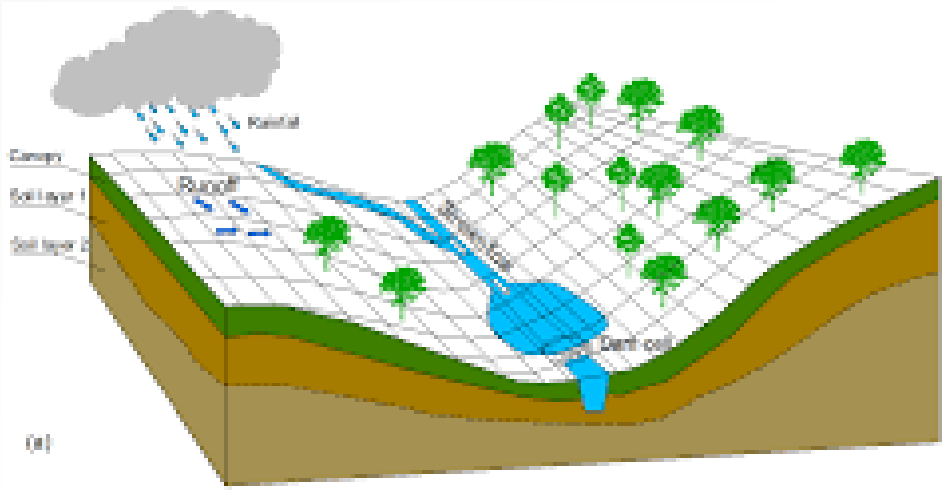
# Δ.5.1. Ροές (ανοιχτών αγωγών) με Ε.Ε.

## Μοντελοποίηση Συστημάτων Ποταμού

Η Υπολογιστική Υδραυλική είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για τους μελετητές μηχανικούς επειδή επιτρέπει την πρόβλεψη της ροής σε ποτάμια κάτω από συγκεκριμένες οριακές και αρχικές συνθήκες χωρίς να γίνονται μετρήσεις στο πεδίο.

Η εφαρμογή της Υπολογιστικής Υδραυλικής σε ζητήματα που σχετίζονται με τα ποτάμια καλύπτει ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων όπως:

οι μορφοδυναμικές προβλέψεις

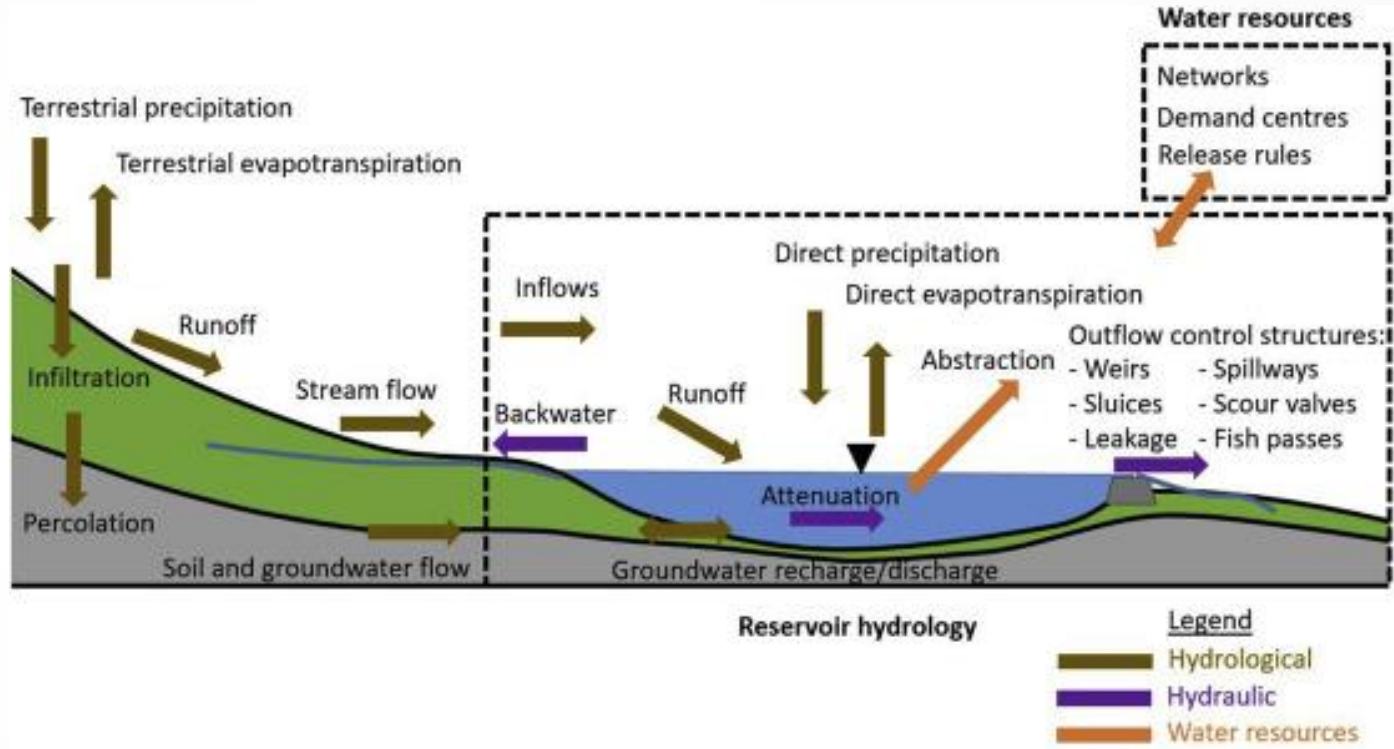


# Δ.5.1. Ροές (ανοιχτών αγωγών) με Ε.Ε.

## Μοντελοποίηση Συστημάτων Ποταμού

Η Υπολογιστική Υδραυλική είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για τους μελετητές μηχανικούς επειδή επιτρέπει την πρόβλεψη της ροής σε ποτάμια κάτω από συγκεκριμένες οριακές και αρχικές συνθήκες χωρίς να γίνονται μετρήσεις στο πεδίο.

Η εφαρμογή της Υπολογιστικής Υδραυλικής σε ζητήματα που σχετίζονται με τα ποτάμια καλύπτει ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων όπως:  
η λειτουργία ταμιευτήρων



## Δ.5.1. Ροές (ανοιχτών αγωγών) με Ε.Ε.

### Μοντελοποίηση Συστημάτων Ποταμού

Η Υπολογιστική Υδραυλική είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για τους μελετητές μηχανικούς επειδή επιτρέπει την πρόβλεψη της ροής σε ποτάμια κάτω από συγκεκριμένες οριακές και αρχικές συνθήκες χωρίς να γίνονται μετρήσεις στο πεδίο.

