

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ‘SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS’ ΣΤΗ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

Χρήστος Β. Μακρής

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Τομέας Υδραυλικής και Τεχνικής Περιβάλλοντος

Εργαστήριο Παράκτιας Τεχνικής και Θαλασσιών Έργων

54124, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα

E-mail: cmakris@civil.auth.gr

Τηλ: +30 2310 995668

ABSTRACT

Το παρόν άρθρο παρουσιάζει μια περιληπτική σύνοψη της σύλληψης και εξέλιξης της μεθόδου αριθμητικής προσομοίωσης Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). Ειδική προσοχή δίνεται στη χρήση της μεθόδου για την υπολογιστική προσομοίωση δυναμικών ροών. Παρουσιάζεται συνοπτικά η ιστορική εξέλιξη της μεθόδου. Ακολούθως παρατίθενται οι βασικές ερευνητικές και λειτουργικές ιδέες πίσω από αυτήν, η μεθοδολογία κατασκευής του απαραίτητου μαθηματικού μοντέλου και οι διορθώσεις του αναφορικά με τη συνέπεια, τη σταθερότητα και την ακρίβεια του στην περιγραφή δυναμικών ροών. Δίνονται παραδείγματα εφαρμογής και επικύρωσης της αποτελεσματικότητας της μεθόδου και υποδεικνύονται τα πιθανά πεδία μελλοντικής έρευνας.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα επιστημονική ανακοίνωση πραγματεύεται την εξέλιξη της μεθόδου αριθμητικής προσομοίωσης Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) στην πρωτότυπη μορφή της, η οποία βασίζεται σε εξελιγμένης μορφής αριθμητικά σχήματα τύπου Lagrange. Η SPH μέθοδος είναι μία σχετικά πρόσφατη τεχνική για την προσεγγιστική ολοκλήρωση μερικών διαφορικών εξισώσεων (μδε). Αποτελεί μία μέθοδο τύπου Lagrange χωρίς την χρήση χωρικού πλέγματος ή καννάβου (*meshfree*), η οποία περιλαμβάνει μία τεχνική παρεμβολής ψευδο-σωματιδιακής φύσης για τον υπολογισμό των μεταβλητών του υπολογιστικού πεδίου μέσω συναρτησιακής εξομάλυνσης. Κάθε ψευδο-σωματίδιο κατέχει τις ακόλουθες ιδιότητες: α) μάζα (άρα και πυκνότητα), β) θέση και ταχύτητα τύπου Lagrange και γ) εσωτερική ενέργεια. Τα υπόλοιπα μεγέθη προκύπτουν μέσω παρεμβολής και από την εφαρμογή των καταστατικών σχέσεων στο υπολογιστικό πεδίο.

Η βασική ιδέα πίσω από τις υπολογιστικές μεθόδους χωρίς τη χρήση καννάβου (*grid/mesh*) είναι να εξασφαλίσουν ακριβείς και σταθερές αριθμητικές λύσεις για ολοκληρωτικές εξισώσεις ή μδε σε συνδυασμό με κάθε πιθανή Οριακή Συνθήκη (ΟΣ), μέσω ενός συνόλου αυθαίρετα κατανομημένων κόμβων (ή σωματιδίων) χωρίς τη χρήση υπολογιστικού πλέγματος το οποίο να παρέχει κάποιου είδους συνδετικότητα μεταξύ των τελευταίων (Li & Liu, 2002). Το πλεονέκτημα σε σύγκριση με τις κλασσικές μεθόδους πεπερασμένων διαφορών (FDM) ή στοιχείων (FEM) είναι η αποφυγή των προβλημάτων διαστρέβλωσης του χωρικού πλέγματος περιγραφής του πεδίου είτε με δομημένο ή

χωρίς συγκρότηση κάρναβο, που περιορίζουν τις προσεγγίσεις τύπου Lagrange και συνεκδοχικά την προσαρμοστικότητά τους σε θέματα προσομοίωσης μεγάλων παραμορφώσεων. Κατά κάποιον τρόπο η μέθοδος SPH προκύπτει ως εξέλιξη αντίστοιχων μεθόδων ασθενούς τύπου (*weak form methods*), στις οποίες οι ΟΣ τύπου Von Neumann ικανοποιούνται φυσικά μέσω ολοκληρωτικών τελεστών εξομάλυνσης (*smoothing integral operators*) (Liu & Han, 2003), όπως περιγράφεται στις εργασίες των Liu & Gu (2002, 2003). Συγκεκριμένα γίνεται χρήση της τεχνικής της ολοκληρωτικής αναπαράστασης (*ασθενής μορφή*) στο στάδιο προσέγγισης των συναρτήσεων πεδίου, παρά στο στάδιο της διακριτοποίησης. Καθώς αποτελεί μέθοδο τύπου Lagrange, έχουμε καταγραφή της χρονικής εξέλιξης της πληροφορίας των ιδιοτήτων του υλικού συνεχούς μέσου, με την ολοκληρωτικού τύπου αναπαράσταση της προσέγγισης των συναρτήσεων πεδίου, χωρίς την ταυτόχρονη ανεπιθύμητη αριθμητική διασπορά που εισάγουν σε αντίστοιχες περιπτώσεις οι μέθοδοι τύπου Euler. Επιπλέον η σωματιδιακή (*particle*) φύση της μεθόδου σε συνδυασμό με τον μετασχηματισμό τύπου Lagrange προσδίδει ξεχωριστές ιδιότητες προσομοίωσης. Σε αντίθεση με τις υπόλοιπες μεθόδους χωρίς κάρναβο, στις οποίες οι κόμβοι (*πεπερασμένα στοιχεία – nodes*) χρησιμοποιούνται μόνο ως σημεία παρεμβολής, τα σωματίδια της SPH επιπρόσθετα φέρουν μαζί τους υλικές ιδιότητες. Εξασφαλίζουν έτσι μεγάλη προσαρμοστικότητα στη μέθοδο από το πρώτο μόλις στάδιο της προσέγγισης των μεταβλητών. Αυτή εκτελείται σε κάθε χρονικό βήμα βασιζόμενη στο τρέχον τοπικό σύνολο των αυθαίρετα κατανεμημένων σωματιδίων.

Συνολικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο πρώτος όρος (*Smoothed*) αναφέρεται στην εξομαλυντική προσέγγιση των συναρτήσεων με τη χρήση του σταθμισμένου μέσου πάνω στα γειτονικά κάθε φορά σωματίδια για την επίτευξη υπολογιστικής σταθερότητας· ο δεύτερος (*Particle*) αναφέρεται στην άνευ κάρναβο, σωματιδιακή, τύπου Lagrange φύση της μεθόδου και ο τρίτος (*Hydrodynamics*) στην καταλληλότητα της μεθόδου να αντιμετωπίζει εφαρμογές με υδροδυναμικές ροές υπό το καθεστώς μεγάλων παραμορφώσεων, όπως ροές με ελεύθερη επιφάνεια, αλληλεπίδραση κυμάτων με παράκτιες κατασκευές, αποτύπωση κινούμενων διεπιφανειών σε ρεύματα πυκνότητας, υποβρύχιες εκρήξεις, υποβρύχια μετάδοση ωστικού κύματος κλπ.

Η μέθοδος SPH αρχικά εφευρέθηκε ταυτόχρονα από τον Lucy (1977) και τους Gingold & Monaghan (1977) για την αντιμετώπιση προβλημάτων αστροφυσικής στο τρισδιάστατο ανοιχτό διάστημα, προσομοιώνοντας τις κυρίαρχες εξισώσεις της κλασσικής Νευτώνειας Υδροδυναμικής. Καθώς η μέθοδος δεν απαιτεί την ύπαρξη υπολογιστικού πλέγματος για τον υπολογισμό των χωρικών διαφορικών, τα ελεύθερα κινούμενα σωματίδια φέρουν μαζί τους την απαραίτητη υπολογιστική πληροφορία και συνακόλουθα σχηματοποιούν και ορίζουν το υπολογιστικό πλαίσιο επίλυσης των μδε, οι οποίες περιγράφουν τις αρχές διατήρησης της μάζας, ενέργειας και ορμής (*ποσότητας κίνησης*) σε δυναμικές ροές. Ανασκόπηση των πρώιμων εξελίξεων αναφορικά με την SPH δίνονται στα άρθρα των Monaghan (1982) και Benz (1990).

Οι πρώτες εφαρμογές της SPH, εκτός του πεδίου της αστροφυσικής, ιστορικά επικεντρώθηκαν στη ρευστοδυναμική και συναφείς ερευνητικές περιοχές. Αυτές περιλαμβάνουν ελαστικές ροές (Swegle, 1994), ροές πολλαπλών φάσεων (Morris, 1996), ημι-ασυμπίεστες ροές (Morris et al 1997), ρεύματα βαρύτητας (Monaghan, 1995), ροές σε αδρομερή πορώδη μέσα (Zhu et al, 1999), μεταγωγή θερμότητας (Chen et al, 1999), προσομοιώσεις μετάδοσης κραδασμών (Morris & Monaghan, 1997). Ένας άλλος σημαντικός τομέας εφαρμογής της SPH αποτελούν τα φαινόμενα έκρηξης από πυροδότηση ισχυρών εκρηκτικών. Οι Swegle & Attaway (1995) έχουν μελετήσει τη δυνατότητα υπολογισμού υποβρύχιων εκρήξεων μέσω της SPH. Σχετικά πρόσφατα οι Liu et al (2003) έχουν μελετήσει σε αυτήν την κατεύθυνση φαινόμενα όπως υποβρύχιες πυροδοτήσεις και εκρήξεις, υποβρύχιες ωστικές αναταράξεις, άμβλυνση μετάδοσης κραδασμού στο νερό κλπ. Τέλος οι Shao et al (2006) παρουσίασαν προσομοίωση κυματικής υπερπήδησης προσήνεμου πρανούς και στέψης έξαλου κυματοθραύστη με ένα SPH μοντέλο ασυμπίεστης ροής με ελεύθερη επιφάνεια.

Η ενασχόληση μεγάλου μέρους της επιστημονικής κοινότητας με τη μέθοδο SPH και η εφαρμογή της σε ευρύ φάσμα προβλημάτων έχει οδηγήσει σε σημαντικές επεκτάσεις και βελτιώσεις της αρχικής μορφής της, μέσω του εντοπισμού των εγγενών ελαττωμάτων της και της διορθωτικής επέμβασης με τροποποιημένες αριθμητικές τεχνικές. Τα κύρια προβλήματα της μεθόδου είναι η σωματιδιακή ανακολουθία που επηρεάζει την ακρίβεια και τη συνέπεια των λύσεων. Ο Monaghan (1982) πρότεινε μετασχηματισμούς συμμετροποίησης. Οι Johnson et al (1996) παρουσίασαν μετασχηματισμούς κανονικοποίησης με αξονική συμμετρία, έτσι ώστε οι ορθές τάσεις να μπορούν να αναπαράγονται με ακρίβεια για τα πεδία ταχυτήτων που εμφανίζουν εσφαλμένα σταθερές τιμές ορθών τάσεων. Οι Liu & Chen (1995) πρότειναν τη μέθοδο Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) και οι Chen et al (1999) την Corrective Smooth Particle Method (CSPM) με διόρθωση της ακρίβειας της σωματιδιακής προσέγγισης. Άλλες τροποποιήσεις είναι η Moving Least Square Particle Hydrodynamics (MLSPH) από τον Dilts (2000), η διορθωτική επέμβαση στον πυρήνα (*kernel*) του ολοκληρώματος από τους Belytschko et al (1998) καθώς και αρκετές άλλες συναφείς.