Τα ποτάμια έχουν ακανόνιστες τοπογραφίες, οι οποίες οδηγούν σε μικτές περιοχές ροών. Αυτό θέτει προκλήσεις στις αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων ροής, επειδή πρέπει να λύσουμε αυτά τα προβλήματα κάτω από ένα ευρύ φάσμα οριακών και αρχικών συνθηκών.

Επιπλέον, η ροή γύρω και μέσα και πάνω από κατασκευές (φράγματα, θυροφράγματα, αναβαθμούς κ.λπ.) πρέπει επίσης να αντιμετωπιστεί.

Όλες οι αριθμητικές προσεγγίσεις υπόκεινται σε περιορισμούς ευστάθειας της επίλυσης της ροής, οι οποίοι περιορίζουν την επιλογή του χωρικού και χρονικού βήματος ολοκλήρωσης και μπορούν να παρατείνουν τον υπολογιστικό χρόνο και το κόστος.

## Δ.5.1. Ροές (ανοιχτών αγωγών) με Ε.Ε.

### Μοντελοποίηση Συστημάτων Ποταμού

Υπάρχει ένας αριθμός αριθμητικών προσεγγίσεων για την επίλυση των εξισώσεων ροής. Αντίστοιχα με τις προσεγγίσεις που σας παρουσιάστηκαν, υπάρχει ένας αριθμός μαθηματικών μοντέλων για την επίλυση της ροής σε ποτάμια. Αυτές κυμαίνονται από **1D Saint-Venant** έως **2D εξισώσεις αβαθών νερών** και **3D εξισώσεις Navier-Stokes**.

Όλες οι εξισώσεις βασίζονται στις ίδιες φυσικές αρχές και η επιλογή ενός μοντέλου για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα εξαρτάται από το πραγματικό πρόβλημα που εξετάζεται και τις απαιτήσεις για τη λύση. Εδώ δείχνουμε την προσέγγιση αριθμητικής λύσης για τις **1-D εξισώσεις Saint-Venant**, οι οποίες είναι απλές σε σύγκριση με τις σύνθετες εξισώσεις Navier-Stokes, ωστόσο είναι σε θέση να προβλέψουν αρκετές χρήσιμες πληροφορίες για τις βασικές διεργασίες της μηχανικής ποταμών.

Μέχρι πρόσφατα, η μη συντηρητική μορφή των εξισώσεων ρηχών υδάτων χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των προτύπων ροής, ωστόσο αυτό δεν είναι χρήσιμο για προβλήματα που περιλαμβάνουν **ταχέως μεταβαλλόμενη μη μόνιμη ροή**, κατά την οποία παρατηρούνται **απότομα μέτωπα** και **γρήγορες αλλαγές στην ταχύτητα**.

Όλες οι επιλύσεις γίνονται σε **ορθογώνια πλέγματα** (ιστορικά δημοφιλής επιλογή) και αποτελούν τη βάση για μια σειρά ευρέως χρησιμοποιούμενων αλγορίθμων (Sturm, 2001).



# Δ.5.1. Ροές (ανοιχτών αγωγών) με Ε.Ε.

## Μαθηματικό ομοίωμα εξισώσεων Saint-Venant (1-D)

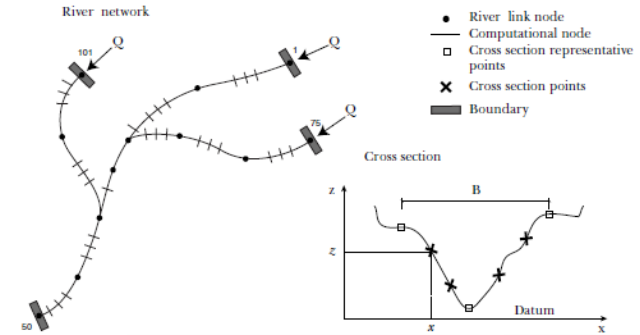
Για κανάλια με ακανόνιστες τοπογραφίες, η ροή μπορεί να περιγραφεί με τις εξισώσεις Saint-Venant για τη μονοδιάστατη ροή:

– continuity equation (CE):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial t} = q \quad \text{or} \quad \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{q}{b}$$

– momentum equation (ME):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} - gAS_o + gA \frac{|Q|Q}{K^2} = 0$$



όπου  $Q$  είναι η παροχή ροής ( $m^3/s$ ),  $b$  το πλάτος αποθήκευσης στο επίπεδο της επιφάνειας του νερού ( $m$ ),  $h$  είναι το βάθος νερού ( $m$ ),  $A$  το εμβαδόν διατομής ( $m^2$ ),  $q$  είναι η πλευρική/εγκάρσια παροχή ( $m^3/s$ ),  $K$  είναι όρος μεταφοράς ( $m^3/s$ ),  $\beta$  ο συντελεστής Boussinesq (αδιάστατος),  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας ( $m/s^2$ ), και  $S_o$  η κλίση του πυθμένα του καναλιού ( $-$ ).

Το σύστημα εξισώσεων που σχηματίζεται έχει αναλυτική λύση μόνο για πολύ λίγες συγκεκριμένες περιπτώσεις. Συνήθως χρησιμοποιούμε αριθμητική προσέγγιση. Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων, ωστόσο δύο από αυτές, βασισμένες στη FDM, είναι οι πιο χρησιμοποιούμενες στην πράξη και περιγράφονται λεπτομερέστερα, το σχήμα Preissmann τεσσάρων σημείων και το σχήμα Abbott Ionescu έξι σημείων. Οι υπολογιστικοί κόμβοι συνήθως δεν αντιστοιχούν στις μετρούμενες διατομές και χρησιμοποιείται παρεμβολή για τον προσδιορισμό των τιμών του παραμέτρους σε υπολογιστικούς κόμβους.

## Δ.5.1. Ροές (ανοιχτών αγωγών) με Ε.Ε.

### Μετάδοση πλημμυρικού κύματος

Special insights in flood propagation in river channels are gained by using Price's (1985) analysis of the Saint-Venant equations (7.1), which can be rearranged in the form:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{b} \left[ \frac{1}{K} \frac{dK}{dh} - \frac{1}{2b} \frac{db}{dh} \right] \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) - \frac{K^2}{2bQ} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (7.23)$$

Equation (7.23) is obtained by neglecting the inertial terms (the local acceleration and convection of momentum), and has the form of an advection-diffusion equation with advection and diffusion terms:

$$c(Q, h) = \frac{Q}{b} \left[ \frac{1}{k} \frac{dK}{dK} - \frac{1}{2b} \frac{db}{dh} \right] \quad (7.24a)$$

and

$$D(Q, h) = \frac{K^2}{2bQ} \quad (7.24b)$$

Coefficients given by relations (7.24) show that when a flow disturbance occurs on a river channel, a process of translation/advection takes place along with a corresponding diffusion. The phenomenon is known as attenuation of peak flow. The speed of the wave traveling downstream is given by the advection speed (7.24a). Note that equation (7.23) has  $Q$  as the primary dependent variable within the differentials, however because  $Q$  is dependent on  $h$  (or  $A$ ), a continuity equation is required in order to solve it.