Τέλος οι Liu & Liu (2003) στο βιβλίο τους παρουσιάζουν ένα διορθωμένο εύρωστο σύμπλεγμα υπολογιστικού κώδικα σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN (SPH3D) και οι Gesteira et al (2007) μόλις έχουν κυκλοφορήσει τον κώδικα SPHysics, η θεωρητική περιγραφή του οποίου βρίσκεται στο άρθρο των Dalrymple & Rogers (2006) για την προσομοίωση υδροδυναμικών ροών ελεύθερης επιφάνειας στο θαλάσσιο περιβάλλον και ειδικά την αλληλεπίδραση κυματικού πεδίου με έξαλα παράκτια έργα. Η προσομοίωση του υπολογιστικού πεδίου μπορεί να γίνει για δυναμικές ΟΣ, ΟΣ ανακλαστικών δυνάμεων καθώς και για ανοιχτά όρια με περιοδικότητα (*ταλαντούμενη ελεύθερη επιφάνεια*). Τα αριθμητικά σχήματα που ακολουθούνται πια στη χρονική ολοκλήρωση είναι ένας μεταλλαγμένος αλγόριθμος πρόβλεψης-διόρθωσης (*Predictor-Corrector*) που προτάθηκε από τον Monaghan (1989) ή ο κλαστικός αλγόριθμος Verlet (Verlet, 1967).

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ – ΒΑΣΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Στα πλαίσια της αριθμητικής διακριτοποίησης των μδε που περιγράφουν το υπολογιστικό πεδίο με τη μέθοδο SPH, απαιτείται ο καθορισμός προσέγγισης των συναρτήσεων πεδίου και των διαφορικών τους σε κάθε σημείο της προσομοίωσης. Η συναρτησιακή προσέγγιση εφαρμόζεται στις μδε για την παραγωγή ενός συνόλου συνήθων διαφορικών εξισώσεων (*σδε*) μόνο ως προς τον χρόνο σε διακριτοποιημένη μορφή. Το παραπάνω επιτυγχάνεται στη μέθοδο SPH ως εξής:

- i) το υπολογιστικό πεδίο αναπαρίσταται από ένα σύνολο αυθαίρετα κατανεμημένων σωματιδίων χωρίς συνδέσμους μεταξύ τους. (*Meshfree*)
- ii) για την προσέγγιση των συναρτήσεων πεδίου χρησιμοποιείται η μέθοδος ολοκληρωτικής απόδοσης, γνωστή ως προσέγγιση πυρήνα (*kernel approximation*). (*Integral function representation*)
- iii) η προσέγγιση επεκτείνεται μέσω της χρήσης σωματιδίων, με την αντικατάσταση της ολοκλήρωσης των συναρτήσεων πεδίου και των διαφορικών εκφράσεων τους με αθροίσματα όλων των αντίστοιχων μεγεθών σε γειτονικά σωματίδια. Το τοπικό γειτονικό πεδίο ονομάζεται πεδίο υποστήριξης (*support domain*). (*Compact support*)
- iv) η σωματιδιακή φύσης προσέγγιση εκτελείται σε κάθε χρονικό βήμα και συνεπώς η χρήση των σημειακών σωματιδίων εξαρτάται από την τρέχουσα τοπική κατανομή αυτών. (*Adaptive*)
- v) οι σωματιδιακού τύπου προσεγγίσεις πραγματοποιούνται σε όλους τους όρους που σχετίζονται με τις συναρτήσεις πεδίου στις μδε ώστε να προκύψει ένα σύνολο διακριτοποιημένων σδε ως προς το χρόνο. (*Lagrangian*)
- vi) οι σδε επιλύονται με τη χρήση ρητού αλγορίθμου ολοκλήρωσης για την επίτευξη γρήγορου χρονικού βήματος επίλυσης και την απόκτηση της χρονοϊστορίας όλων των μεταβλητών του πεδίου για κάθε σωματίδιο. (*Dynamic*)

2.1 Βασική σχέση της SPH

Η χωρική διακριτοποίηση των καταστατικών μεταβλητών παρέχεται από ένα σύνολο σημείων. Αντί για κάρναβο, η SPH χρησιμοποιεί παρεμβολή τύπου *kernel* για την προσέγγιση των μεταβλητών σε κάθε σημείο του πεδίου. Η ιδέα ολοκληρωτικού τύπου αναπαράστασης μιας συνάρτησης βασίζεται στην ακόλουθη σχέση:

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') \delta(x-x') dx' \quad (1)$$

όπου f συνάρτηση του τρισδιάστατου διανύσματος $x=(x,y,z)$, Ω ο όγκος του ολοκληρώματος που περιέχει το x , δ το Δέλτα του Dirac και x' η νέα ανεξάρτητη μεταβλητή. Αν αντικαταστήσουμε το δ με μία συνάρτηση εξομάλυνσης (*kernel smoothing function*) $W(x-x',h)$, ο τελεστής προσέγγισης τύπου *kernel* της f , που σημειώνεται με γωνιώδεις παρενθέσεις, γράφεται ως εξής:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x') W(x-x',h) dx' \quad (2)$$

όπου h μία παράμετρος που καθορίζει το μέγεθος του πεδίου υποστήριξης γνωστή ως μήκος εξομάλυνσης (*smoothing length*). Συνήθως η συνάρτηση εξομάλυνσης W είναι ακρίβειας 2^{n_s} τάξης, επιλέγεται να είναι άρτια και πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις συνθήκες:

i) τη συνθήκη κανονικοποίησης ή μονάδας (*normalization condition*)