## Δ.5.1. Ροές (ανοιχτών αγωγών) με Ε.Ε.

Μετάδοση πλημμυρικού κύματος

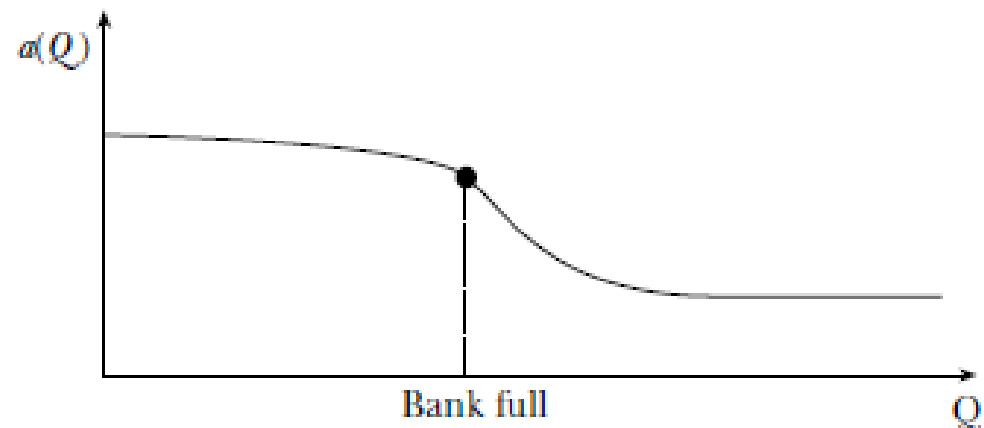
$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c_0 \frac{\partial Q}{\partial x} + \varepsilon c_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a_0}{c_0^2} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = c_0 q - \varepsilon \gamma c_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Qq}{2qAs_0} \right) + O(\varepsilon^2)$$

where

$$\varepsilon = \frac{\bar{h}}{s_0}$$

$$\gamma = \frac{\bar{Q}^2}{g\bar{A}^2\bar{y}}$$

$$a_0 = \frac{Q}{2s_0B} \left[ 1 - \frac{\gamma B}{gA} \left( c_0 - \frac{Q}{A} \right)^2 \right]$$



## Δ.5.2. Ημι-οριζόντιες ροές με Ε.Ε.

### Βασικές παραδοχές

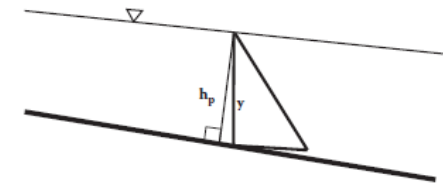
Οι ροές με ελεύθερη επιφάνεια είναι ροές που οδηγούνται από τη βαρύτητα και λαμβάνουν σε συστήματα ανοιχτών υδάτων όπως κανάλια, ποτάμια, λίμνες και ωκεανοί. Για την πλειονότητα των πρακτικών εφαρμογών, η μελέτη των ροών ελεύθερης επιφάνειας μπορεί να απλοποιηθεί υποθέτοντας ότι:

### η καμπυλότητα των γραμμών ροής είναι μικρή

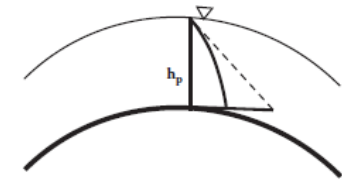
οδηγώντας σε αμελητέες κατακόρυφες ταχύτητες και επιταχύνσεις, και κατά συνέπεια σε κατανομή υδροστατικής πίεσης (Εικόνα).

Η υπόθεση αυτού του τύπου «οιονεί οριζόντιων» ροών διευκολύνει τη μαθηματική λύση αφού η πίεση μπορεί να εκτιμηθεί απευθείας από το βάθος του νερού,  $h$ . Οι ημι-οριζόντιες ροές είναι κοινές σε ποτάμια και τεχνητά κανάλια, σε λίμνες και ταμιευτήρες και σε παράκτιες λεκάνες.

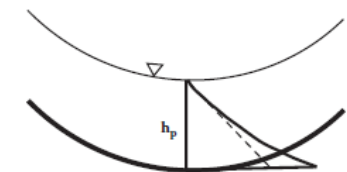
Αν και η υπόθεση της μικρής καμπυλότητας ροής μπορεί να αποκλίνει τοπικά, όπως στη ροή πάνω από ένα φράγμα, οι οιονεί οριζόντιες συνθήκες αποκαθίστανται μετά από μικρή απόσταση και δεν επηρεάζουν τις συνθήκες μακρινού πεδίου. Η υπόθεση της ημι-οριζόντιας ροής μπορεί να επεκταθεί σε κλίσεις πυθμένα έως και  $1/4$  ακόμη και  $1/3$  με επαρκή ακρίβεια (Chow 2009).



(a)



(b)



(c)

Figure 5.1 (a) Water pressure over linear slope bed. (b) Water pressure over convex-shaped bed. (c) Water pressure over concave-shaped bed.

## Δ.5.3. Μονοδιάστατη ροή σε κανάλι

### 1-D σε κανάλι ανοιχτής διατομής

Οι κύριες παραδοχές που έγιναν για τη μαθηματική επεξεργασία μονοδιάστατων ροών ανοιχτού καναλιού είναι οι ακόλουθες:

1. Η διαμήκης διάσταση της περιοχής ροής είναι πολύ μεγαλύτερη από τις εγκάρσιες διαστάσεις (πλάτος και βάθος του καναλιού).
2. Οι άγνωστες μεταβλητές είναι η μέση ταχύτητα διατομής  $u(x,t)$  και το βάθος νερού  $y(x,t)$  που μετράται από την ελεύθερη επιφάνεια έως το χαμηλότερο σημείο της κοίτης του καναλιού. Αυτό το βάθος μπορεί να εκφραστεί είτε ως το άθροισμα του αρχικού βάθους,  $h_0(x)$  και της επιφανειακής ανύψωσης  $\zeta(x,t)$  πάνω από το αρχικό βάθος, είτε ως η διαφορά μεταξύ της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας και της ανύψωσης της κοίτης του καναλιού, μετρημένο από ένα ορισμένο δεδομένο αναφοράς.
3. Λόγω των μικρών κλίσεων της κλίνης, η υδροστατική πίεση προσεγγίζεται λαμβάνοντας υπόψη το κατακόρυφο βάθος ( $y$ ), αντί του βάθους που είναι κάθετο στην κλίση ( $h_p$ ) (Εικόνα).
4. Ισχύει η προσέγγιση της σχεδόν οριζόντιας ροής και της κατανομής της υδροστατικής πίεσης.

Στα φυσικά συστήματα, οι ροές ελεύθερης επιφάνειας είναι κυρίως τυρβώδεις και επομένως ανεξάρτητες από τον αριθμό Reynolds ( $Re$ ). Από την άλλη πλευρά, η συμπεριφορά αυτών των ροών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον αριθμό Froude:

$$F_r = \frac{u}{\sqrt{gy}}$$

## Δ.5.3. Μονοδιάστατη ροή σε κανάλι

### 1-D σε κανάλι ανοιχτής διατομής

Για  $Fr = 1$  ροή είναι κρίσιμη

για  $Fr < 1$  ροή είναι υποκρίσιμη και

για  $Fr > 1$  ροή είναι υπερκρίσιμη

Ο αριθμός Froude είναι ενδεικτικός της ισορροπίας μεταξύ δυνάμεων αδράνειας και βαρύτητας και είναι πολύ σημαντικός στη μαθηματική μοντελοποίηση, αφού επηρεάζει τη συμπεριφορά ροής και τη σωστή επιλογή των οριακών συνθηκών.

Μια άλλη σημαντική ταξινόμηση για τις ροές ανοιχτού καναλιού είναι η μεταβλητότητά τους σε χρόνο,  $t$  ή απόσταση,  $x$ .

$$\frac{\partial(\varphi)}{\partial t} \equiv 0 \quad \frac{\partial(\varphi)}{\partial t} \neq 0, \quad \text{σταθερή ή ασταθής?}$$

$$\left( \frac{\partial(\varphi)}{\partial x} \equiv 0 \right) \quad \frac{\partial(\varphi)}{\partial x} \neq 0, \quad \text{ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη?}$$

όπου  $\varphi$  είναι είτε το βάθος  $y(x,t)$  είτε η ταχύτητα  $u(x,t)$ . Επιπλέον, οι μη ομοιόμορφες ροές μπορούν να μεταβάλλονται σταδιακά (προφίλ επιφάνειας) ή να μεταβάλλονται γρήγορα (π.χ. μετεωρ. παλίρροια ή ανάστροφα διαδιδόμενο υδραυλικό άλμα – surge or bore).

## Δ.5.4. Μεταβαλλόμενη μη ομοιόμορφη ροή

### Σταδιακά μεταβαλλόμενη μη ομοιόμορφη ροή

Δύο σημαντικά χαρακτηριστικά οποιασδήποτε 1-D ροής ανοιχτού καναλιού είναι το κανονικό βάθος,  $y_n$ , και το κρίσιμο βάθος,  $y_c$ .

Το κανονικό βάθος αντιστοιχεί στο βάθος του νερού υπό ομοιόμορφες συνθήκες ροής και μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση Manning ή Chezy:

$$u = \frac{Q}{A} = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_o^{1/2}$$

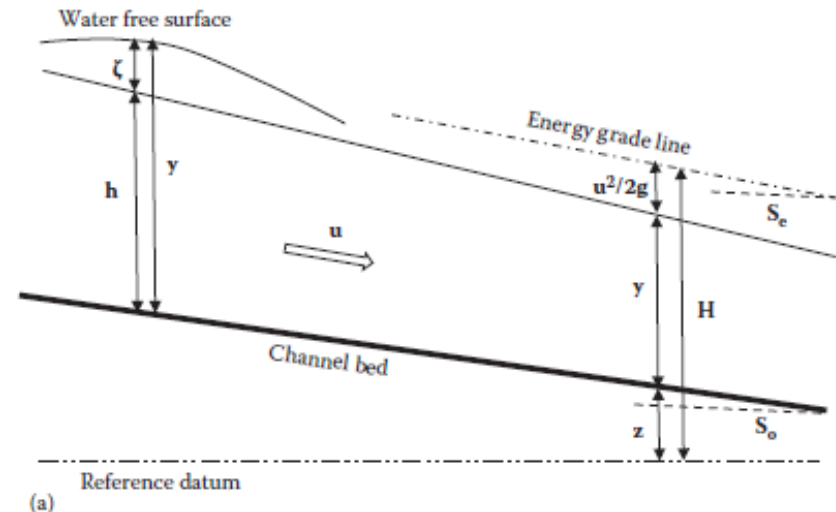
$$u = C_z \sqrt{R_h S_o}$$

όπου  $R_h$  είναι η υδραυλική ακτίνα,  $S_o$  είναι και η κλίση του πυθμένα, και  $n$  και  $C_z$  είναι οι συντελεστές τριβής του Manning και του Chezy, αντίστοιχα.

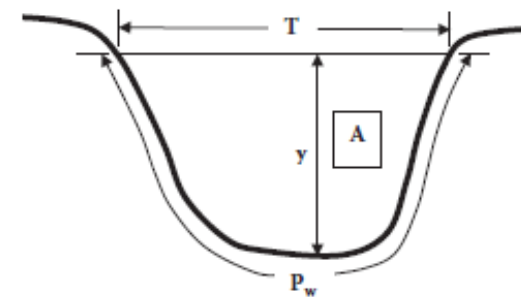
Επιπλέον, η υδραυλική ακτίνα εκφράζεται ως

$$R_h = \frac{A}{P_w}$$

όπου  $A$  είναι το εμβαδόν διατομής ροής και  $P_w$  είναι η υγρή περίμετρος που ορίζεται ως η οριακή διεπιφάνεια νερού-στερεού (Εικόνα).



(a)



(b)

Figure 5.2 Schematic illustration of open channel characteristics. (a) Longitudinal view and (b) cross-sectional area.

# Δ.5.4. Μεταβαλλόμενη μη ομοιόμορφη ροή

## Σταδιακά μεταβαλλόμενη μη ομοιόμορφη ροή

Πρέπει να σημειωθεί ότι στις Εξισώσεις η κλίση του πυθμένα ( $S_o$ ) χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του κανονικού βάθους, δηλαδή της ομοιόμορφης ροής. Για μη ομοιόμορφη ροή, θα πρέπει να χρησιμοποιείται η ενεργειακή κλίση ή κλίση της γραμμής ενέργειας ( $S_e$ ).