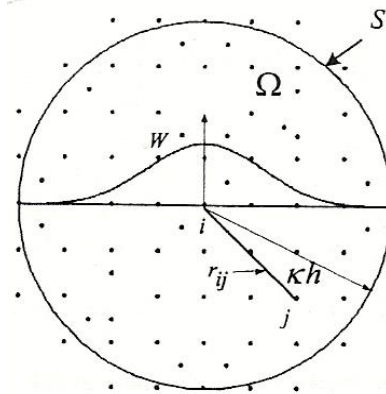
$$\int_{\Omega} W(x-x',h) dx' = 1 \quad (3)$$

ii) την ολοπαγή συνθήκη για το πεδίο υποστήριξης (*compact condition*)

$W(x-x',h) = 0$, όταν $|x-x'| > \kappa h$, όπου κ μία σταθερά καθορισμού της περιοχής υποστήριξης της συνάρτησης εξομάλυνσης γύρω από τυχαίο σημείο-σωματίδιο (Εικ. 1)

iii) την ιδιότητα του Δέλτα του Dirac όταν το μήκος εξομάλυνσης τείνει σε μηδενική τιμή

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x-x',h) = \delta(x-x') \quad (4)$$



ΕΙΚΟΝΑ 1: Πεδίο υποστήριξης συνάρτησης εξομάλυνσης W σωματιδίου i με ακτίνα κh

Αν θεωρήσουμε ότι η μάζα m_i τυχαίου σωματιδίου i ($=1,2,\dots,N$) με στοιχειώδη (απειροστό) όγκο ΔV_i , τότε για ρ_i την πυκνότητα και N τον αριθμό των σωματιδίων στο πεδίο υποστήριξης ισχύει:

$$m_i = \Delta V_i \rho_i \quad (5)$$

Συνεκδοχικά η συνεχής ολοκληρωτική παράσταση της $f(x)$ μπορεί να αντικατασταθεί από το προσεγγιστικό άθροισμα των διακριτοποιημένων τιμών της σε κάθε σημείο-σωματίδιο (*σωματιδιακή προσέγγιση*) του υπολογιστικού πεδίου με τελικό αποτέλεσμα:

$$\langle f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) \cdot W_{ij}, \text{ όπου } W_{ij} = W(x_i - x_j, h) = W(|x_i - x_j|, h) \quad (6)$$

Παρομοίως η σωματιδιακή προσέγγιση για τα χωρικά διαφορικά της συνάρτησης προκύπτουν:

$$\langle \nabla f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) \cdot \nabla W_{ij}, \text{ όπου } \nabla_i W_{ij} = \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} = \frac{x_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (7)$$

με r_{ij} την απόσταση μεταξύ i και j σωματιδίου.

2.2 Συνάρτηση Εξομάλυνσης (*Smoothing kernel function*)

Για την ολοκλήρωση της πορείας διακριτοποίησης πρέπει να οριστεί ο τύπος της συνάρτησης εξομάλυνσης (*kernel*) μέσα από πλειάδα πιθανών επιλογών στη βιβλιογραφία η οποία εκτείνεται από πολυωνυμικές σε τύπου Gauss. Η πιο κοινή προτείνεται από τον Monaghan (1982) και είναι η B-πολυωνυμική συνάρτηση υπολογισμού ομαλής καμπύλης (*B-spline kernel*):

$$\left. \begin{aligned} W(v, h) &= \frac{C}{h^D} \left(1 - \frac{3}{2}v^2 + \frac{3}{4}v^3 \right), \text{ για } v < 1 \\ W(v, h) &= \frac{C}{h^D} \left(\frac{1}{4}(2-v)^3 \right), \text{ για } 1 \leq v \leq 2 \\ W(v, h) &= 0, \text{ για κάθε άλλη περίπτωση} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

όπου $v = \frac{|x-x'|}{h}$, D είναι ο αριθμός των διαστάσεων του προβλήματος και C είναι ο συντελεστής κλίμακας με $C=2/3$ για 1-D, $C=10/7\pi$ για 2-D και $C=1/\pi$ για 3-D. Σύνοψη των διαφορών συναρτήσεων εξομάλυνσης μέχρι και 5^{ης} τάξης δίνεται στο βιβλίο των Liu & Liu (2003).

2.3 Μήκος Εξομάλυνσης Μεταβλητής (*Variable smoothing length*)

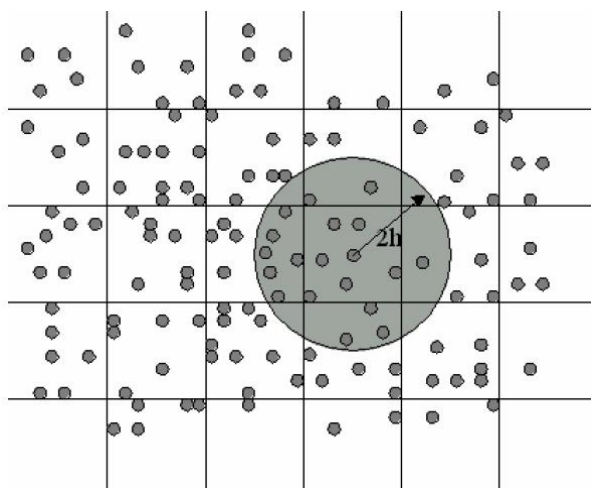
Στην περίπτωση μεγάλων παραμορφώσεων τα στοιχειώδη σωματίδια διακριτοποίησης του πεδίου μπορεί να διαχωριστούν μεταξύ τους. Αν το μήκος εξομάλυνσης παραμείνει σταθερό η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων μπορεί να αυξηθεί τόσο ώστε να μην αλληλεπιδρούν. Από την άλλη κατά τη διάρκεια της συμπίεσης πολλά σωματίδια είναι πιθανό να εισέλθουν στο πεδίο υποστήριξης άλλων σωματιδίων με τα οποία πρακτικά δεν αλληλεπιδρούν, πράγμα το οποίο μπορεί να καθυστερήσει τη διαδικασία υπολογισμών. Σε αυτήν την κατεύθυνση ο Benz (1990) πρότεινε ένα μεταβλητό μήκος εξομάλυνσης με πρόθεση να διατηρείται μία λογική και ικανή περιοχή γειτνίασης για κάθε σωματίδιο καθώς το συνεχές μέσο παραμορφώνεται, η οποία είναι:

$$h = h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{D}}, \text{ όπου } h_0 \text{ και } \rho_0 \text{ το αρχικό μήκος εξομάλυνσης και η αρχική πυκνότητα αντίστοιχα.}$$

Άλλη συχνά χρησιμοποιούμενη εξίσωση για το h , βασισμένη στην αρχή διατήρησης της μάζας είναι η εξής: $\frac{dh}{dt} = \frac{h}{D} \text{div}(v)$, όπου $\text{div}(v)$ η απόκλιση της ταχύτητας v .

2.4 Αναζήτηση γειτνίασης στο πεδίο υποστήριξης

Σημαντικότερο βήμα στην SPH προσομοίωση είναι ο καθορισμός των 'σημαντικών' γειτονικών σωματιδίων, διαδικασία η οποία μπορεί να αποβεί υπερβολικά χρονοβόρα. Η αντίστοιχη υπολογιστική ρουτίνα καταγράφει τους 'γείτονες' κάθε σωματιδίου σε κάθε χρονικό βήμα με τη χρήση ενός συνδυαστικού αλγόριθμου στο ύψος της μεθόδου Particle-In-Cell (*PIC*). Ένας υποκείμενος κίνναβος με πλευρά κελιού (*βρόχου*) ίση με kh καθορίζει τα συμμετέχοντα σωματίδια σύμφωνα με το κελί στο οποίο εντοπίζονται (*Εικ. 2*). Για κάθε σωματίδιο οι αλληλεπιδράσεις αναζητώνται ανάμεσα στα αντίστοιχα κελιά του πλέγματος. Αυτό επιτρέπει την απομείωση του υπολογιστικού χρόνου από μία τιμή ανάλογη του N^2 , για άμεση αναζήτηση, σε $N \log N$ για την τροποποιημένη, όπου N είναι ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων.



EIKONA 2: Τροποποιημένη αναζήτηση γειτνίασης στο πεδίο υποστήριξης

3. SPH ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΙΑ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΡΟΕΣ

3.1 Οι εξισώσεις Navier-Stokes σε μορφή τύπου Lagrange

Οι καταστατικές εξισώσεις της ρευστοδυναμικής βασίζονται στους κλασσικούς θεμελιώδεις φυσικούς νόμους διατήρησης της μάζας, ορμής και ενέργειας. Η περιγραφή σε κινούμενο σύστημα αναφοράς τύπου Lagrange προσδίδει έμφαση στις υλικές ιδιότητες του μέσου παρά στις χωρικές ιδιότητες του πεδίου (*Euler*), λαμβάνοντας υπόψη το ολικό διαφορικό ως προς το χρόνο (*material/global derivative*) ως συνδυασμό του τοπικού (*local*) διαφορικού και του διαφορικού μεταφοράς (*convective*). Οι τρεις προαναφερθείσες αρχές δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} \quad (9), \quad \frac{Dv^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \quad (10) \quad \text{και} \quad \frac{De}{Dt} = \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \quad (11),$$

όπου σ ο τανυστής ολικών τάσεων αποτελούμενος από δύο μέρη, το ένα των ιστροπικών πιέσεων p και το άλλο των ιξωδών διατμητικών τάσεων τ , σύμφωνα με τον τύπο $\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}$. Για Νευτώνεια ρευστά η ιξώδης διατμητική τάση τ είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της διατμητικής παραμόρφωσης ε λόγω του μεγέθους της δυναμικής συνεκτικότητας μ , σύμφωνα με τη σχέση $\tau^{\alpha\beta} = \mu\varepsilon^{\alpha\beta}$, για την οποία

$$\text{ισχύει ότι } \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta^{\alpha\beta} \quad (12).$$

Ξεχωρίζοντας τις ιστροπικές από τις ιξώδεις τάσεις συνεκτικότητας η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} + \frac{\mu}{2\rho} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta} \quad (13)$$

Στην παραπάνω ανάλυση οι δείκτες $^\alpha$ και $^\beta$ δηλώνουν τις κατευθυντικές συντεταγμένες.

3.2 SPH μετασχηματισμοί για τις εξισώσεις Navier-Stokes

Η προσέγγιση των διακριτοποιημένων κατά SPH ρευστοδυναμικών εξισώσεων μέσω του τελεστή εξομάλυνσης των εξισώσεων (6) και (7) παρέχει τις ακόλουθες σχέσεις.