Για μια περιοχή διατομής αυθαίρετου σχήματος, το κρίσιμο βάθος ( $y_c$ ) υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\frac{Q^2 T}{g A^3} = 1$$

όπου  $Q$  είναι η παροχή ροής (π.χ. εκροής) και  $T$  το πλάτος επιφανειακής ροής.

Η εξίσωση είναι μια γενικευμένη έκφραση του αριθμού Froude που ανυψώνεται στη δεύτερη δύναμη.

Για ορθογώνια κανάλια, η εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί και να λυθεί για το κρίσιμο βάθος ( $y_c$ ) όπου  $q$  είναι η ανηγμένη παροχή ροής ανά μονάδα πλάτους.

$$R_h = \frac{A}{P_w}$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

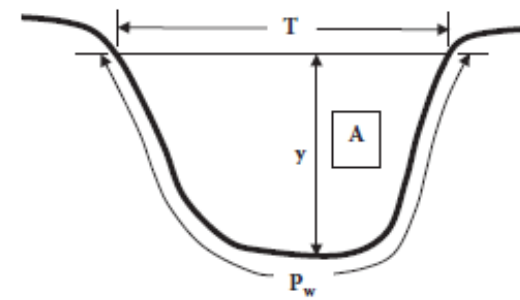
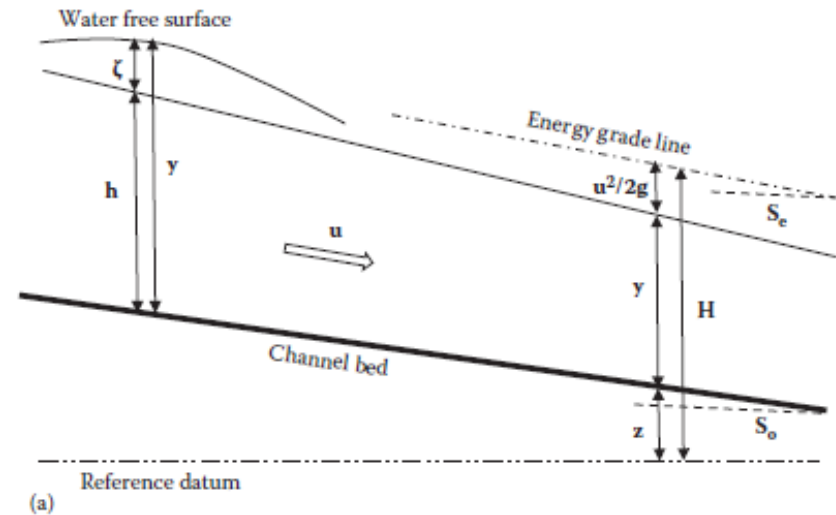


Figure 5.2 Schematic illustration of open channel characteristics. (a) Longitudinal view and (b) cross-sectional area.



## Δ.5.4. Μεταβαλλόμενη μη ομοιόμορφη ροή

### Μέθοδος Newton-Raphson

Δεδομένου ότι τόσο το  $y_n$  όσο και το  $y_c$  εμπλέκονται σιωπηρά στις Εξισώσεις, οι λύσεις μπορούν να ληφθούν πολύ αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας έναν αριθμητικό επαναληπτικό αλγόριθμο όπως η μέθοδος Newton-Raphson. Θεωρώντας ένα κανάλι τραπεζοειδούς σχήματος (Εικόνα), οι εξισώσεις που περιγράφουν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του είναι οι εξής:

$$A = (b + my)y$$

$$P_w = b + 2y\sqrt{1 + m^2}$$

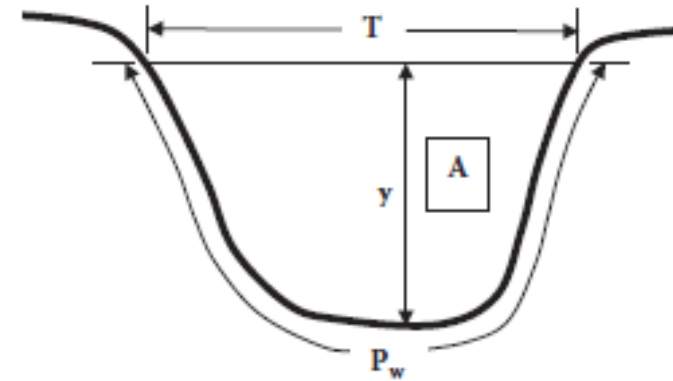
$$T = b + 2my$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για ορθογώνια κανάλια ( $m=0$ ) ή για τριγωνικά ( $b=0$ ).

Ο συνδυασμός των εξισώσεων οδηγεί στην ακόλουθη

**άρρητη μη γραμμική συνάρτηση**,  $f_n(y_n)$ ,

για το κανονικό βάθος:



$$f_n(y_n) = \frac{\sqrt{S}}{n} \frac{[(b + my_n)y_n]^{5/3}}{[b + 2y_n\sqrt{1 + m^2}]^{2/3}} - Q$$

The first derivative of the function Equation 5.10 reads

$$\frac{df_n(y_n)}{dy_n} = f_n'(y_n) = \frac{\sqrt{S}}{n} [(b + my_n)y_n]^{2/3} \left[ \left( -\frac{4}{3} \sqrt{1 + m^2} \right) + \frac{5}{3} \frac{b + 2my_n}{(b + 2y_n\sqrt{1 + m^2})^{2/3}} \right]$$

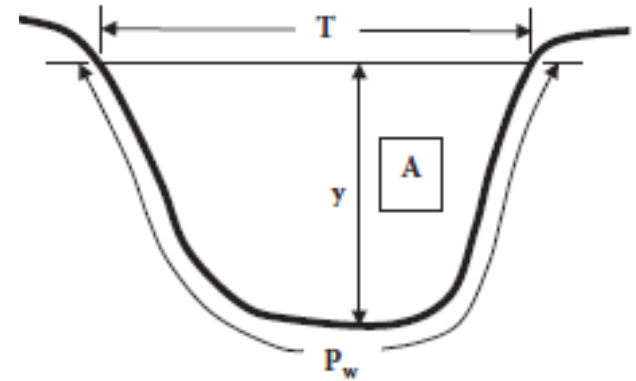
## Δ.5.4. Μεταβαλλόμενη μη ομοιόμορφη ροή