3.2.1 Σωματιδιακή προσέγγιση της πυκνότητας

Η προσέγγιση της πυκνότητας μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Κατά πρώτον με την ευρέως χρησιμοποιούμενη προσέγγιση του αθροίσματος πυκνοτήτων η οποία δίνει:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (14) \quad \text{και η οποία λόγω Chen et al (1999) γίνεται: } \rho_i = \frac{\sum_{j=1}^N m_j W_{ij}}{\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij}} \quad (15)$$

Η δεύτερη προσέγγιση βασίζεται στην μετατροπή του συνεχούς ολοκληρώματος όγκου σε αθροίσματα πάνω σε σημεία παρεμβολής και τελικά δίνει λόγω της (9):

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}^\beta \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (16)$$

Η εξίσωση (16) δείχνει καθαρά ότι ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας ενός σωματιδίου εξαρτάται από τις σχετικές ταχύτητες μεταξύ αυτού και των υπόλοιπων σωματιδίων στο πεδίο υποστήριξης. Η βαθμωτή μεταβολή (*gradient*) της συνάρτησης εξομάλυνσης καθορίζει και την συμμετοχή αυτών των σχετικών ταχυτήτων.

3.2.2 Σωματιδιακή προσέγγιση της ορμής

Ανάλογος χειρισμός της εξίσωσης (10) αποδίδει την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i^\alpha}{Dt} &= \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad \text{ή} \\ \frac{Dv_i^\alpha}{Dt} &= - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\mu_i \varepsilon_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\mu_j \varepsilon_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \end{aligned} \quad (17)$$

3.2.2 Σωματιδιακή προσέγγιση της ενέργειας

Η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη σχέση για την προσέγγιση της εσωτερικής ενέργειας είναι η εξής:

$$\frac{De}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) v_{ij}^\beta \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \frac{\mu_i}{2\rho_i} \varepsilon_i^{\alpha\beta} \varepsilon_i^{\alpha\beta} \quad (18)$$

Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι αμελώντας τους όρους συνεκτικότητας στις εξισώσεις Navier-Stokes παράγονται οι εξισώσεις κίνησης κατά Euler.

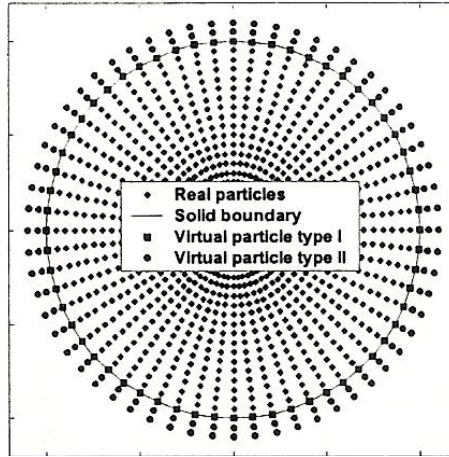
3.3 Οριακές Συνθήκες στη μέθοδο SPH

Η εκτεταμένη εφαρμογή της SPH σε πολλά ερευνητικά πεδία παρακωλύεται από το πρόβλημα της ανεπάρκειας των σωματιδίων να αναπαραστήσουν τις οριακές συνθήκες, λόγω της αποκοπής (*truncation*) του ολοκληρώματος στο όριο του πεδίου ορισμού. Εκεί θεωρείται ότι δεν υπάρχουν σωματίδια εξωτερικά του πεδίου και αυτή η τακτική αποδίδει σωστά αποτελέσματα όσο αφορά στην ΟΣ ελεύθερης επιφάνειας. Όμως σε επαφές ρευστού με στερεά όρια, παρόλο που η ταχύτητα μηδενίζεται, δεν παρατηρείται το ίδιο αναφορικά με άλλες μεταβλητές όπως η πυκνότητα.

Ο Monaghan (1994) χρησιμοποίησε μία στοιβάδα φανταστικών ή εικονικών σωματιδίων επί του στερεού ορίου για την παραγωγή έντονης δύναμης ανάκλασης στα σωματίδια κοντά στο όριο, ώστε να αποφεύγεται η χωρίς φυσική σημασία διείσδυση διαμέσω του ορίου. Άλλος τρόπος είναι η συμπερίληψη των υπολειμματικών (*residual*) όρων στην ολοκλήρωση σε μέρη κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος του βασικού *kernel* που εμπλέκει τις βαθμωτές μεταβολές (*gradients*) στο όριο. Οι Libersky et al (1993) πρώτοι εισήγαγαν εικονικά σωματίδια για την αναπαράσταση συμμετρικών ΟΣ. Οι Randles & Libersky (1996) πρώτοι εφάρμοσαν μία γενικότερη αντιμετώπιση για τις ΟΣ αναθέτοντας την ίδια τιμή της μεταβλητής πεδίου στο όριο σε όλα τα εικονικά σωματίδια, παρεμβάλλοντας την ομαλά με την αντίστοιχη τιμή στο εσωτερικό του πεδίου. Οι Liu & Liu (2003) ορίζουν σωματίδια τύπου I, ακριβώς πάνω στο όριο & τύπου II, εξωτερικά του ορίου όπως απεικονίζονται στην Εικόνα 3. Η δύναμη που εξασκείται ανά ζεύγος γειτονικών σωματιδίων και κατά μήκος της ευθείας σύνδεσής τους δίνεται από τη σχέση:

$$PB_{ij} = D \left(\left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{n_1} - \left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{n_2} \right) \frac{x_{ij}}{r_{ij}^2}, \left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right) \leq 1 \quad \text{και} \quad PB_{ij} = 0, \left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right) > 1 \quad (19)$$