### Μέθοδος Newton-Raphson

Ομοίως, ο συνδυασμός των εξισώσεων οδηγεί στην ακόλουθη άρρητη μη γραμμική συνάρτηση,  $f_c(y_c)$ , για το κρίσιμο βάθος και την πρώτη του παράγωγο:

$$f_c(y_c) = \frac{[(b + my_c)y_c]^{3/2}}{\sqrt{b + 2my_c}} - \frac{Q}{\sqrt{g}}$$

$$\frac{df_c(y_c)}{dy_c} = f'_c(y_c) = -m \left[ \frac{(b + my_c)y_c}{b + 2my_c} \right]^{3/2} + \frac{3}{2} \sqrt{[(b + my_c)y_c](b + 2my_c)}$$



Μόλις καθοριστούν οι συναρτήσεις και οι παράγωγοι,

ο αλγόριθμος επαναληπτικής λύσης Newton-Raphson μπορεί να εφαρμοστεί ως

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{f(y^{(k)})}{f'(y^{(k)})}$$

Ξεκινώντας με μια πολύ μικρή αρχική τιμή για το  $y(0)$ , ο αλγόριθμος συγκλίνει πολύ γρήγορα στη λύση είτε για το  $y_n$  είτε για το  $y_c$ . Η εκτίμηση του κανονικού και κρίσιμου βάθους είναι πολύ σημαντική για την ταξινόμηση των προφίλ της επιφάνειας του νερού για σταθερές σταδιακά μεταβαλλόμενες ροές.

## Δ.5.4. Μεταβαλλόμενη μη ομοιόμορφη ροή

### Προφίλ επιφάνειας νερού

Το συνολικό ενεργειακό (υδραυλικό) φορτίο,  $H$ , σε οποιοδήποτε σημείο του καναλιού είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας, της δυναμικής πιεζομετρικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας ανύψωσης (Εικόνα):

$$H = \frac{Q^2}{2gA^2} + \frac{p}{\gamma} + z = \frac{Q^2}{2gA^2} + y + z \quad (5.15)$$

By taking the derivative of Equation 5.15 with respect to  $x$  it leads to

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = -\frac{Q^2 T}{gA^3} \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} \quad (5.16)$$

Μετά την αντικατάσταση της ενεργειακής κλίσης, της κλίσης της κλίνης και του αριθμού Froude, και με αναδιάταξη, προκύπτει μια συνήθης μη γραμμική διαφορική εξίσωση για το προφίλ ελεύθερης επιφάνειας:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_e}{1 - F_r^2}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Manning για την ενεργειακή κλίση,  $S_e$ , το βάθος ροής,  $y$ , περιέχεται με άρρητο τρόπο στις μεταβλητές  $A$ ,  $P_w$  και  $T$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - n^2 Q^2 \frac{P_w^{4/3}}{A^{10/3}}}{1 - \frac{Q^2 T}{g A^3}}$$

## Δ.5.4. Μεταβαλλόμενη μη ομοιόμορφη ροή

### Προφίλ επιφάνειας νερού

Για τη λύση της Εξίσωσης θα πρέπει να παρέχονται οι κατάλληλες οριακές συνθήκες σε κάποιο τμήμα ελέγχου (φράγμα, ελεύθερη εκροή κ.λπ.). Ανάλογα με τη σχέση των δύο βαθών – κανονικού βάθους,  $y_n$  και κρίσιμου βάθους,  $y_c$  – τα κανάλια ταξινομούνται ως εξής:

Mild slope channels (M):  $y_c < y_n$

Steep slope channels (S):  $y_c > y_n$

Critical slope channels (C):  $y_c = y_n$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας ως κριτήριο την κλίση, είναι δύο ακόμη κατηγορίες: Horizontal slope channel (H):  $S_o = 0$   
Adverse slope channel (A):  $S_o < 0$

Εξαιρουμένων των ειδικών περιπτώσεων, οι δύο κατηγορίες πρακτικού ενδιαφέροντος είναι τα κανάλια ήπιας και απότομης κλίσης. Επιπλέον, τα προφίλ επιφάνειας κατηγοριοποιούνται με βάση τη θέση της επιφάνειας του νερού σε σχέση με τα κανονικά και κρίσιμα βάθη ροής ως εξής:

M1 curve:  $y > y_n > y_c$

M2 curve:  $y_n > y > y_c$

M3 curve:  $y_n < y_c < y$

S1 curve:  $y > y_c > y_n$

S2 curve:  $y_c > y > y_n$

S3 curve:  $y_c > y_n > y$

Θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι για υποκρίσιμες ροές (καμπύλες M1, M2 και S1) το τμήμα ελέγχου (οριακή συνθήκη) είναι κατάντη, επομένως η λύση προχωρά ανάντη, ενώ για υπερκρίσιμες ροές (καμπύλες M3, S2 και S3), το τμήμα ελέγχου είναι ανάντη και η λύση προχωρά κατάντη.

## Δ.5.4. Μεταβαλλόμενη μη ομοιόμορφη ροή

### Προφίλ επιφάνειας νερού

Θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι για υποκρίσιμες ροές (καμπύλες M1, M2 και S1) το τμήμα ελέγχου (οριακή συνθήκη) είναι κατάντη, επομένως η λύση προχωρά ανάντη, ενώ για υπερκρίσιμες ροές (καμπύλες M3, S2 και S3), το τμήμα ελέγχου είναι ανάντη και η λύση προχωρά κατάντη.

Ο πιο ευρέως χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος λύσης για την Εξίσωση είναι η μέθοδος τυπικών βημάτων. Ωστόσο, άλλοι επαναληπτικοί αλγόριθμοι για συνηθισμένες διαφορικές εξισώσεις (ODE) μπορούν επίσης να εφαρμοστούν. Για την περίπτωση καναλιών με σταθερή επιφάνεια διατομής, η 2<sup>η</sup>ς τάξης μέθοδος Runge-Kutta μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά ως εξής. Ξεκινώντας από τη διατομή ελέγχου, η τιμή για την Εξίσωση υπολογίζεται ως:

$$f(y_i) = \frac{S_o - n^2 Q^2 \left( \frac{P_w^{4/3}}{A^{10/3}} \right)_{y=y_i}}{1 - \frac{Q^2}{g} \left( \frac{T}{A^3} \right)_{y=y_i}}$$

Μετά την επιλογή ενός χωρικού υπολογιστικού βήματος  $\Delta x$ , μια γειτονική τιμή για το βάθος του νερού (ανάντη ή κατάντη) υπολογίζεται ως

$$y_{i+1}^* = y_i + \frac{1}{2} f(y_i) \Delta x$$

Στη συνέχεια επανυπολογίζεται η συνάρτηση  $f^*(y_{i+1})$  και καταχωρείται μια διορθωμένη τιμή για το βάθος νερού του διπλανού τμήματος ως

$$y_{i+1} = y_i + f(y_{i+1}^*) \Delta x$$

Ο αλγόριθμος συνεχίζει επιβάλλοντας τον έλεγχο: μέχρι  $|y_{i+1} - y_i| < \epsilon$ , όπου  $\epsilon$  είναι ένας προκαθορισμένος μικρός αριθμός.

## Δ.5.5. Μη μόνιμη ροή ανοιχτού αγωγού

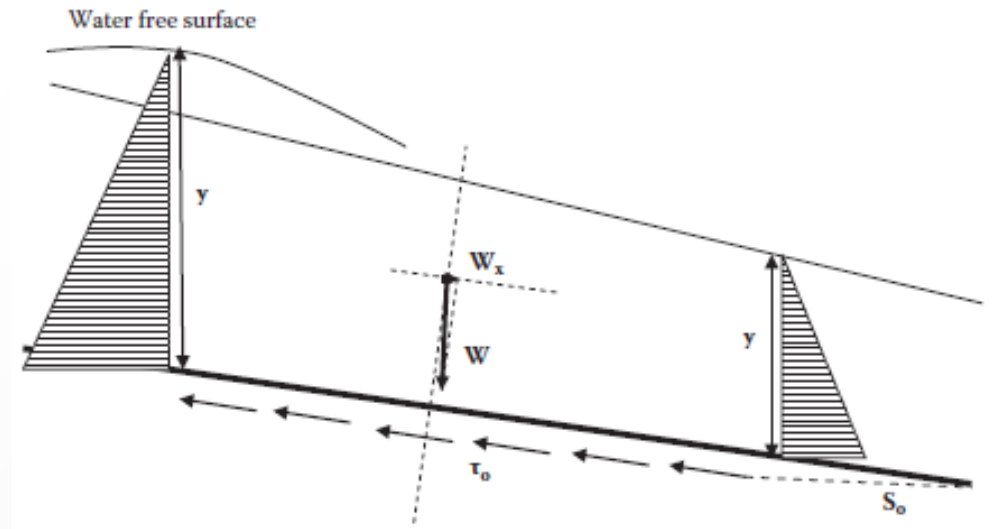
### Βασικές εξισώσεις

Οι μονοδιάστατες ομοιόμορφες οριζόντιες ροές σε ασταθή κατάσταση μπορούν να περιγραφούν ως προς τη μέση ταχύτητα,  $u(x,t)$  ή την παροχή ροής,  $Q(x,t)$  και το βάθος του νερού,  $y(x,t)$ , ή το εμβαδόν της διατομής,  $A(x,t)$ . Οι δύο εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο βασίζονται στις αρχές της διατήρησης της μάζας και της ισοροπίας της ορμής γραμμένες κατά μήκος του άξονα του καναλιού, στην πραγματικότητα κατά μήκος της κατεύθυνσης ροής (ελαφρώς αποκλίνοντας από την οριζόντια, δεδομένου ότι η κλίση του καναλιού είναι συνήθως της τάξης του 1%) (Σκαρλάτος 1996α). Η εξίσωση διατήρησης (συνέχειας) μάζας (ή όγκου) γράφεται ως

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L$$

όπου  $q_L$  είναι η πλευρική εισροή. Για ένα ορθογώνιο κανάλι η εξίσωση γράφεται ως

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{q_L}{B}$$



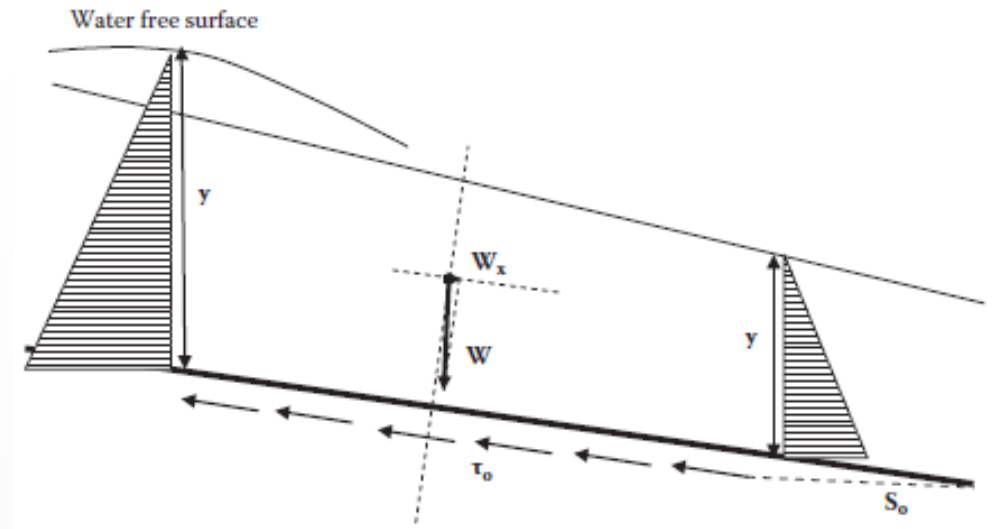
## Δ.5.5. Μη μόνιμη ροή ανοιχτού αγωγού

### Βασικές εξισώσεις

Η εξίσωση εκφράζει την εξέλιξη της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας (ή της διακύμανσης του βάθους) ως προς τη διαφορά μεταξύ των εισερχόμενων και εξερχόμενων παροχών μέσω του απειροστού χώρου ελέγχου που εξετάζουμε (η απόσταση του μήκους του καναλιού =  $\delta x$ ).

Για τη διατύπωση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής (ισορροπία ποσότητας κίνησης), ο 2<sup>ος</sup> νόμος του Newton εφαρμόζεται λαμβάνοντας υπόψη (Εικόνα):

- Οι δυνάμεις υδροστατικής πίεσης δρουν στις δύο πλευρές (ανάντη και κατάντη) του χώρου ελέγχου
- Η συνιστώσα του βάρους του νερού ( $W_x$ ) εντός του όγκου ελέγχου κατά μήκος της κατεύθυνσης ροής είναι παράλληλη προς τον πυθμένα
- Το άθροισμα των κατανεμημένων δυνάμεων τριβής ( $\tau_o$ ) στη βρεγμένη περίμετρο του καναλιού



## Δ.5.5. Μη μόνιμη ροή ανοιχτού αγωγού

### Βασικές εξισώσεις

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial y}{\partial x} + g(S_o - S_e)$$

where  $S_o$  is the slope of the channel bed and  $S_e = \frac{\tau_o}{\rho g R_h}$  is the slope of the energy grade line, a function of the wall friction  $\tau_o$ . By using the Chezy formula (Equation 5.3) for the wall friction, the operational form for  $S_e$  becomes

$$S_e = \frac{u^2}{C_z^2 R_h} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial y}{\partial x} + g(S_o - S_e)$$

Για ορθογώνια κανάλια,  $A = By$  και αν το πλάτος του καναλιού είναι πολύ μεγαλύτερο από το βάθος (όπως στη γεωμετρία της διατομής ποταμού),  $R_h = y$ . Για  $qL = 0$  και παραβλέποντας τους μη γραμμικούς όρους, τις εξισώσεις που δiéπουν γράφονται ως άνω δεξιά.