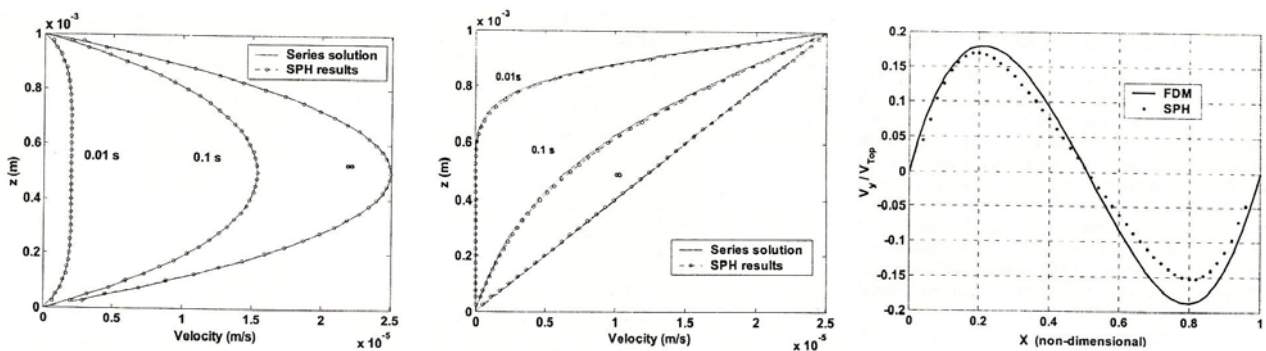
όπου $n_1=12$ και $n_2=14$, D παράμετρος ανάλογη με v_{max}^2 και r_0 η απόσταση αποκοπής συνήθως περίπου ίση με το μέσο αρχικό χωρικό βήμα διακριτοποίησης των στοιχείων-σωματιδίων.



ΕΙΚΟΝΑ 3: Σωματίδια πεδίου και ορίου τύπου I & II

4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, ΕΠΙΚΥΡΩΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SPH

Μία πλειάδα από αριθμητικές δοκιμές έχουν λάβει χώρα για να εξεταστεί η ικανότητα και η αποτελεσματικότητα των SPH μετασχηματισμών σε υδροδυναμικές προσομοιώσεις. Οι Liu & Liu (2003) παρουσιάζουν συγκεντρωτικά αποτελέσματα εφαρμογών SPH με μεγάλη επιτυχία προσομοίωσης σε ασυμπίεστες ροές, όπως η ροή Poiseuille, η ροή Couette και η διατμητικής φύσης σπηλαίωση (Εικ. 4), σε ροές με ελεύθερη επιφάνεια, όπως η κρούση σταγόνας σε στερεό όριο, η εκροή σε λεκάνη ηρεμίας και η θραύση φράγματος και τέλος σε συμπιεστές ροές όπως η διαστολή (εκτόνωση) αερίου. Τελευταία μεγάλη απήχηση έχει η μέθοδος SPH στην προσομοίωση ροών ελεύθερης επιφάνειας στο θαλάσσιο περιβάλλον και ειδικά την αλληλεπίδραση κυματικού πεδίου με έξαλα παράκτια έργα, όπως η κυματική υπερπήδηση προσήνεμου πρανούς θωράκισης ακτής ή στέγης έξαλου κυματοθραύστη (Shao et al, 2006; Dalrymple & Rogers 2006).



ΕΙΚΟΝΑ 4: Προσομοίωση με SPH για ροές Poiseuille, Couette, διατμητικής φύσης σπηλαίωση

Παρά τις προαναφερθείσες βελτιώσεις και επιτυχημένες εφαρμογές της SPH το κρίσιμο ζήτημα της σύγκλισης με την αυστηρά μαθηματική έννοια και οι συσχετισμοί της με τις καταστατικές αρχές διατήρησης δεν έχουν αποσαφηνιστεί πλήρως. Ενθαρρυντικά πρώτα βήματα έχουν γίνει από τον Moussa (2000), ο οποίος πρότεινε μία ενδιαφέρουσα νέα προσέγγιση, συμπεριλαμβάνοντας εμπρόσθιο αριθμητικό σχήμα στο όριο μία τεχνική που σχετίζεται με σχήματα πεπερασμένων όγκων για αναχαίτιση (ωστικών) κραδασμών τύπου Godunov (Toro, 1999). Όμως ζητήματα όπως η αριθμητική συνέπεια της μεθόδου, η εφελκυστική αστάθεια (*tensile instability*) κυρίως για ιξωδοελαστικές προσομοιώσεις σε σχεδόν στερεά μέσα και οι ανεπιθύμητες καταστάσεις μηδενικής ενέργειας (*zero energy modes*) έχουν ακόμα πολύ δρόμο για να αντιμετωπιστούν πλήρως και αποτελούν μερικά από τα συναφή με την SPH σύγχρονα και μελλοντικά πεδία έρευνας.

5. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μέθοδος SPH αποτελεί μία αριθμητική τεχνική υπολογιστικής προσομοίωσης δυναμικών ροών τύπου Lagrange, σωματιδιακής φύσης χωρίς τη χρήση υπολογιστικού πλέγματος, η οποία παρουσιάζει αρκετά πλεονεκτήματα έναντι των παραδοσιακών αριθμητικών μεθόδων που βασίζονται στη χρήση καννάβου. Η ικανότητα και η ευρωστία της μεθόδου αποδεικνύεται τόσο σε κλασσικά υδροδυναμικά προβλήματα όσο κυρίως σε ζητήματα προσομοίωσης ακραία παραμορφώσιμων ρευστών μέσων, όπως ροές με ελεύθερη επιφάνεια, υποβρύχιες εκρήξεις κ.α., στα οποία οι παραδοσιακές FDM και FEM μέθοδοι αδυνατούν να δώσουν ικανοποιητική λύση από άποψη ακρίβειας, σταθερότητας και υπολογιστικού χρόνου. Η SPH ως μία σχετικά πρόσφατη μέθοδος έχει ακόμα πολλά περιθώρια βελτίωσης της απόδοσης της αναφορικά με την αριθμητική συνέπεια, την ευκολία ή την ταχύτητα αριθμητικής σύγκλισης και την αντιμετώπιση ελαττωμάτων όπως τα ‘zero energy modes’ για την προσομοίωση πρόσκρουσης ρευστών ή στερεών σωμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Belytschko T., Y. Krongauz, J. Dolbow & C. Gerlach (1998) ‘On the completeness of the meshfree particle methods’, **Int. Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 43 (5), pp. 785-819.
2. Benz W. (1990) ‘Smooth particle hydrodynamics: a review’, **The Numerical Modelling of Nonlinear Stellar Pulsations: Problems and Prospects**, (ed. J. R. Buchler), Kluwer Academic Publishers, pp. 269-288.
3. Chen J. K., J. Beraun & T. C. Carney (1999) ‘A corrective SPH method for boundary value problems in heat conduction’, **Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering**, Vol. 46, pp. 231-252.
4. Dalrymple R. A. & B. D. Rogers (2006) ‘Numerical modeling of water waves with the SPH method’, **Coastal Engineering**, Vol. 53, pp. 141 – 147.
5. Dilts G. A. (2000) ‘Moving least square particle hydrodynamics I: consistency & Stability’, **Int. Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 44, pp. 1115-1155.
6. Gesteira M. G., B. D. Rogers, R. A. Dalrymple, A. J. C. Crespo & M. Narayanaswamy (2007) ‘**SPHysics User Guide**’, Internet Version.
7. Gingold R. A. & J. J. Monaghan (1977) ‘Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars’, **Monthly Notices Royal Astronomical Society**, Vol. 181, pp. 375-389.
8. Johnson G. R., R. A. Stryk & S. R. Beissel (1996) ‘SPH for high velocity impact computations’, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 139, pp. 347-373.
9. Li S. & W. K. Liu (2002) ‘Meshfree and particle methods and their applications’, **Applied Mechanics Review**, Vol. 55 (1), pp. 1-34.
10. Libersky L.D., A. G. Petschek, T. C. Carney, J. R. Hipp & F. A. Allahdadi (1993) ‘High Strain Lagrangian Hydrodynamics: A 3-D SPH Code for Dynamic Material Response’, **Journal of Computational Physics**, Vol. 109 (1), November 1993, pp. 67-75.
11. Liu G. R. & Y. T. Gu (2002) ‘A truly meshless method based on the strong-weak form’, **Advances in Meshfree and X-FEM Methods**, (ed. Liu G. R.), pp. 259-261.
12. Liu G. R. & Y. T. Gu (2003) ‘A meshfree Weak-Strong (MWS) form method, Proc. **25th World Conf. on Boundary Element Methods**, Split, Croatia, September 2003.
13. Liu G. R. & X. Han (2003) ‘**Computational inverse techniques in nondestructive evaluation**’, CRC Press.

14. Liu G. R. & M. B. Liu (2003) '**Smoothed Particle Hydrodynamics, a meshfree particle method**', World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
15. Liu M. B., G. R. Liu, Z. Zong & K. Y. Lam (2003) 'SPH for numerical simulations of underwater explosions, **Computational Mechanics**, Vol. 30 (2), pp. 106-118.
16. Liu W. K. & Y. Chen (1995) 'Wavelet and multiple-scale reproducing kernel methods', **Int. Journal for Numerical Methods in Fluids**, Vol. 20, pp. 901-931.
17. Lucy L. B. (1977) 'Numerical approach to testing the fission hypothesis', **Astronomical Journal**, Vol. 82, pp. 1013-1024.
18. Monaghan J. J. (1982) 'Why particle methods work', **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, Vol 3 (4), pp. 422-433.
19. Monaghan J. J. (1989) 'On the problem of penetration in particle methods', **Journal of Computational Physics**, Vol 82, pp.1-15.
20. Monaghan J. J. (1994) 'Simulating free surface flows with SPH', **Journal of Computational Physics**, Vol.110, pp. 399- 406.
21. Monaghan J. J. (1995) '**Simulating gravity currents with SPH lock gates**', Applied mathematics Reports and Preprints, Monash University.
22. Morris J. P. (1996) '**Analysis of SPH with applications**', PhD Thesis, Monash University.
23. Morris J. P., P. J. Fox & Y. Zhu (1997) 'Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH', **Journal of Computational Physics**, Vol. 136, pp. 214-226.
24. Morris J. P. & J. J. Monaghan (1997) 'A switch to reduce SPH viscosity', **Journal of Computational Physics**, Vol. 136, pp. 41-50.
25. Moussa B. (2000) 'Meshless Particle methods: Recent developments for non-linear conservation laws in bounded domain', **Godunov Methods: Theory and Applications**, (ed. E. F. Toro), Kluwer Academic/Plenum Publishers.
26. Randles P. W. & L. D. Libersky (1996) 'SPH: Some recent improvements and applications', **Computer Methods in applied Mechanics & Engineering**, Vol. 139, pp. 375-408.
27. Shao S, J. Changming, D. I. Graham, D. E. Reeve, P. W. James, & A. J. Chadwick (2006) 'Simulation of wave overtopping by an incompressible SPH model', **Coastal Engineering**, Vol. 53, pp. 723-755.
28. Swegle J. W. (1994) '**An analysis of of SPH**', SAND93-2513 Technical Report, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, USA.
29. Swegle J. W. & S. W. Attaway (1995) 'On the feasibility of using SPH for underwater explosion calculations', **Computational Mechanics**, Vol. 17, pp. 151-168.
30. Toro E. F. (1999) '**Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics**', 2nd Edition, Springer Verlag.
31. Verlet L. (1967) 'Computer experiments on classical fluids I: Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules'. **Physics Review**, Vol.159,pp. 98-103.
32. Zhu Y., P. J. Fox & J. P. Morris (1999) 'A pore-scale numerical model for flow through porous media', **Int. Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics**, Vol. 23, pp. 881-904.