Στην περίπτωση της σταθερής ροής, η εξίσωση συνέχειας μειώνεται σε  $Q = \text{σταθερά}$  και η εξίσωση ισορροπίας παίρνει τη μορφή

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g(S_o - S_e)$$

που μετά από αντικατάσταση του  $u = Q/A$  οδηγεί στο προφίλ επιφάνειας. Η δυνατότητα εφαρμογής της ασταθούς μορφής είναι πολύ μεγάλη, καθώς περιγράφει τη διάδοση ενός μεταβατικού κύματος πλημμύρας κατά μήκος ενός φυσικού ρεύματος (π.χ. ποταμού) ή κατά μήκος ενός τεχνητού καναλιού (π.χ. κανάλι αποστράγγισης).



## Δ.5.5. Μη μόνιμη ροή ανοιχτού αγωγού

### Βασικές εξισώσεις

Για ένα ορθογώνιο κανάλι μεταβλητού πλάτους, το γραμμικό μοντέλο διάδοσης πλημμύρας αποτελείται από τις δύο γραμμικές υπερβολικές εξισώσεις 1<sup>ης</sup> τάξης, τη σχέση παροχής ροής και τις απαραίτητες συνθήκες (δηλαδή αρχική και οριακή συνθήκη).

$$Q = uBy = uA$$

Για τις αρχικές συνθήκες, οι τιμές των  $u(x,t=0)$  και  $y(x,t=0)$  θα πρέπει να παρέχονται για ολόκληρο το πεδίο της λύσης. Σε περίπτωση αρχικά «στεγνού πυθμένα», οι αρχικές συνθήκες γράφονται ως  $u(x,t=0)=0$  και  $y(x,t=0)=0$ . Για υποκρίσιμες ροές θα πρέπει να προβλέπονται οριακές συνθήκες και για το ανάντη και το κατόντη άκρο του καναλιού. Για το ανάντη άκρο παρέχεται το υδρογράφημα παροχής εισερχόμενης πλημμύρας  $Q(x=0,t)$ . Γενικά, το υδρογράφημα παροχής περιγράφεται ως μια χρονοσειρά διακριτής τιμής τιμών της  $Q$  με χρονικό διάστημα παρατήρησης  $\delta t$  (προσοχή στην κλίμακα του φαινομένου: π.χ. για το χρονικό διάστημα, οι ωριαίες τιμές μπορεί να επαρκούν για ένα συμβάν πλημμύρας που διαρκεί περισσότερο από μία ημέρα).

Στις περισσότερες περιπτώσεις, το διάστημα παρατήρησης  $\delta t$  είναι διαφορετικό από το υπολογιστικό χρονικό βήμα  $dt$ . Για το κατόντη άκρο όριο, είτε μπορεί να διατηρηθεί ένα σταθερό βάθος νερού (π.χ. εκροή σε ένα πολύ μεγάλο υδάτινο σώμα) είτε η ροή μπορεί να οδηγηθεί σε ένα κρίσιμο καθεστώς ροής (π.χ. ελεύθερη εκροή) έτσι ώστε να μην μπορούν να επιστρέψουν ανακλώμενα «σήματα» ροής προς την ανάντη κατεύθυνση. Η πρώτη συνθήκη είναι τόσο απλή όσο  $y(x=L,t)=Y=\text{σταθερή}$  και η δεύτερη έχει τη μορφή μιας (κρίσιμης) σχέσης μεταξύ του βάθους ροής στην τελευταία απόσταση και της εκροής, π.χ.

$$\frac{Q^2 T}{gA^3} = 1$$

## Δ.5.5. Μη μόνιμη ροή ανοιχτού αγωγού

### Αριθμητική επίλυση

Μετά τη διακριτοποίηση του πεδίου της λύσης, η αριθμητική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα ροής σε 1-D κανάλι (ανοιχτό αγωγό) γίνεται μέσω ενός σταυροειδούς κανάβου, παρόμοιου με αυτό που χρησιμοποιείται για το φαινόμενο του υδραυλικού πλήγματος (κριού) σε κλειστούς αγωγούς. Έτσι, ένα ρητό σχήμα πεπερασμένων διαφορών που βασίζεται σε ανάντι (ανιούσες ή εμπρόσθιες) διαφορές για τις χρονικές παραγώγους και κεντρικές διαφορές για τις χωρικές παραγώγους οδηγεί στις αλγεβρικές εξισώσεις στο σημείο (i,n):

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\Delta t} = -\frac{2}{B_i + B_{i+1}} \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -g \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + g \left( S_o - \frac{2|u_i^n|u_i^n}{C_z^2(y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1})} \right)$$

$$Q_i^{n+1} = u_i^{n+1} B_i \frac{y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{2}$$

Για να διατηρηθεί η αριθμητική ευστάθεια της λύσης, το **κριτήριο Courant-Friedrichs-Lewy CFL** πρέπει να ικανοποιείται ανά πάσα στιγμή. Η οριακή συνθήκη ανάντη είναι το υδρογράφημα εισροής  $Q_{in}(x=0,t)$ , και η κατάντη συνθήκη ορίζεται από μια σχέση ελεύθερης ροής:  $Q_{out} = CBy^{1.5}$ .

Εξέταση κώδικα στο Βιβλίο **Koutitas C.G., Scarlatos P.D. (2016). Computational Modelling in Hydraulic and Coastal Engineering.** CRC Press, Taylor & Francis Group **Κεφάλαιο 5, Example 5.2**

Κουτίτας ΧΓ (2005). Υπολογιστική Υδραυλική, Εκδ. Επίκεντρο, Σελ.: 199, ISBN:9789606645501

Κεφάλαιο 5

Koutitas C.G., Scarlatos P.D. (2016). **Computational Modelling in Hydraulic and Coastal Engineering**. CRC Press, Taylor & Francis Group. **Κεφάλαιο 5**

Σούλης, Ι. (2015). Υπολογιστικές τεχνικές υδραυλικής μηχανικής. Kallipos, Open Academic Editions. <http://hdl.handle.net/11419/3997>